Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. С. Анисимов, Однопетлевое вычисление β -функции
в модифицированной теории Янга–Миллса, *ТМФ*, 2014,
том 180, номер 3, 291–306

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8650>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:58:23

© 2014 г.

П. С. Анисимов*

ОДНОПЕТЛЕВОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ β -ФУНКЦИИ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

В однопетлевом приближении для модифицированной теории Янга–Миллса проведены вычисления вкладов в двухточечную и трехточечную функции Грина калибровочного поля A_μ , в функцию Грина антикоммутирующих полей e и b и в вершинную функцию Γ_{Aeb} . Найдены константы перенормировки Z_1 , Z_2 и соответствующие константы $\bar{Z}_1$ и $\bar{Z}_2$ для антикоммутирующих полей, и показано, что они удовлетворяют тому же уравнению, что и в обычной теории Янга–Миллса. Продемонстрировано, что β -функции обычной и модифицированной теорий совпадают.

Ключевые слова: теория Янга–Миллса, константы перенормировки, однопетлевое приближение, β -функция, калибровочная инвариантность.

DOI: 10.4213/tmf8650

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что теория Янга–Миллса не может быть получена как предел при $m \rightarrow 0$ массивной теории Янга–Миллса, поскольку продольная поляризация векторного поля не отщепляется в пределе нулевой массы и дает ненулевой вклад [1]. Но массивная неабелева калибровочно-инвариантная модель, включающая дополнительные возбуждения, может быть использована как калибровочно-инвариантная инфракрасная регуляризация теории Янга–Миллса, что впервые было показано в работе [2].

1.1. Локальная калибровочно-инвариантная инфракрасная регуляризация для теории Янга–Миллса. Несмотря на большие успехи в изучении неабелевых калибровочных теорий, проблема построения калибровочно-инвариантной инфракрасной регуляризации долгое время не поддавалась решению. С одной стороны, в теории Янга–Миллса матрица рассеяния, связывающая свободные асимптотические состояния, которые содержат безмассовые состояния, не существует из-за инфракрасных расходимостей. С другой стороны, калибровочно-инвариантная инфракрасная регуляризация позволила бы придать смысл формальным манипуляциям, которые обычно проводятся с учетом того, что элементы матрицы рассеяния на

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: paulanisimoff@gmail.com

массовой поверхности обладают инфракрасными расходимостями, которые нужно регуляризовать калибровочно-инвариантным образом.

Впервые подобная регуляризация была предложена в работе [2]. Проще всего проиллюстрировать основную идею данной работы, приведя следующий эвристический вывод регуляризованного действия для $SU(2)$ -калибровочной теории.

Очевидно, справедливо следующее формальное равенство:

$$\begin{aligned} \int \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_{\text{YM}} + m^2 \varphi^* \varphi] dx \right\} d\beta = \\ = \int \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_{\text{YM}} + m^{-2} (D^2 \varphi')^* (D^2 \varphi') - d^* D^2 b - b^* D^2 d] dx \right\} d\beta', \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\mathcal{L}_{\text{YM}}$ – обычный лагранжиан Янга–Миллса

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a, \quad (1.2)$$

а комплексные скалярные поля φ образуют $SU(2)$ -дублет, который удобно параметризовать следующим образом:

$$\varphi_1 = \frac{iB^1 + B^2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2 = \frac{B^0 + iB^3}{\sqrt{2}}. \quad (1.3)$$

Антикоммутирующие комплексные скалярные поля b, d образуют аналогичные дублеты. Мера $d\beta$ включает дифференциалы всех полей, а также множители, связанные с фиксацией калибровки. Мера $d\beta'$ отличается присутствием дифференциалов полей b, b^*, d, d^* . Оператор D^2 обозначает сумму $\sum_{\mu} D_{\mu} D_{\mu}$, где D_{μ} – ковариантная производная,

$$D_{\mu} \varphi = \left(\partial_{\mu} + \frac{ig\tau^a}{2} A_{\mu}^a \right) \varphi. \quad (1.4)$$

Граничные условия для полей Янга–Миллса стандартные. Поля φ быстро убывают, а поля φ', b, d удовлетворяют фейнмановским граничным условиям. Интеграл по полям φ , очевидно, дает тривиальную константу, так что левая часть уравнения (1.1) фактически совпадает с континуальным интегралом для теории Янга–Миллса. Выполняя явно интегрирование по полям φ', b, d в вакуумном секторе, мы получаем тот же результат.

Уравнение (1.1) является формальным, поскольку ни левая, ни правая его части в действительности не существуют из-за инфракрасных расходимостей. Инфракрасно-регуляризованная теория определяется следующим образом. Можно добавить к действию в правой части уравнения (1.1) калибровочно-инвариантный член

$$\alpha^2 \int ((D_{\mu} \varphi')^* (D_{\mu} \varphi') - m^2 (d^* b + b^* d)) dx. \quad (1.5)$$

Интеграл в правой части уравнения (1.1) по-прежнему имеет инфракрасные расходимости. Однако если произвести сдвиг

$$\varphi' \rightarrow \varphi' + \hat{\mu}, \quad (1.6)$$

где $\hat{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \mu/g$, то регуляризованное действие приобретет вид

$$A_R = \int \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^j F_{\mu\nu}^j - m^{-2} (D^2 \varphi)^* (D^2 \varphi) - (D_\mu d)^* (D_\mu b) - (D_\mu b)^* (D_\mu d) - \right. \\ \left. - \frac{\mu^2}{4m^2} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{\mu}{\sqrt{2}m^2} \partial^2 B^a \partial_\mu A_\mu^a + \alpha^2 (D_\mu \varphi)^* (D_\mu \varphi) + \frac{\alpha^2 \mu^2}{4} A_\mu^2 - \right. \\ \left. - \frac{\alpha^2 \mu}{2\sqrt{2}} B^a \partial_\mu A_\mu^a - \alpha^2 m^2 (d^* b + b^* d) + \dots \right\} d\beta, \quad (1.7)$$

где многоточием обозначены члены взаимодействия, возникающие в результате сдвига (1.6).

