Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Акулов, С. А. Дуплий, В. В. Читов, Дифференциальное исчисление для q -деформированных твисторов, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 2, 177–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf865>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 05:55:06

© 1998 г. В. П. Акулов*, С. А. Дуплий†, В. В. Читов†

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ q -ДЕФОРМИРОВАННЫХ ТВИСТОРОВ

Предложен “короткий” тип q -деформированного дифференциального исчисления на световом конусе с использованием твисторного представления. Получены коммутационные соотношения между координатами и импульсами. Рассмотренный квазиклассический предел дает точную форму схода с массовой оболочки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Деформированное дифференциальное исчисление [1, 2] играет важную роль в физических приложениях [3]. В связи с этим приближение светового конуса привлекает внимание, поскольку оно применяется для описания безмассовых частиц, нуль-струн и нуль-мембран [4]. Стандартный формализм биковариантного дифференциального исчисления [5] и правого (левого) инвариантного дифференциального исчисления [6, 7] не применим на световом конусе из-за обращения в нуль соответствующего квантового детерминанта. Именно поэтому формы Маурера–Картана вообще не могут быть здесь определены и построение деформированного дифференциального исчисления стандартным способом невозможно.

С точки зрения математики основные объекты принадлежат к классу квантовых полугрупп [8], который состоит из стандартных квантовых групп и идеалов (для введения в теорию полугрупп см. [9], применение в теории суперсимметрии см. [10, 11]).

В настоящей работе построен вариант q -деформированного дифференциального исчисления на световом конусе, который наиболее близок к стандартному [12, 13]. Мы надеемся, что полученное исчисление может быть непосредственно применено в физических приложениях.

2. “КОРОТКОЕ” ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Напомним деформированное дифференциальное исчисление на квантовой плос-

* Институт теоретической физики Национального научного центра “Харьковский физико-технический институт”, Харьков, Украина

† Физический факультет, Харьковский государственный университет, Харьков, Украина

кости $E_q(2)$ [1]

$$xy = qyx. \quad (1)$$

В обычном случае имеются два решения для $E_q(2)$:

$$\begin{cases} \delta x x = q^2 x \delta x, \\ \delta x y = qy \delta x + (q^2 - 1)x \delta y, \\ \delta y x = qx \delta y, \\ \delta y y = q^{-2} y \delta y; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \delta x x = q^2 x \delta x, \\ \delta x y = q^{-1} y \delta x, \\ \delta y x = q^{-1} x \delta y + (q^{-2} - 1)y \delta x, \\ \delta y y = q^{-2} y \delta y. \end{cases} \quad (3)$$

Хорошо известно [14], что существует автоморфизм квантовой плоскости (1)

$$\begin{pmatrix} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \\ q \rightarrow q^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

который обусловлен следующим свойством R -матрицы:

$$R_q \rightarrow R_{q^{-1}}^{-1}. \quad (5)$$

Если ввести параметр эволюции [3] и рассмотреть динамику на $E_q(2)$, где (2) – коммутационные соотношения между импульсом и координатой, то в силу второй формулы в (2) для фазового пространства получаются довольно сложные условия. Это нежелательное (так называемое “длинное”) решение затрудняет вычисление и применение самосогласованных скобок Пуассона.

В поисках “короткого” решения наряду с (2) и (3) мы обнаружили следующее решение на $E_q(2)$:

$$\begin{cases} \delta x x = x \delta x, \\ \delta x y = qy \delta x, \\ \delta y x = q^{-1} x \delta y, \\ \delta y y = y \delta y. \end{cases} \quad (6)$$

В формулах (2), (3) и (6) δ – стандартный внешний дифференциал, удовлетворяющий классическому правилу Лейбница, лемме Пуанкаре и обладающий свойствами

$$\delta x \delta y = -q \delta y \delta x, \quad (\delta x)^2 = 0, \quad (\delta y)^2 = 0.$$

В отличие от “длинных” решений (2) и (3), которые преобразуются одно в другое автоморфизмом (4), “короткое” решение (6) является неподвижной точкой такого преобразования.

