Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. З. Пакуляк, Э. Рагуси, Н. А. Славнов, Скалярные произведения в моделях с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей. Общий случай, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 1, 51–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8651>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 06:27:57

© 2014 г. С. З. Пакуляк^{*†‡}, Э. Рагуси[§], Н. А. Славнов[¶]

СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В МОДЕЛЯХ С $GL(3)$ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ R -МАТРИЦЕЙ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Изучаются квантовые интегрируемые модели с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей, к которым применим иерархический анзац Бете. Для скалярного произведения двух векторов Бете в общем положении получено явное выражение в виде суммы по разбиениям наборов параметров Бете. Это представление обобщает известную формулу для скалярных произведений в моделях с $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей.

Ключевые слова: иерархический анзац Бете, вектор Бете, скалярные произведения.

DOI: 10.4213/tmf8651

1. ВВЕДЕНИЕ

Алгебраический анзац Бете [1]–[4] позволяет находить спектры квантовых гамильтонианов во многих физически интересных моделях. В рамках этого метода также можно вычислять корреляционные функции. Последняя задача часто сводится к вычислению скалярных произведений векторов Бете. В нашей предыдущей работе [5] мы начали систематическое изучение скалярных произведений в квантовых интегрируемых моделях с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей. В указанной статье мы вычислили старшие коэффициенты скалярных произведений и изучили их свойства. На основе этих результатов мы продолжаем изучать скалярные произведения векторов Бете в настоящей работе.

^{*}Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: pakuliak@theor.jinr.ru

[†]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

[‡]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

[§]Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique, CNRS – Université de Savoie, Annecy-le-Vieux, France. E-mail: ragoucy@lapth.cnrs.fr

[¶]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: nslavnov@mi.ras.ru

В моделях, связанных с $GL(2)$ -симметрией, исследование скалярных произведений векторов Бете в рамках алгебраического анзаца Бете было начато в работах [6]–[9]. Скалярные произведения использовались для вычисления корреляционных функций в моделях одномерного бозе-газа и XXZ -цепочки Гейзенберга. В работе [10] было получено детерминантное представление для скалярного произведения произвольного вектора Бете и собственного вектора трансфер-матрицы. Этот результат позволил впоследствии получить интегральные представления для корреляционных функций в различных квантовых интегрируемых моделях [11]–[16]. Детерминантное представление для скалярных произведений также использовалось для вычисления формфакторов локальных операторов [17]–[19]. Эти результаты применялись для аналитического [20], [21] и численного анализа корреляционных функций [22]–[25].

В моделях, которые описываются симметриями более высокого ранга, скалярные произведения векторов Бете должны играть аналогичную роль. Однако в этом случае задача их вычисления становится технически более сложной. До сих пор единственное представление для скалярных произведений в моделях с $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей было известно благодаря работе Решетихина [26]. Это представление имеет вид суммы по разбиениям наборов параметров Бете (так называемая формула сумм). Такого типа формулы не годятся ни для аналитических, ни для численных вычислений. Однако их можно использовать для того, чтобы получить более компактные формулы, в частности найти детерминантные представления для некоторых частных случаев скалярных произведений. Представления такого типа были найдены в работах [27]–[29] для некоторых важных частных случаев скалярных произведений в квантовых интегрируемых моделях с $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей.

Возникает проблема обобщения формулы Решетихина на тригонометрический случай. В отличие от моделей, связанных с $GL(2)$ -симметриями, такое обобщение нельзя осуществить простым образом. В частности, в работе [5] было показано, что в моделях с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей имеются два старших коэффициента, тогда как в случае $GL(3)$ -инвариантной R -матрицы – только один.

Основная задача настоящей работы – получить тригонометрическое обобщение формулы Решетихина. В работе [5] был сделан первый шаг в этом направлении. Теперь мы продвинемся дальше и получим аналог формулы Решетихина для скалярных произведений в моделях с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей. Мы используем тот же метод, что и в работе [5]. Он основан на явных выражениях для дуальных векторов Бете и формулах кратного действия элементов матрицы монодромии на векторы Бете. Данный метод вычисления скалярного произведения является прямым, хотя и несколько сложным с технической точки зрения. Во многом он опирается на свойства старших коэффициентов, которые были установлены в работе [5].