Видно, что сдвиг (1.6) порождает массовый член для векторного поля $(\partial_\mu A_\mu)^2$, смешивание полей B^a и $\partial_\mu A_\mu^a$, а также дополнительные члены взаимодействия. Для простоты в дальнейшем удобно положить $\mu^2 = 2m^2$. В таком случае масса поля Янга–Миллса равна αm .

Действие (1.7) локально и инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a - g\epsilon^{abc} A_\mu^b \eta^c + \partial_\mu \eta^a, \\ B^0 &\rightarrow B^0 + g(B^a \eta^a), \\ B^a &\rightarrow B^a - m\eta^a - \frac{g}{2}\epsilon^{abc} B^b \eta^c - \frac{g}{2} B^0 \eta^a. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Данная инвариантность позволяет выбрать в соответствующем континуальном интеграле любую допустимую калибровку. Особенно удобна калибровка Лоренца $\partial_\mu A_\mu = 0$, так как в ней отсутствует смешивание полей A_μ^a и B^a и очевидна перенормируемость. В то же время регуляризованное действие (1.7) содержит массовый член поля Янга–Миллса и, следовательно, не приводит к инфракрасным расходимостям.

Отметим, что преобразование (1.6) не является простой заменой переменных, поскольку оно меняет граничные условия в континуальном интеграле. Формула (1.7) является определением инфракрасно-регуляризованного действия теории Янга–Миллса, точнее

$$\exp \left\{ i \int \mathcal{L}_{YM} d^4 x \right\} d\beta \Big|_{\text{reg}} = \int e^{iA_R} d\beta'. \quad (1.9)$$

Формула (1.9) определяет инфракрасно-регуляризованную матрицу рассеяния в теории Янга–Миллса, записанную в виде континуального интеграла от экспоненты от локального действия. Это уравнение позволяет также дать корректное определение корреляционных функций, поскольку в регуляризованной теории можно осуществить виковский поворот во всех фейнмановских интегралах, после чего предельный переход $\alpha \rightarrow 0$ становится законным.

В работах [3], [4] было показано, что замену переменных в континуальном интеграле, приводящую к появлению высших производных, можно интерпретировать как переход к полевой модели, включающей нефизические духовые поля. Эта модель обладает суперсимметрией, которая в соответствии с теоремой Нётер приводит к существованию сохраняющегося нильпотентного заряда Q . Существование такого заряда позволяет выделить физические состояния с помощью условия

$$Q|\psi\rangle_{\text{phys}} = 0. \quad (1.10)$$

Состояния, удовлетворяющие этому условию, обладают неотрицательной нормой, и матрица рассеяния в этом подпространстве унитарна. В работе [2] было показано, что и для рассматриваемой теории возможно построить аналогичную конструкцию. Таким образом, в предложенной схеме нефизические возбуждения не исчезают в пределе снятой регуляризации, но полностью отщепляются от физических возбуждений, чего вполне достаточно для физической интерпретации теории.

Данная схема регуляризации используется и в работе [5], итогом которой является построение процедуры квантования неабелевых калибровочных теорий, позволяющей получить однозначные выражения для функций Грина калибровочно-инвариантных составных операторов и инфракрасно-регуляризованной матрицы рассеяния. Иными словами, наложение калибровочного условия не приводит к грибовской неоднозначности [6]. Впрочем, предложенная в работе [5] процедура применима лишь в рамках теории возмущений по константе связи, в то время как теория возмущений неприменима в присутствии инфракрасных сингулярностей.

Недавно была предложена калибровочно-инвариантная неабелева модель [7], которая может быть использована в качестве инфракрасной регуляризации теории Янга–Миллса как в рамках теории возмущений, так и вне ее.

1.2. Теория Янга–Миллса как безмассовый предел массивной калибровочно-инвариантной модели. Невозможность однозначного выбора калибровочного условия вне рамок теории возмущений не является внутренним свойством теории Янга–Миллса, а связана с ее конкретной формулировкой [2], [8], [9]. Добавляя новые асимптотически отщепляемые возбуждения, мы можем квантовать неабелевы калибровочные модели явно лоренц-инвариантным способом как в рамках теории возмущений, так и вне ее.

Исходя из этих соображений рассмотрим следующий лагранжиан:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{m^2}(D^2\tilde{\phi})^*(D^2\tilde{\phi}) + (D_\mu e)^*(D_\mu b) + (D_\mu b)^*(D_\mu e) + \alpha^2(D_\mu\tilde{\phi})^*(D_\mu\tilde{\phi}) - \alpha^2 m^2(b^*e + e^*b), \quad (1.11)$$

где $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ig(\tau^a/2)A_\mu^a\phi$ – ковариантная производная, τ^a – матрицы Паули, $\tilde{\phi}$ – двухкомпонентный комплексный дублет,

$$\tilde{\phi} = \phi - \hat{\mu}, \quad \hat{\mu} = (0, \mu\sqrt{2}g^{-1}), \quad (1.12)$$

μ – произвольная постоянная размерности массы. Лагранжиан Янга–Миллса имеет вид, как в (1.2), где $F_{\mu\nu}^a = \partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$. В настоящей работе мы рассматриваем группу $SU(2)$.