Заметим что такое “короткое” решение возможно и в случае суперплоскости $E_q(1 \mid 1)$ с координатами (x, θ) . Оно имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x\theta = q\theta x, \\ \delta x x = x \delta x, \\ \delta x \theta = -q\theta \delta x, \\ \delta \theta x = q^{-1}x \delta \theta, \\ \delta \theta \theta = \theta \delta \theta, \\ \delta x \delta \theta = q \delta \theta \delta x. \end{cases} \quad (7)$$

3. q -ДЕФОРМИРОВАННЫЙ СВЕТОВОЙ КОНУС

Рассмотрим q -деформированный изотропный вектор в четырехмерном пространстве Минковского, который описывается следующей (2×2) - q -матрицей:

$$X = \begin{pmatrix} x^{1\dot{1}} & x^{1\dot{2}} \\ x^{2\dot{1}} & x^{2\dot{2}} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Определим q -деформированный световой конус как

$$\det_{q^2} X = x^{1\dot{1}}x^{2\dot{2}} - q^2x^{1\dot{2}}x^{2\dot{1}} = 0. \quad (9)$$

Из-за мультипликативности квантового детерминанта преобразование Лоренца (представленное двухпараметрической деформацией $GL_{p,r}(2, C)$, где $p = q^2$ и $r = 1/q^2$) не меняет условия светового конуса (9).

q -Деформированные компоненты обладают следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{cases} x^{1\dot{1}}x^{1\dot{2}} = q^2x^{1\dot{2}}x^{1\dot{1}}, \\ x^{1\dot{1}}x^{2\dot{1}} = q^2x^{2\dot{1}}x^{1\dot{1}}, \\ x^{1\dot{2}}x^{2\dot{1}} = x^{2\dot{1}}x^{1\dot{2}}, \\ x^{1\dot{2}}x^{2\dot{2}} = q^2x^{2\dot{2}}x^{1\dot{2}}, \\ x^{2\dot{1}}x^{2\dot{2}} = q^2x^{2\dot{2}}x^{2\dot{1}}, \\ x^{1\dot{1}}x^{2\dot{2}} - x^{2\dot{2}}x^{1\dot{1}} = (q^2 - q^{-2})x^{1\dot{2}}x^{2\dot{1}}. \end{cases} \quad (10)$$

Как обычно [15, 16], изотропный вектор имеет твисторное представление. В q -деформированном случае введем твисторы с q -деформированными компонентами

$$\varphi_q = (\varphi_q^A) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = 1, 2, \quad (11)$$

где x и y удовлетворяют (1).

q -Деформированный тензор Леви-Чивита

$$\epsilon_q = (\epsilon_q^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & q^{1/2} \\ -q^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

обладает свойством

$$\epsilon_q^{AB} \epsilon_{q,BA} = q + q^{-1}. \quad (13)$$

q -Антисимметрия ϵ_q приводит к равенству

$$\varphi_q^A \varphi_q^B \epsilon_{q,AB} = \varphi_q^A \varphi_{q,A} = 0.$$

Комплексно-сопряженный q -деформированный твистор

$$\overline{\varphi}_q = (\overline{\varphi}_q^A) = (\bar{x}, \bar{y}).$$

Определим инволюцию $x \rightarrow \bar{x}$ как обычное эрмитово сопряжение. В терминах компонент q -твистора q -нуль-вектор имеет стандартный вид

$$X^{A\dot{A}} = \varphi_q^A \overline{\varphi}_q^{\dot{A}} = \begin{pmatrix} x\bar{x} & x\bar{y} \\ y\bar{x} & y\bar{y} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В классическом пределе ($q \rightarrow 1$) имеем $\varphi_q^A \rightarrow \varphi^A$, где φ^A – коммутирующий майорана-вейлевский спинор для $D = 10$, вейлевский спинор для $D = 6$ и майорановский спинор для $D = 3, 4$ в соответствии с алгебрами $\mathcal{O}, \mathcal{H}, \mathcal{C}, \mathcal{R}$.

Условие светового конуса (9), выраженное через компоненты q -твистора, следующее:

$$\det_{q^2} X = x\bar{x}y\bar{y} - q^2 x\bar{y}y\bar{x} = 0. \quad (15)$$

Фактически имеются две копии квантовой плоскости (x, y) и $(\bar{x}, \bar{y})$. Теперь необходимо установить коммутационные соотношения между компонентами q -твистора и компонентами его сопряженного, которые удовлетворяют (10) и стандартной инволюции.

Сопрягая (1), мы легко получаем условие

$$\bar{q} = q^{-1} = \exp(-i\hbar) \quad (16)$$

или $|q| = 1$.