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы описываем рассматриваемую модель и вводим необходимые обозначения. В разделе 3 представлен основной результат работы: формула сумм для скалярного произведения векторов Бете в моделях с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей. Остальная часть работы посвящена доказательству этой формулы. В разделе 4 описаны основные средства, необходимые для вывода формулы сумм. В разделе 5 вычислен результат последовательного многократного действия элементов матрицы монодромии на векторы

Бете. С помощью этого результата в разделе 6 получена формула сумм для скалярного произведения. Приложения А и Б содержат свойства детерминантов Изергина и старших коэффициентов. В приложении В доказано тождество суммирования для старших коэффициентов.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. МОДЕЛЬ

Квантовая $GL(3)$ тригонометрическая R -матрица имеет следующий вид:

$$R(u, v) = f(u, v) \sum_{1 \leq i \leq 3} E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (E_{ii} \otimes E_{jj} + E_{jj} \otimes E_{ii}) + \\ + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (ug(u, v)E_{ij} \otimes E_{ji} + vg(u, v)E_{ji} \otimes E_{ij}),$$

где $f(u, v)$ и $g(u, v)$ суть рациональные функции,

$$f(u, v) = \frac{qu - q^{-1}v}{u - v}, \quad g(u, v) = \frac{q - q^{-1}}{u - v}, \quad (2.1)$$

а q является комплексным числом (параметром деформации). Квадратные матрицы $(E_{ij})_{lk} = \delta_{il}\delta_{jk}$ (здесь $i, j, l, k = 1, 2, 3$) размера 3×3 суть матрицы с единственным отличным от нуля и равным единице матричным элементом на пересечении i -й строки и j -го столбца.

В настоящей работе рассмотрены квантовые интегрируемые модели, которые определяются матрицей монодромии $T(u)$ размера 3×3 , удовлетворяющей стандартным коммутационным соотношениям (RTT -соотношениям)

$$R(u, v) \cdot (T(u) \otimes 1) \cdot (1 \otimes T(v)) = (1 \otimes T(v)) \cdot (T(u) \otimes 1) \cdot R(u, v). \quad (2.2)$$

Элементы $T_{ij}(u)$ матрицы монодромии действуют в квантовом пространстве V и образуют квадратичную алгебру с коммутационными соотношениями, заданными формулой (2.2). Мы обозначим эту алгебру символом $\mathcal{A}_q$ и будем в дальнейшем рассматривать некоторые отображения алгебры $\mathcal{A}_q$ на $\mathcal{A}_{q^{-1}}$ (см. формулу (4.8))¹. Мы предполагаем, что в векторном пространстве V существует вектор старшего веса $|0\rangle \in V$ такой, что

$$T_{ij}(u)|0\rangle = \begin{cases} 0, & i > j, \\ \lambda_i(u)|0\rangle, & i = j, \end{cases} \quad \lambda_i(u) \in \mathbb{C}[[u, u^{-1}]]. \quad (2.3)$$

Предположим также, что операторы $T_{ij}(u)$ действуют в дуальном пространстве V^* с вектором $\langle 0|$ таким, что

$$\langle 0|T_{ij}(u) = \begin{cases} 0, & i < j, \\ \lambda_i(u)\langle 0|, & i = j, \end{cases}$$

и функции $\lambda_i(u)$ те же, что и в формуле (2.3).

Ниже мы будем постоянно работать с наборами переменных и их разбиениями на подмножества. Мы будем обозначать наборы переменных чертой: $\bar{u}$, $\bar{v}$ и т. д.,

$$\bar{u} = \{u_1, \dots, u_a\}, \quad \bar{v} = \{v_1, \dots, v_b\}.$$

¹Если матрица монодромии $T(u)$ является производящим рядом по параметру u^{-1} , тогда алгебру $\mathcal{A}_q$ можно отождествить с положительной борелевской подалгеброй в квантовой аффинной алгебре $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$.