В дальнейшем используется параметризация ϕ в эрмитовых компонентах:

$$\phi = \left(\frac{i\phi^1 + \phi^2}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{g}{2\mu}\phi^0 \right), \frac{\phi^0 - i\phi^3(1 + (g/2\mu)\phi^0)}{\sqrt{2}} \right). \quad (1.13)$$

Комплексные антикоммутирующие поля b и e параметризованы следующим образом:

$$b = \left(\frac{ib^1 + b^2}{\sqrt{2}}, \frac{b^0 - ib^3}{\sqrt{2}} \right) \left(1 + \frac{g}{2\mu}\phi^0 \right), \quad e = \left(\frac{ie^1 + e^2}{\sqrt{2}}, \frac{e^0 - ie^3}{\sqrt{2}} \right), \quad (1.14)$$

где компоненты e^a эрмитовы, а b^a антиэрмитовы. Данная параметризация выбрана, чтобы избежать неоднозначности при выборе калибровки квантования [5].

Лагранжиан (1.11), очевидно, инвариантен относительно “сдвинутых” калибровочных преобразований

$$\begin{aligned}
 A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a + \partial_\mu \eta^a - g\epsilon^{abc} A_\mu^b \eta^c, \\
 \phi^a &\rightarrow \phi^a + \frac{g}{2}\epsilon^{abc}\phi^b\eta^c + \eta^a\mu + \frac{g^2}{4\mu}\phi^a\phi^b\eta^b, \\
 \phi^0 &\rightarrow \phi^0 - \frac{g}{2}(\phi^a\eta^a)\left(1 + \frac{g}{2\mu}\phi^0\right), \\
 b^a &\rightarrow b^a + \frac{g}{2}\epsilon^{abc}b^b\eta^c + \frac{g}{2}b^0\eta^a + \frac{g^2}{4\mu}b^a\phi^b\eta^b, \\
 e^a &\rightarrow e^a + \frac{g}{2}\epsilon^{abc}e^b\eta^c + \frac{g}{2}e^0\eta^a, \\
 b^0 &\rightarrow b^0 - \frac{g}{2}b^a\eta^a + \frac{g^2}{4\mu}(\phi^a\eta^a)b^0, \\
 e^0 &\rightarrow e^0 - \frac{g}{2}e^a\eta^a.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Эта инвариантность позволяет в соответствующем континуальном интеграле выбрать любую допустимую калибровку.

Исходный лагранжиан также инвариантен относительно преобразований суперсимметрии

$$\phi \rightarrow \phi - b\epsilon, \quad e \rightarrow e - \frac{D^2(\phi - \hat{\mu})}{m^2}\epsilon, \quad b \rightarrow b, \tag{1.16}$$

где ϵ – постоянный антикоммутирующий параметр.

Данная симметрия играет важную роль при доказательстве отщепления нефизических состояний. Лагранжиан (1.11) инвариантен относительно преобразований (1.16) для любого α , причем для $\alpha = 0$ эти преобразования также нильпотентны. Для дальнейших действий необходимы лишь существование сохраняющегося заряда Q и нильпотентность асимптотического заряда Q_0 , поскольку физический спектр определяется динамикой асимптотических состояний (мы придерживаемся стандартной задачи рассеяния, полагая, что асимптотический спектр совпадает со спектром свободного гамильтониана). В таком случае нильпотентность асимптотического заряда требует выполнения условия $\alpha = 0$, в то время как массивная теория при $\alpha \neq 0$ является калибровочно-инвариантной, но не унитарной. В данном случае не существует “унитарной” калибровки. Даже при условии $\phi^a = 0$ присутствуют нефизические возбуждения.

Для калибровочных преобразований (1.3) условие $\phi^a = 0$ является допустимым как в теории возмущений, так и вне ее. В самом деле, если $\phi^a = 0$, то под действием калибровочных преобразований (1.3) переменные ϕ^a варьируются как $\delta\phi^a = \mu\eta^a$, и условие $\phi^a = 0$ означает, что $\eta^a = 0$. В данной калибровке переменные ϕ^a параметризованы следующим образом:

$$\phi = \left(0, \frac{\phi^0}{\sqrt{2}}\right) + \hat{\mu}. \tag{1.17}$$

Также очевидно, что при $\alpha \neq 0$ лагранжиан (1.11) описывает массивное векторное поле и не приводит к инфракрасным расходимостям. В терминах сдвинутых

переменных лагранжиан (1.11) запишется в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Sh}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{m^2}(D^2\phi)^*(D^2\phi) + \frac{1}{m^2}(D^2\phi)^*(D^2\hat{\mu}) + \frac{1}{m^2}(D^2\hat{\mu})^*(D^2\phi) - \\ & - \frac{1}{m^2}(D^2\hat{\mu})^*(D^2\hat{\mu}) + (D_\mu e)^*(D_\mu b) + (D_\mu b)^*(D_\mu e) + \alpha^2(D_\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - \\ & - \alpha^2(D^2\phi)^*(D^2\hat{\mu}) - \alpha^2(D_\mu\hat{\mu})^*(D_\mu\phi) + \\ & + \alpha^2(D_\mu\hat{\mu})^*(D_\mu\hat{\mu}) - \alpha^2 m^2(b^*e + e^*b),\end{aligned}\quad (1.18)$$

где слагаемое

$$\alpha^2(D_\mu\hat{\mu})^*(D_\mu\hat{\mu}) = \frac{\alpha^2\mu^2}{2}A_\mu^2$$

генерирует массу векторного поля.