Пусть остальные коммутационные соотношения имеют общую форму

$$\begin{cases} x\bar{x} = q^n \bar{x}x, \\ x\bar{y} = q^m \bar{y}x, \\ y\bar{x} = q^k \bar{x}y, \\ y\bar{y} = q^l \bar{y}y, \end{cases} \quad (17)$$

где n, m, k, l – произвольные константы, которые должны быть определены из (10) и условия инволюции. Таким образом получим следующие независимые уравнения:

$$\begin{cases} m - n = 1, \\ n - k = 1, \\ l - k = 1, \end{cases}$$

тогда с учетом этих уравнений соотношение (17) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x\bar{x} = q^n \bar{x}x, \\ x\bar{y} = q^{n+1} \bar{y}x, \\ y\bar{x} = q^{n-1} \bar{x}y, \\ y\bar{y} = q^n \bar{y}y. \end{cases} \quad (18)$$

Теперь рассмотрим условие вещественности как следствие возможности редуцировать число компонент q -деформированного нуль-вектора до трех вещественных компонент. Получаем $n = 0$. При этом остальные коммутационные соотношения между компонентами твистора приобретают вид

$$\begin{cases} xy = qyx, \\ x\bar{y} = q\bar{y}x, \\ \bar{x}y = qy\bar{x}, \\ \overline{xy} = q\overline{yx}, \\ \bar{x}x = x\bar{x}, \\ \bar{y}y = y\bar{y}. \end{cases} \quad (19)$$

Теперь можно найти “короткий” вариант q -деформированного дифференциального исчисления на твисторных компонентах

$$\begin{cases} \delta x x = x \delta x, \\ \delta x \bar{x} = \bar{x} \delta x, \\ \delta x y = qy \delta x, \\ \delta x \bar{y} = q\bar{y} \delta x, \end{cases} \quad \begin{cases} \delta \bar{x} x = x \delta \bar{x}, \\ \delta \bar{x} \bar{x} = \bar{x} \delta \bar{x}, \\ \delta \bar{x} y = qy \delta \bar{x}, \\ \delta \bar{x} \bar{y} = q\bar{y} \delta \bar{x}, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \delta y x = q^{-1}x \delta y, \\ \delta y \bar{x} = q^{-1}\bar{x} \delta y, \\ \delta y y = y \delta y, \\ \delta y \bar{y} = \bar{y} \delta y, \end{cases} \quad \begin{cases} \delta \bar{y} x = q^{-1}x \delta \bar{y}, \\ \delta \bar{y} \bar{x} = q^{-1}\bar{x} \delta \bar{y}, \\ \delta \bar{y} y = y \delta \bar{y}, \\ \delta \bar{y} \bar{y} = \bar{y} \delta \bar{y}, \end{cases} \quad (21)$$

где $(\delta x)^2 = (\delta \bar{x})^2 = (\delta y)^2 = (\delta \bar{y})^2 = 0$.

Коммутационные соотношения между самими дифференциалами приобретают вид

$$\begin{cases} \delta x \delta \bar{x} = -\delta \bar{x} \delta x, \\ \delta x \delta y = -q \delta y \delta x, \\ \delta x \delta \bar{y} = -q \delta \bar{y} \delta x, \\ \delta y \delta x = -q^{-1} \delta x \delta y, \\ \delta y \delta \bar{x} = -q^{-1} \delta \bar{x} \delta y, \\ \delta y \delta \bar{y} = -\delta \bar{y} \delta y. \end{cases} \quad (22)$$

Используя полученное q -деформированное дифференциальное исчисление на q -твисторах, мы можем построить дифференциальное исчисление на любых составных объектах, таких как q -деформированные нуль-векторы и тензоры произвольного ранга.

Таким образом, для q -деформированного нуль-вектора получаем

$$\begin{cases} \delta x^{1\dot{1}} x^{1\dot{1}} = x^{1\dot{1}} \delta x^{1\dot{1}}, \\ \delta x^{1\dot{1}} x^{1\dot{2}} = q^2 x^{1\dot{2}} \delta x^{1\dot{1}}, \\ \delta x^{1\dot{1}} x^{2\dot{1}} = q^2 x^{2\dot{1}} \delta x^{1\dot{1}}, \\ \delta x^{1\dot{1}} x^{2\dot{2}} = q^4 x^{2\dot{2}} \delta x^{1\dot{1}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \delta x^{1\dot{2}} x^{1\dot{2}} = x^{1\dot{2}} \delta x^{1\dot{2}}, \\ \delta x^{1\dot{2}} x^{2\dot{1}} = x^{2\dot{1}} \delta x^{1\dot{2}}, \\ \delta x^{1\dot{2}} x^{1\dot{1}} = q^{-2} x^{1\dot{1}} \delta x^{1\dot{2}}, \\ \delta x^{1\dot{2}} x^{2\dot{2}} = q^2 x^{2\dot{2}} \delta x^{1\dot{2}}, \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \delta x^{2\dot{1}} x^{2\dot{1}} = x^{2\dot{1}} \delta x^{2\dot{1}}, \\ \delta x^{2\dot{1}} x^{1\dot{1}} = q^{-2} x^{1\dot{1}} \delta x^{2\dot{1}}, \\ \delta x^{2\dot{1}} x^{1\dot{2}} = x^{1\dot{2}} \delta x^{2\dot{1}}, \\ \delta x^{2\dot{1}} x^{2\dot{2}} = q^2 x^{2\dot{2}} \delta x^{2\dot{1}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \delta x^{2\dot{2}} x^{2\dot{2}} = x^{2\dot{2}} \delta x^{2\dot{2}}, \\ \delta x^{2\dot{2}} x^{1\dot{1}} = q^{-4} x^{1\dot{1}} \delta x^{2\dot{2}}, \\ \delta x^{2\dot{2}} x^{1\dot{2}} = q^{-2} x^{1\dot{2}} \delta x^{2\dot{2}}, \\ \delta x^{2\dot{2}} x^{2\dot{1}} = q^{-2} x^{2\dot{1}} \delta x^{2\dot{2}}, \end{cases} \quad (24)$$