В случае необходимости размерности наборов (т.е. количество элементов в наборах) будут явно указаны в специальных комментариях после формул. Если набор переменных умножается на число α (в частности, $\bar{u}q^{\pm 2}$), то это означает, что все элементы набора умножены на это число:

$$\alpha \bar{u} = \{\alpha u_1, \dots, \alpha u_a\}, \quad \bar{v}q^{\pm 2} = \{v_1q^{\pm 2}, \dots, v_bq^{\pm 2}\}.$$

Объединение наборов будем обозначать фигурными скобками, например $\{\bar{w}, \bar{u}\} = \bar{\eta}$. Разбиение наборов на непересекающиеся подмножества обозначим символом $\Rightarrow$ и будем нумеровать подмножества римскими цифрами. Например, запись $\bar{u} \Rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}$ означает, что набор $\bar{u}$ разбит на два подмножества $\bar{u}_I$ и $\bar{u}_{II}$ такие, что $\bar{u}_I \cap \bar{u}_{II} = \emptyset$ и $\{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\} = \bar{u}$. Аналогично $\bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}, \bar{\eta}_{III}\}$ означает разбиение набора $\bar{\eta}$ на три попарно непересекающихся подмножества, так что $\{\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}, \bar{\eta}_{III}\} = \bar{\eta}$. Если количество таких подмножеств будет очень большим, мы будем использовать арабскую нумерацию подмножеств. Такие случаи будут специально оговариваться.

Как и в работе [5], мы будем использовать сокращенные обозначения для произведений по наборам переменных:

$$T_{ij}(\bar{w}) = \prod_{w_k \in \bar{w}} T_{ij}(w_k), \quad \lambda_2(\bar{u}) = \prod_{u_j \in \bar{u}} \lambda_2(u_j), \quad r_k(\bar{v}) = \prod_{v_j \in \bar{v}} r_k(v_j),$$

где $r_k(w) = \lambda_k(w)/\lambda_2(w)$, $k = 1, 3$. Таким образом, если оператор T_{ij} или функции λ_i и r_k зависят от набора переменных, то это означает произведение операторов или скалярных функций по соответствующему набору. Аналогичное соглашение будет применяться также к произведениям функций $f(u, v)$:

$$f(u, \bar{w}) = \prod_{w_j \in \bar{w}} f(u, w_j), \quad f(\bar{u}, \bar{v}) = \prod_{u_j \in \bar{u}} \prod_{v_k \in \bar{v}} f(u_j, v_k). \quad (2.4)$$

Центральным объектом теории скалярных произведений в моделях, основанных на группе $GL(2)$, является детерминант Изергина $K_k(\bar{x}|\bar{y})$ [30]. Этот детерминант также играет важную роль в случае моделей с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей. Детерминант Изергина определен для двух наборов переменных $\bar{x}$ и $\bar{y}$ с одинаковым количеством элементов $\#\bar{x} = \#\bar{y} = k$:

$$K_k(\bar{x}|\bar{y}) = \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq k} (qx_i - q^{-1}y_j)}{\prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_i - x_j)(y_j - y_i)} \det \left[\frac{q - q^{-1}}{(x_i - y_j)(qx_i - q^{-1}y_j)} \right]. \quad (2.5)$$

Ниже мы будем использовать также две модификации детерминанта Изергина

$$K_k^{(\ell)}(\bar{x}|\bar{y}) = \left(\prod_{i=1}^k x_i \right) K_k(\bar{x}|\bar{y}), \quad K_k^{(r)}(\bar{x}|\bar{y}) = \left(\prod_{i=1}^k y_i \right) K_k(\bar{x}|\bar{y}), \quad (2.6)$$

которые будем называть левым и правым детерминантами Изергина. Некоторые свойства детерминанта Изергина и его модификаций представлены в приложении А.