Преобразование (1.16), как и сдвиг (1.15), не подразумевает простую замену переменных, поскольку оно изменяет граничные условия в соответствующем континуальном интеграле.

В работе [7] было показано, что при $\alpha \neq 0$ теория калибровочно-инвариантна и в ней отсутствуют инфракрасные расходимости. А в случае присутствия ультрафиолетовых сингулярностей для получения конечных результатов достаточно применить любую калибровочно-инвариантную регуляризацию, например размерную технику или метод высших ковариантных производных. А при $\alpha = 0$ для всех наблюдаемых мы получаем те же результаты, что и в обычной теории Янга–Миллса. Однако это утверждение не было проверено явными вычислениями в соответствующей калибровке поля A_μ .

В настоящей работе в однопетлевом приближении вычисляются константы перенормировки калибровочного поля, вершины A^3 , константы $\bar{Z}_1$ и $\bar{Z}_2$ антикоммутирующих полей, а также проверяется соотношение между ними.

В работе [5], в которой не рассматриваются высшие производные, но структура слагаемых, содержащих антикоммутирующие поля, схожа с нашей, проводились вычисления, аналогичные [10], причем некоторые диаграммы, рассмотренные в [10], присутствуют и в настоящей работе. Но мы налагаем калибровочное условие на поле A_μ^a , отличное от условия из работы [10], поэтому и эти диаграммы будут рассмотрены подробно.

Итак, в калибровке $\phi^a = 0$ в пределе $\alpha \rightarrow 0$ лагранжиан (1.18) перепишется в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + & \frac{1}{2m^2}(\Box\phi^0)^2 + \frac{g^2}{4m^2}A_\mu^2\Box\phi^0\phi^0 + \frac{g^2}{4m^2}A_\mu^2(\partial_\mu\phi^0)^2 - \frac{g^2}{4m^2}A_\mu^a\partial_\nu A_\nu^a\partial_\mu\phi^0\phi^0 + \\ & + \frac{g}{2m}\Box\phi^0 A_\mu^2 + \frac{g}{2m}\phi^0(\partial_\mu A_\mu^a)^2 - \frac{g}{2m}A_\mu^a\partial_\mu\phi^0\partial_\nu A_\nu^a + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2 + \\ & + \frac{g^2}{4}(A_mu^2)^2 + \partial_\mu e^0\partial_\mu b^0 + \partial_\mu e^a\partial_\mu b^a + \frac{g}{2}A_\mu^a\left(\epsilon^{abc}(b^b\partial_\mu e^c - \partial_\mu b^b e^c) + \right. \\ & \left. + (b^a\partial_\mu e^0 - \partial_\mu b^a e^0) - (b^0\partial_\mu e^a - \partial_\mu b^0 e^a)\right) + \frac{g^2}{4}A_\mu^2(e^0e^0 + e^a b^a),\end{aligned}\quad (1.19)$$

где для удобства мы положили $\mu^2 = m^2$.

Пропагаторы и вершины взаимодействия приведены в приложении.

Рис. 1. Диаграммы с двумя внешними линиями калибровочного поля A_μ в обычной теории Янга–Миллса.

Рис. 2. Диаграммы с двумя внешними линиями калибровочного поля A_μ в модифицированной теории Янга–Миллса.

2. КОНСТАНТЫ ПЕРЕНОРМИРОВКИ

2.1. Константа Z_2 . Константа Z_2 отвечает за перенормировку поперечной части однопетлично-неприводимых диаграмм с двумя внешними линиями калибровочного поля A_μ^a .

В обычной теории вклад дают диаграммы, которые приведены на рис. 1, диаграмма на рис. 1б отвечает вкладу духов Фаддеева–Попова. Поскольку в настоящей работе используется техника размерной регуляризации, мы не рассматриваем и диаграммы $\sim D_c(0)$ [11].

В нашем случае вклад дается суммой диаграмм, представленных на рис. 2.

Теперь диаграмма на рис. 2б отвечает вкладу антикоммутирующих полей ϵ и b .

Диаграммы на рис. 1а и рис. 2а совпадают. Диаграмма на рис. 2в представляет собой результат взаимодействия, отвечающего лагранжиану

$$\mathcal{L}_\phi^{\text{int}} = \frac{g}{2m} \square \phi^0 A_\mu^2 + \frac{g}{2m} \phi^0 (\partial_\mu A_\mu^a)^2 - \frac{g}{2m} A_\mu^a \partial_\mu \phi^0 \partial_\nu A_\nu^a. \quad (2.1)$$

Соответствующий производящий функционал имеет вид

$$Z = \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_\phi^{\text{int}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j_\mu^a}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) d^4 x \right\} Z_0, \quad (2.2)$$

$$Z_0 = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int (j_\mu^a(x) D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_\nu^a(y) + J(x) D(x-y) J(y)) d^4 x d^4 y \right\},$$

где

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu} \delta^{ab} e^{-ik(x-y)}}{k^2}, \quad (2.3)$$

$$D(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m^2 e^{-ik(x-y)}}{k^2},$$

а j_μ^a и J суть источники полей A_μ^a и ϕ^0 соответственно.