и

$$\begin{cases} \delta x^{1\dot{1}} \delta x^{1\dot{2}} = -q^2 \delta x^{1\dot{2}} \delta x^{1\dot{1}}, \\ \delta x^{1\dot{1}} \delta x^{2\dot{1}} = -q^2 \delta x^{2\dot{1}} \delta x^{1\dot{1}}, \\ \delta x^{1\dot{1}} \delta x^{2\dot{2}} = -q^4 \delta x^{2\dot{2}} \delta x^{1\dot{1}}, \\ \delta x^{1\dot{2}} \delta x^{2\dot{1}} = -\delta x^{2\dot{1}} \delta x^{1\dot{2}}, \\ \delta x^{1\dot{2}} \delta x^{2\dot{2}} = -q^2 \delta x^{2\dot{2}} \delta x^{1\dot{2}}, \\ \delta x^{2\dot{1}} \delta x^{2\dot{2}} = -q^2 \delta x^{2\dot{2}} \delta x^{2\dot{1}}. \end{cases} \quad (25)$$

Исходя из этих формул можно найти следующие коммутационные соотношения для координат и производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{1}}} x^{1\dot{1}} = 1 + x^{1\dot{1}} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{1}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{1}}} x^{1\dot{2}} = q^{-2} x^{1\dot{2}} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{1}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{1}}} x^{2\dot{1}} = q^{-2} x^{2\dot{1}} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{1}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{1}}} x^{2\dot{2}} = q^{-4} x^{2\dot{2}} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{1}}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{2}}} x^{1\dot{1}} = q^2 x^{1\dot{1}} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{2}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{2}}} x^{1\dot{2}} = 1 + x^{1\dot{2}} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{2}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{2}}} x^{2\dot{1}} = x^{2\dot{1}} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{2}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{2}}} x^{2\dot{2}} = q^{-2} x^{2\dot{2}} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{2}}}, \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{1}}} x^{1\dot{1}} = q^2 x^{1\dot{1}} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{1}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{1}}} x^{2\dot{1}} = 1 + x^{2\dot{1}} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{1}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{1}}} x^{1\dot{2}} = x^{1\dot{2}} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{1}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{1}}} x^{2\dot{2}} = q^{-2} x^{2\dot{2}} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{1}}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{2}}} x^{1\dot{1}} = q^4 x^{1\dot{1}} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{2}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{2}}} x^{1\dot{2}} = q^2 x^{1\dot{2}} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{2}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{2}}} x^{2\dot{1}} = q^2 x^{2\dot{1}} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{2}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{2}}} x^{2\dot{2}} = 1 + x^{2\dot{2}} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{2}}}, \end{cases} \quad (27)$$

а также соотношения между самими производными

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{1}}} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{2}}} = q^2 \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{2}}} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{1}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{1}}} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{2}}} = q^4 \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{2}}} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{1}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{2}}} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{2}}} = q^2 \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{2}}} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{2}}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{1}}} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{1}}} = q^2 \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{1}}} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{1}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{2}}} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{1}}} = \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{1}}} \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{2}}}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{1}}} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{2}}} = q^2 \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{2}}} \frac{\partial}{\partial x^{2\dot{1}}}. \end{cases} \quad (28)$$

По аналогии можно написать коммутационные соотношения между q -деформированными дифференциалами и производными.