Наконец, напомним формулы для левого и правого старших коэффициентов скалярных произведений, полученные в работе [5]. Эти рациональные функции зависят от четырех наборов переменных и обозначаются как $Z_{a,b}^{(\ell)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y})$ и $Z_{a,b}^{(r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y})$. Нижние индексы показывают, что $\#\bar{t} = \#\bar{x} = a$ и $\#\bar{s} = \#\bar{y} = b$. Оба старших коэффициента выражаются через детерминанты Изергина:

$$Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}) = (-q)^{\mp b} \sum K_b^{(r,\ell)}(\bar{s}|\bar{w}_1q^2) K_a^{(\ell,r)}(\bar{w}_{II}|\bar{t}) K_b^{(\ell,r)}(\bar{y}|\bar{w}_I) f(\bar{w}_I, \bar{w}_{II}). \quad (2.7)$$

Здесь $\bar{w} = \{\bar{s}, \bar{x}\}$. Сумма берется по разбиениям набора $\bar{w} \Rightarrow \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}$ при условиях $\# \bar{w}_I = b$ и $\# \bar{w}_{II} = a$. Напомним, что в соответствии с принятым соглашением (2.4) об обозначениях функция $f(\bar{w}_I, \bar{w}_{II})$ фактически означает двойное произведение функций $f(w_j, w_k)$ по $w_j \in \bar{w}_I$ и $w_k \in \bar{w}_{II}$. Верхние индексы (ℓ, r) у функций $Z_{a,b}$ означают, что формулы (2.7) справедливы для обоих старших коэффициентов $Z_{a,b}^{(\ell)}$ и $Z_{a,b}^{(r)}$ по отдельности. Выбирая первый или второй индекс в паре (ℓ, r) и соответствующий (верхний или нижний) знак показателя степени $(-q)^{\mp b}$ в этом равенстве, мы получим представление либо для $Z_{a,b}^{(\ell)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y})$, либо для $Z_{a,b}^{(r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y})$. Некоторые свойства старших коэффициентов собраны в приложении Б.

3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ БЕТЕ

Напомним, что элементы матрицы монодромии действуют в пространстве V с вектором старшего веса $|0\rangle \in V$. Другие векторы пространства V можно получить, последовательно действуя повышающими операторами $T_{12}(u)$, $T_{23}(u)$, $T_{13}(u)$ на вектор $|0\rangle$. Среди всех векторов этого пространства наиболее важную роль играют векторы Бете. Метод построения векторов Бете был впервые сформулирован в работе [31] в рамках иерархического алгебраического анзаца Бете (см. также работы [32]–[38]). Эти векторы зависят от комплексных переменных, которые называются параметрами Бете. Если эти параметры удовлетворяют системе уравнений Бете (см. статью [31]), то соответствующий вектор становится собственным состоянием трансфер-матрицы $t(u) = \text{tr } T(u)$.

Обозначим векторы Бете как $\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})$. В квантовых интегрируемых моделях с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей они зависят от двух наборов параметров Бете $\bar{u}$ и $\bar{v}$ таких, что $\# \bar{u} = a$, $\# \bar{v} = b$ и $a, b = 0, 1, \dots$.

Дуальные векторы Бете $\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})$ принадлежат дуальному пространству V^* . Они также зависят от двух наборов параметров Бете $\bar{u}$ и $\bar{v}$ таких, что $\# \bar{u} = a$, $\# \bar{v} = b$ и $a, b = 0, 1, \dots$.