Вклад в поперечную часть диаграммы дает лишь взаимодействие слагаемых $(g/2m)\square\phi^0 A_\mu^2$ и $(g/2m)A_\mu^a \partial_\mu \phi^0 \partial_\nu A_\nu^a$. Положим

$$\mathcal{A}_\mu^a \equiv \frac{\delta}{i\delta j_\mu^a}, \quad \sigma \equiv \frac{\delta}{i\delta J},$$

тогда, разлагая в ряд производящий функционал (2.2), получим

$$Z = (1 + \tilde{Z} + \dots) Z_0, \quad (2.4)$$

где

$$\tilde{Z} = \left\{ -\frac{2g^2}{m^2} \int \mathcal{A}_\mu^a(x) \overline{\mathcal{A}_\mu^a(x) \square^x \sigma(x) \mathcal{A}_\nu^b(y) \partial_\alpha^y \mathcal{A}_\alpha^b(y) \partial_\nu^y \sigma(y)} d^4x d^4y \right\}, \quad (2.5)$$

$\overline{\mathcal{A}\mathcal{A}}$ обозначает спаривание операторов. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \left\{ -\frac{2g^2}{m^2} \int \mathcal{A}_\mu^a(x) \mathcal{A}_\nu^b(y) \partial_\alpha^y \left(\overline{\mathcal{A}_\mu^a(x) \mathcal{A}_\alpha^b(y)} \right) \square^x \partial_\nu^y \left(\overline{\sigma(x) \sigma(y)} \right) d^4x d^4y \right\} = \\ &= -\frac{2g^2}{m^2} \int \mathcal{A}_\mu^a(x) \mathcal{A}_\mu^b(y) \partial_\alpha^y D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) \square^x \partial_\nu^y D(x-y) d^4x d^4y. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Проведя преобразование Лежандра

$$\Gamma = W - \int (j_\mu^a A_\mu^a + J\phi^0) d^4x|_{j_\mu^a=j_\mu^a(A_\mu^a), J=J(\phi^0)},$$

где $W = -i \ln Z$, получим эффективное действие

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2ig^2}{m^2} \int \frac{d^4k d^4p d^4p' d^4q d^4x d^4y}{(2\pi)^{4 \times 6}} A_\mu^a(p) e^{-ipx} A_\nu^b(p') \times \\ &\quad \times e^{-ip'y} (iq_\alpha) \frac{g_{\mu\alpha} \delta^{ab} e^{-iq(x-y)}}{q^2} (-k^2) (ik_\nu) \frac{m^2 e^{-ik(x-y)}}{k^4} = \\ &= 2ig^2 \int \frac{d^4k d^4p d^4p' d^4q d^4x d^4y}{(2\pi)^{4 \times 6}} A_\mu^a(p) e^{-ipx} A_\nu^b(p') \frac{g_{\mu\alpha} \delta^{ab} k^\nu q_\alpha}{q^2 k^4} \times \\ &\quad \times e^{-ix(p+q+k) - iy(p'-q-k)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Проинтегрировав по x и y , получаем дельта-функции, которые дают следующий закон сохранения импульса:

$$p' = -p, \quad q = -p - k.$$

Тогда окончательно эффективное действие перепишется в виде

$$\Gamma = 2ig^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\alpha} \delta^{ab} k_\nu (k+p)^\alpha}{k^2 (k+p)^2} A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p). \quad (2.8)$$

Применяя размерную регуляризацию для ампутированной диаграммы, получаем

$$2g^2 \delta^{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+p)_\nu k_\mu}{k^2 (k+p)^2} \stackrel{\text{div}}{=} -\frac{ig^2}{48\pi^2 \varepsilon} \delta^{ab} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu), \quad (2.9)$$

Рис. 3. Вклад антикоммутирующих полей e и b в двухточечную вершинную функцию.

где div обозначает расходящуюся часть интеграла, $\varepsilon = 4 - D$ – параметр размерной регуляризации, D – размерность пространства-времени.

Теперь найдем вклад взаимодействия A_μ и антикоммутирующих полей. Диаграмме на рис. 2б отвечает сумма диаграмм, представленных на рис. 3. В данном приближении в теории присутствуют три сорта вершин: $A_\mu^a e^b b^c$, $A_\mu^a e^0 b^c$ и $A_\mu^a e^0 b^c$. Рассмотрим левую диаграмму рис. 3, т. е. диаграмму с двумя вершинами сорта $A_\mu^a e^b b^c$, и получим соответствующий интеграл:

$$\begin{aligned} & - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(-\frac{ig}{2} \epsilon^{aec} (2k - p)_\mu \right) \frac{\delta^{ed}}{k^2} \left(-\frac{ig}{2} \epsilon^{bfd} (2k - p)_\nu \right) \frac{\delta^{fc}}{(k - p)^2} = \\ & = \frac{g^2}{4} \epsilon^{adf} \epsilon^{bfd} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k - p)_\mu (2k - p)_\nu}{k^2 (k - p)^2} \stackrel{\text{div}}{=} \frac{ig^2}{48\pi^2 \varepsilon} \delta^{ab} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Очевидно, что оставшиеся диаграммы имеют одинаковые расходящиеся части, причем в сумме эти расходимости равны расходимости первой диаграммы. Следовательно, окончательный результат для вклада антикоммутирующих полей будет равен

$$\frac{ig^2}{24\pi^2 \varepsilon} \delta^{ab} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu). \quad (2.11)$$

Суммируя вклады (2.9) и (2.11), получим

$$\frac{ig^2}{48\pi^2 \varepsilon} \delta^{ab} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu). \quad (2.12)$$

Расходящаяся часть диаграммы на рис. 1б, т. е. вклад петли духов Фаддеева–Попова, равна [12]

$$\frac{ig^2}{48\pi^2 \varepsilon} \delta^{ab} (g_{\mu\nu} p^2 + 2p_\mu p_\nu). \quad (2.13)$$

Очевидно, что поперечные части (2.13) и (2.12) совпадают. Учитывая, что вклады петель калибровочного поля A_μ в обычной (рис. 1а) и модифицированной (рис. 2а) теориях совпадают, приходим к выводу, что вклад в двухточечную вершинную функцию в модифицированной теории тот же, что и в обычной, а следовательно, совпадают и константы перенормировки Z_2 .