Все соотношения согласованы со следующим условием:

$$\delta(\det_{q^2} X) = 0. \quad (29)$$

4. ИМПУЛЬСЫ И q -ДАЛАМБЕРТИАН

Введем q -матрицу для импульсов

$$P_q = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \frac{\partial}{\partial x^{1\bar{1}}} & -i \frac{\partial}{\partial x^{1\bar{2}}} \\ -i \frac{\partial}{\partial x^{2\bar{1}}} & -i \frac{\partial}{\partial x^{2\bar{2}}} \end{pmatrix} \quad (30)$$

с коммутационными соотношениями, определяемыми (28).

q -Даламбертиан определяется как

$$\square_{q^2} = -\det_{q^2} P_q = \frac{\partial}{\partial x^{1\bar{1}}} \frac{\partial}{\partial x^{2\bar{2}}} - q^2 \frac{\partial}{\partial x^{1\bar{2}}} \frac{\partial}{\partial x^{2\bar{1}}}. \quad (31)$$

Условие светового конуса (9) приводит к подобному условию для импульсов

$$\square_{q^2} = 0. \quad (32)$$

В квазиклассическом пределе $q = \exp(ih) \rightarrow 1$ q -даламбертиан представим в следующем виде:

$$\square_{q^2} = \square - (q^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x^{1\bar{2}}} \frac{\partial}{\partial x^{2\bar{1}}} = \square - 2ih P_{1\bar{2}} P_{2\bar{1}} = 0. \quad (33)$$

Второе слагаемое в (33) дает новый способ схода с массовой оболочки (приближение “off-shell”). В отличие от стандартной картины [17] импульсы, входящие в дополнительное “off-shell”-слагаемое в (33), коммутируют друг с другом.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен вариант дифференциального исчисления на q -деформированном световом конусе, которое может быть применено к описанию динамики безмассовых квантовых частиц, q -деформированных нуль-струн и нуль-мембран. Как отмечено выше, “короткое” решение легко обобщается на случай суперсимметрии.

С помощью полученного q -деформированного дифференциального исчисления на q -твисторах можно построить соответствующие исчисления на q -тензорах произвольного ранга.

Авторы выражают благодарность А. П. Исаеву, П. Н. Пятову, Б. М. Зупнику и Л. Л. Ваксману за полезное обсуждение. Эта работа выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда Александра Гумбольта (С. А. Дуплий) и INTAS-93/0493ext и 93/0127ext (В. П. Акулов).

Список литературы

- [1] *J. Wess, B. Zumino.* Nucl. Phys. (Proc. Suppl.). B. 1990. V. 18. P. 302.
- [2] *S. L. Woronowicz.* Commun. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 125.
- [3] *I. Arefieva, I. Volovich.* Quantum group particles and non-archimedean geometry. CERN TH-6137/91, 1991.
- [4] *М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен.* Теория суперструн. Т. 1. М.: Мир, 1990.
- [5] *L. D. Faddeev, P. N. Pyatov.* The differential calculus on linear quantum groups. hep-th/9402070, 1994.
- [6] *V. P. Akulov, V. D. Gerschun.* Matched reduction of differential calculus on quantum groups $gl_q(2, c)$, $sl_q(2, c)$ and $e_q(2)$. q-alg/9509030, 1995.
- [7] *J. Wess, B. Zumino, A. Schimacher.* Z. Phys. C. 1990. B. 49. S. 317.
- [8] *Е. Е. Демидов.* УМН. 1993. Т. 48. № 6. С. 39.
- [9] *A. H. Clifford, G. B. Preston.* The Algebraic Theory of Semigroups. V. 1. Providence: Amer. Math. Soc., 1961.
- [10] *S. Duplij.* J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 2959.
- [11] *S. Duplij.* J. Math. Phys. 1997. V. 38. № 2. P. 1035; Semigroup Forum. 1997. V. 54. № 2. P. 253.
- [12] *Б. М. Зунник.* ТМФ. 1993. Т. 95. С. 403.
- [13] *L. L. Vaksman, L. I. Korogodsky.* Harmonic analysis on quantum hyperboloids. Kiev preprint, ITP-90-27P.
- [14] *Л. Д. Фаддеев, Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тазтаджян.* Алгебра и анализ. 1990. Т. 1. С. 193.
- [15] *E. Cartan.* La Theorie des Spineurs. Paris: Mercier, 1938.
- [16] *R. Penrose.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1955. V. 51. P. 406.
- [17] *J. A. Azcarraaga, P. P. Kulish, F. Rodenas.* Quantum groups and deformed special relativity. FTUV 94-21, hep-th/9405161, 1994.

Поступила в редакцию 1.XII.1997 г.