Скалярное произведение определяется как

$$S_{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C | \bar{u}^B; \bar{v}^B) = \mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B), \quad (3.1)$$

где все параметры Бете являются комплексными числами в общем положении. Мы добавили верхние индексы C и B к наборам $\bar{u}$, $\bar{v}$, чтобы подчеркнуть, что векторы $\mathbf{C}^{a,b}$ и $\mathbf{B}^{a,b}$ могут зависеть от различных наборов параметров. Основным результатом настоящей работы является формула сумм для скалярных произведений векторов Бете.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Скалярное произведение двух векторов Бете (3.1) задается формулой сумм

$$S_{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C | \bar{u}^B; \bar{v}^B) = \sum \frac{r_1(\bar{u}_I^C) r_1(\bar{u}_I^B) r_3(\bar{v}_{II}^C) r_3(\bar{v}_{II}^B)}{f(\bar{v}^C, \bar{u}^C) f(\bar{v}^B, \bar{u}^B)} W_{\text{part}} \left(\begin{matrix} \bar{u}_{II}^C, \bar{u}_{II}^B, & \bar{u}_I^C, \bar{u}_I^B \\ \bar{v}_I^C, \bar{v}_I^B, & \bar{v}_{II}^C, \bar{v}_{II}^B \end{matrix} \right). \quad (3.2)$$

В этой формуле суммирование происходит по всем разбиениям наборов

$$\begin{aligned} \bar{u}^C &\Rightarrow \{\bar{u}_I^C, \bar{u}_{II}^C\}, & \bar{u}^B &\Rightarrow \{\bar{u}_I^B, \bar{u}_{II}^B\}, \\ \bar{v}^C &\Rightarrow \{\bar{v}_I^C, \bar{v}_{II}^C\}, & \bar{v}^B &\Rightarrow \{\bar{v}_I^B, \bar{v}_{II}^B\} \end{aligned}$$

таким, что $\# \bar{u}_I^C = \# \bar{u}_I^B$ и $\# \bar{v}_I^C = \# \bar{v}_I^B$. Для фиксированного разбиения такого, что $\# \bar{u}_I^C = \# \bar{u}_I^B = k$ и $\# \bar{v}_I^C = \# \bar{v}_I^B = n$ (где $k = 0, 1, \dots, a$ и $n = 0, 1, \dots, b$),

рациональный коэффициент W_{part} имеет вид

$$W_{\text{part}} \left(\begin{array}{cc} \bar{u}_{\Pi}^C, \bar{u}_{\Pi}^B & \bar{u}_I^C, \bar{u}_I^B \\ \bar{v}_I^C, \bar{v}_I^B & \bar{v}_{\Pi}^C, \bar{v}_{\Pi}^B \end{array} \right) = f(\bar{u}_{\Pi}^B, \bar{u}_I^B) f(\bar{u}_I^C, \bar{u}_{\Pi}^C) f(\bar{v}_I^B, \bar{v}_{\Pi}^B) f(\bar{v}_{\Pi}^C, \bar{v}_I^C) f(\bar{v}_I^C, \bar{u}_I^C) f(\bar{v}_{\Pi}^B, \bar{u}_{\Pi}^B) \times \\ \times Z_{a-k,n}^{(\ell)}(\bar{u}_{\Pi}^C; \bar{u}_{\Pi}^B | \bar{v}_I^C; \bar{v}_I^B) Z_{k,b-n}^{(r)}(\bar{u}_I^B; \bar{u}_I^C | \bar{v}_{\Pi}^B; \bar{v}_{\Pi}^C), \quad (3.3)$$

где старшие коэффициенты $Z^{(\ell,r)}$ определяются формулами (2.7).

В работе [5] были найдены рациональные функции W_{part} , отвечающие экстремальным разбиениям:

$$W_{\text{part}} \left(\begin{array}{cc} \bar{u}^C, \bar{u}^B & \emptyset, \emptyset \\ \bar{v}^C, \bar{v}^B & \emptyset, \emptyset \end{array} \right) = Z_{a,b}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \bar{u}^B | \bar{v}^C; \bar{v}^B), \\ W_{\text{part}} \left(\begin{array}{cc} \emptyset, \emptyset & \bar{u}^C, \bar{u}^B \\ \emptyset, \emptyset & \bar{v}^C, \bar{v}^B \end{array} \right) = Z_{a,b}^{(r)}(\bar{u}^B; \bar{u}^C | \bar{v}^B; \bar{v}^C).$$

Предложение 1 задает функции W_{part} для произвольных разбиений наборов параметров Бете. Предложение 1 будет доказано ниже.