2.2. Константа Z_1 . Константа Z_1 осуществляет перенормировку вершины A^3 . В обычной теории Янга–Миллса вклад дают диаграммы, приведенные на рис. 4. Диаграмма на рис. 4б отвечает вкладу духов Фаддеева–Попова.

В нашем случае вклад является суммой диаграмм, представленных на рис. 5.

Рис. 4. Вклад в трехточечную вершинную функцию в обычной теории Янга–Миллса.

Рис. 5. Вклад в трехточечную вершинную функцию в модифицированной теории Янга–Миллса.

Диаграмма на рис. 5б представляет собой вклад антикоммутирующих полей b и e . Диаграммы на рис. 5д и рис. 5е возникают из-за наличия слагаемого $-(g/2)(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ в $\mathcal{L}_{\text{YM}}$ и слагаемого $(g^2/4)A^4$ в $m^{-2}(D^2\hat{\mu})^*(D^2\hat{\mu})$.

Рис. 6. Вклад антикоммутирующих полей e и b в трехточечную вершинную функцию.

Легко заметить, что соответствующие диаграммы на рис. 4, 5 (рис. 4а и 5а, рис. 4в и 5в, рис. 4г и 5г) совпадают. Вклад духов Фаддеева–Попова (рис. 5б) известен и составляет

$$\frac{g^3}{96\pi^2\epsilon}\epsilon^{abc}(g_{\mu\nu}(p-q)_\sigma - g_{\nu\sigma}(2p+q)_\mu + g_{\mu\sigma}(p+2q)_\nu).$$

Рассмотрим теперь случай модифицированной теории и рассчитаем суммарный вклад от неизвестных диаграмм.

Проводя вычисления, аналогичные случаю взаимодействия калибровочного поля со скалярным (см. п. 2.1), нетрудно показать, что суммарный вклад диаграмм на рис. 5д и рис. 5е равен

$$-\frac{g^3}{32\pi^2\epsilon}\epsilon^{abd}(g_{\mu\nu}(p-q)_\sigma - g_{\nu\sigma}(2p+q)_\mu + g_{\mu\sigma}(p+2q)_\nu). \quad (2.14)$$

Теперь рассмотрим вклад в вершинную функцию антикоммутирующих полей e и b . Сама по себе диаграмма на рис. 5б является суммой диаграмм, представленных на рис. 6.

В теории в рассматриваемом приближении взаимодействию калибровочного поля A_μ^a с антикоммутирующими полями b и e отвечают три сорта вершин: $A_\mu^a e^m b^n$, $A_\mu^a e^0 b^n$, $A_\mu^a e^m b^0$. С точки зрения правил Фейнмана они отличаются друг от друга тензорами ϵ^{amn} , δ^{an} , $-\delta^{an}$ соответственно. Всевозможные перестановки этих вершин дают восемь диаграмм. Пусть на диаграмме рис. 6а присутствуют все три сорта вершин, в то время как на диаграмме рис. 6б – лишь $A_\mu^a e^m b^n$. Для этих диаграмм получаем соответственно

$$\begin{aligned} \delta^{ae}\delta^{ef}\epsilon^{bmf}\delta^{mn}(-\delta^{nc}) &= -\epsilon^{bca} = -\epsilon^{abc}, \\ \epsilon^{aed}\delta^{ef}\epsilon^{bmf}\delta^{mn}\epsilon^{ckn}\delta^{kd} &= \epsilon^{afd}\epsilon^{bnf}\epsilon^{cdn} = -\epsilon^{afd}(\delta^{bc}\delta^{fd} - \delta^{bd}\delta^{fc}) = -\epsilon^{abc}, \end{aligned}$$

т.е. их вклады равны. Видно, что оставшиеся диаграммы будут давать тот же результат, а следовательно, достаточно вычислить расходящуюся часть диаграммы

на рис. 6а и умножить ее на 8:

$$\begin{aligned}
 & -8\epsilon^{abc} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(-\frac{ig}{2} (2k+q)_\mu \right) \frac{1}{k^2} \left(-\frac{ig}{2} (2k+p+q)_\sigma \right) \frac{1}{(k+p+q)^2} \times \\
 & \quad \times \left(-\frac{ig}{2} (2k+p+q)_\nu \right) \frac{1}{(k+q)^2} \stackrel{\text{div}}{=} \\
 & \stackrel{\text{div}}{=} 8g^3 \epsilon^{abc} \frac{1}{192\pi^2 \epsilon} (g_{\mu\nu}(p-q)_\sigma - g_{\nu\sigma}(2p+q)_\mu + g_{\mu\sigma}(p+2q)_\nu). \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Таким образом, общий вклад антикоммутирующих полей e и b имеет вид

$$\frac{g^3}{24\pi^2 \epsilon} \epsilon^{abc} (g_{\mu\nu}(p-q)_\sigma - g_{\nu\sigma}(2p+q)_\mu + g_{\mu\sigma}(p+2q)_\nu).$$

Диаграммы на рис. 5б и рис. 5г в сумме дадут

$$\frac{g^3}{96\pi^2 \epsilon} \epsilon^{abc} (g_{\mu\nu}(p-q)_\sigma - g_{\nu\sigma}(2p+q)_\mu + g_{\mu\sigma}(p+2q)_\nu),$$

т. е. их вклад равен вкладу духовых полей в обычной теории Янга–Миллса. Учитывая, что соответствующие диаграммы на рис. 4, 5 (рис. 4а и 5а, рис. 4в и 5в, рис. 4г и 5г) совпадают, приходим к выводу, что вклад в трехточечную вершинную функцию в модифицированной теории тот же, что и в обычной, а следовательно, совпадают и константы перенормировки Z_1 .

Таким образом, в однопетлевом приближении константы Z_1 и Z_2 совпадают с соответствующими константами стандартной теории, следовательно, значение выражения $Z_1 Z_2^{-1}$ остается прежним, и это означает, что рассматриваемая модель асимптотически свободна.

2.3. Константа $\bar{Z}_2$. Для нахождения константы перенормировки антикоммутирующих полей $\bar{Z}_2$ обратимся к рис. 7.

Рис. 7. Диаграммы для вычисления константы перенормировки $\bar{Z}_2$.

Соответствующий интеграл равен

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(-\frac{ig}{2} \delta^{ac}(2p+k)_\mu \right) \frac{\delta^{cd}}{(p+k)^2} \left(\frac{ig}{2} \delta^{bd}(2p+k)_\nu \right) \frac{\delta^{ab}}{i} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} = \\
 & = -3ig^2 p_\mu p_\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2(p+k)^2} \stackrel{\text{div}}{=} \frac{3g^2}{8\pi^2 \epsilon} p^2. \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Расходимость устраняется следующим контрчленом:

$$i \int dx (\bar{Z}_2 - 1) (i\partial_\mu e^0 \partial_\mu b^0) = \int dp (\bar{Z}_2 - 1) (-p^2) e^0(p) b^0(-p),$$

тогда

$$-(\bar{Z}_2 - 1)p^2 = -\frac{3g^2}{8\pi^2\varepsilon}p^2.$$

Таким образом, получаем

$$\bar{Z}_2 = 1 + \frac{3g^2}{8\pi^2\varepsilon}. \quad (2.17)$$

2.4. Константа $\bar{Z}_1$. Константа $\bar{Z}_1$ отвечает за перенормировку вершины $A_\mu eb$. Для ее нахождения необходимо посчитать расходящуюся часть диаграмм, представленных на рис. 8. Кроме приведенных на нем диаграмм, есть еще диаграммы с тремя вершинами, но их расходящиеся части равны нулю [10].

Рис. 8. Диаграммы для вычисления константы перенормировки $\bar{Z}_1$.

Для левой диаграммы на рис. 8 мы получаем следующий интеграл:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(-\frac{g^2}{2} g_{\mu\nu} \delta^{ac} \right) \frac{1}{(k+p+q)^2} \left(-\frac{ig}{2} (k+p+2q)_\lambda \right) \frac{\delta^{cd}}{i} \frac{g_{\nu\lambda}}{k^2} = \\ & = \frac{g^3}{2} \delta^{ab} (p+q)_\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2(p+k)^2} \stackrel{\text{div}}{=} \frac{g^3}{2} \delta^{ab} (p+q)_\mu \frac{i}{8\pi^2\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Правой диаграмме соответствует интеграл

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(-\frac{ig}{2} \delta^{ce} (k+2q)_\nu \right) \frac{\delta^{ef}}{(k+q)^2} \left(-\frac{g^2}{2} g_{\mu\lambda} \delta^{ad} \delta^{fb} \right) \frac{\delta^{cd}}{i} \frac{g_{\nu\lambda}}{k^2} = \\ & = \frac{g^3}{2} \delta^{ab} q_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2(k+q)^2} \stackrel{\text{div}}{=} \frac{g^3}{2} \delta^{ab} q_\mu \frac{i}{8\pi^2\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Складывая (2.18) и (2.19), получим

$$-\frac{ig^3}{2} \delta^{ab} (p+2q)_\mu \frac{-1}{8\pi^2\varepsilon}. \quad (2.20)$$

Данная расходимость устраняется контрчленом $(\bar{Z}_1 - 1)(-ig/2)\delta^{ab}(p+2q)_\mu$. В итоге имеем

$$\bar{Z}_1 = 1 + \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}. \quad (2.21)$$

3. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КОНСТАНТАМИ

Общеизвестно, что в теории неабелевых калибровочных полей имеет место соотношение

$$Z_1 Z_2^{-1} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2^{-1}, \quad (3.1)$$

которое вытекает из тождеств Славнова–Тейлора. Это равенство заменяет соотношение $Z_1 = Z_2$ в электродинамике. Благодаря ему перенормировка заряда, стоящего при тройной векторной вершине и тройной вершине, описывающей взаимодействие со вспомогательным скалярным полем, осуществляется с помощью одной и той же константы. Иными словами, универсальность взаимодействия сохраняется перенормировкой.

Полезно проверить равенство (3.1) в рамках рассматриваемой модели.

3.1. Проверка соотношения между константами перенормировки в случае модифицированной теории. Очевидно, что константы перенормировки зависят от калибровки, и в обычной теории эта зависимость имеет вид [13]

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + \frac{g^2 C_2(G)}{16\pi^2} \left[\frac{2}{3} + \frac{3(1-\alpha)}{4} \right] \frac{2}{\varepsilon}, \\ Z_2 &= 1 + \frac{g^2 C_2(G)}{16\pi^2} \left[\frac{5}{3} + \frac{1-\alpha}{2} \right] \frac{2}{\varepsilon}, \\ \bar{Z}_1 &= 1 - \frac{g^2 C_2(G)}{16\pi^2} \frac{\alpha}{2} \frac{2}{\varepsilon}, \\ \bar{Z}_2 &= 1 + \frac{g^2 C_2(G)}{16\pi^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1-\alpha}{4} \right] \frac{2}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где α – параметр, фиксирующий калибровку, а $C_2(G)$ – структурный символ.

В случае группы $SU(2)$ и нашей диагональной калибровки константы Z_1 , Z_2 , $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$ в обычной теории равны соответственно

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + \frac{g^2}{6\pi^2\varepsilon}, & Z_2 &= 1 + \frac{5g^2}{12\pi^2\varepsilon}, \\ \bar{Z}_1 &= 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}, & \bar{Z}_2 &= 1 + \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что соотношение (3.1) выполняется:

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2^{-1} &= \left(1 + \frac{g^2}{6\pi^2\varepsilon} \right) \left(1 - \frac{5g^2}{12\pi^2\varepsilon} \right) = 1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{12} \right) \frac{g^2}{\pi^2\varepsilon} = 1 - \frac{g^2}{4\pi^2\varepsilon}, \\ \bar{Z}_1 \bar{Z}_2^{-1} &= \left(1 - \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} \right) \left(1 - \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} \right) = 1 + \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right) \frac{g^2}{\pi^2\varepsilon} = 1 - \frac{g^2}{4\pi^2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Проверим соотношение (3.1) в случае модифицированной теории. Константы Z_1 и Z_2 совпадают с соответствующими константами в обычной теории, а следовательно, и значение выражения $Z_1 Z_2^{-1}$ остается прежним. Найдем правую часть соотношения (3.1) в нашем случае:

$$\bar{Z}_1 \bar{Z}_2^{-1} = \left(1 + \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} \right) \left(1 - \frac{3g^2}{8\pi^2\varepsilon} \right) = 1 + \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \right) \frac{g^2}{\pi^2\varepsilon} = 1 - \frac{g^2}{4\pi^2\varepsilon}.$$

Таким образом, в рассматриваемой модели, как и в обычной теории Янга–Миллса, выполняется равенство $Z_1 Z_2^{-1} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2^{-1}$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе в однопетлевом приближении для модифицированной теории Янга–Миллса, предложенной в работе [7], были посчитаны следующие вклады:

- 1) вклады в двухточечную и трехточечную функции Грина калибровочного поля A_μ ;
- 2) вклады в функцию Грина антикоммутирующих полей e и b ;
- 3) вклады в вершинную функцию Γ_{Aeb} .

Продемонстрировано, что в однопетлевом приближении исследуемая модель асимптотически свободна и согласуется со стандартной теорией Янга–Миллса.

Показано, что в случае модифицированной теории между константами перенормировки по-прежнему имеет место соотношение $Z_1 Z_2^{-1} = \overline{Z}_1 \overline{Z}_2^{-1}$.

Несмотря на то что в пределе $\alpha \rightarrow 0$ в рамках теории возмущений вновь появляются инфракрасные сингулярности, лагранжиан, рассмотренный в настоящей работе, может служить отправной точкой для непертурбативных вычислений, в частности для вычислений, связанных с конфайнментом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пропагаторы и вершины

$\frac{\delta^{ab}}{i} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2}$
$\frac{im^2}{k^4}$
$\frac{\delta^{ab}}{k^2}$
$\frac{1}{k^2}$

$-\frac{ig}{2} \delta^{ab} (p+q)_\mu$

$-\frac{ig}{2} \epsilon^{abc} (p+q)_\mu$

$$\frac{ig}{2} \delta^{ac} (p+q)_\mu$$

$$-\frac{g^2}{2} g_{\mu\nu} \delta^{ab} \delta^{cd}$$

$$-\frac{g^2}{2} g_{\mu\nu} \delta^{ab}$$

Благодарности. Автор выражает искреннюю признательность А. А. Славнову за неоценимые советы и консультации.

Список литературы

- [1] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **3**:1 (1970), 18–23.
- [2] А. А. Славнов, *ТМФ*, **154**:2 (2008), 213–219.
- [3] А. А. Slavnov, *Phys. Lett. B*, **258**:3–4 (1991), 391–394.
- [4] А. А. Slavnov, *Phys. Lett. B*, **620**:1–2 (2005), 97–103.
- [5] А. А. Славнов, *ТМФ*, **161**:2 (2009), 204–211.
- [6] V. N. Gribov, *Nucl. Phys. B*, **139**:1–2 (1978), 1–19.
- [7] А. А. Славнов, *ТМФ*, **175**:1 (2013), 3–10.
- [8] А. А. Slavnov, *JHEP*, **08** (2008), 047, 11 pp., arXiv:0807.1795.
- [9] A. Quadri, A. A. Slavnov, *JHEP*, **07** (2010), 087, 22 pp., arXiv:1002.2490.
- [10] Р. Н. Баранов, *ТМФ*, **161**:1 (2009), 37–45.
- [11] G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys. B*, **44**:1 (1972), 189–213; *Current Contents*, **15**:16 (1984), 16.
- [12] М. Пескин, Д. Шредер, *Введение в квантовую теорию поля*, РХД, Ижевск, 2001.
- [13] К. Ициксон, Ж. Б. Зюбер, *Квантовая теория поля*, т. 2, Мир, М., 1984.

Поступила в редакцию 9.02.2014