4. НЕОБХОДИМЫЕ ФОРМУЛЫ И СООТНОШЕНИЯ

В этом разделе мы опишем необходимые соотношения, которые будут использованы для вычисления скалярных произведений. Как мы уже упоминали, наш способ вычисления основан на явных формулах для дуальных векторов Бете и формулах кратного действия элементов матрицы монодромии на векторы Бете. Пользуясь этими формулами, мы получим представление для скалярного произведения как суммы по разбиениям наборов параметров Бете. Чтобы упростить это представление, мы используем специальный изоморфизм между алгебрами $\mathcal{A}_q$ и $\mathcal{A}_{q^{-1}}$.

4.1. Явное представление дуальных векторов Бете. Мы будем использовать явное представление для дуальных векторов Бете $\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})$, найденное в работе [38]²⁾:

$$\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = \sum \frac{(-q)^k f(\bar{v}_{\Pi}, \bar{v}_I) f(\bar{u}_{\Pi}, \bar{u}_I)}{\lambda_2(\bar{v}_{\Pi}) \lambda_2(\bar{u}) f(\bar{v}_{\Pi}, \bar{u})} \mathbf{K}_k^{(\ell)}(\bar{u}_I | q^2 \bar{v}_I) \langle 0 | T_{32}(\bar{v}_{\Pi}) T_{31}(\bar{u}_I) T_{21}(\bar{u}_{\Pi}), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = \sum \frac{(-q)^{-k} f(\bar{v}_I, \bar{v}_{\Pi}) f(\bar{u}_I, \bar{u}_{\Pi})}{\lambda_2(\bar{v}) \lambda_2(\bar{u}_{\Pi}) f(\bar{v}, \bar{u}_{\Pi})} \mathbf{K}_k^{(r)}(\bar{u}_I | q^2 \bar{v}_I) \langle 0 | T_{21}(\bar{u}_{\Pi}) T_{31}(\bar{v}_I) T_{32}(\bar{v}_{\Pi}). \quad (4.2)$$

Здесь суммирование ведется по всем разбиениям наборов $\bar{u} \Rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{\Pi}\}$ и $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}_I, \bar{v}_{\Pi}\}$ таким, что $\# \bar{u}_I = \# \bar{v}_I = k$, $k = 0, 1, \dots, \min(a, b)$. Для наших целей необходимы оба этих представления. В п. 4.3 будет доказано, что формулы (4.1) и (4.2) связаны изоморфизмом φ между алгебрами $\mathcal{A}_q$ и $\mathcal{A}_{q^{-1}}$.

4.2. Кратное действие операторов T_{ij} на векторы Бете. Чтобы вычислить скалярные произведения, нам понадобятся формулы для кратного действия операторов T_{ij} при $i > j$ на векторы Бете. Эти соотношения были получены в работе [39] (см. также [5]). Здесь мы представим все необходимые формулы, включая некоторые важные частные случаи. В настоящем пункте будут использованы следующие обозначения для наборов: $\{\bar{w}, \bar{u}\} = \bar{\eta}$, $\{\bar{w}, \bar{v}\} = \bar{\xi}$, $\# \bar{w} = n$.

²⁾ Чтобы свести формулы (4.1), (4.2) к формулам из работы [38], следует применить свойство (A.3) к детерминантам Изергина в этих формулах.

- Кратное действие оператора T_{21} . Мы имеем

$$T_{21}(\bar{w})\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = (-q)^n \lambda_2(\bar{w}) \sum r_1(\bar{\eta}_h) f(\bar{\eta}_{\text{II}}, \bar{\eta}_h) f(\bar{\eta}_{\text{II}}, \bar{\eta}_{\text{III}}) f(\bar{\eta}_{\text{III}}, \bar{\eta}_h) \frac{f(\bar{\xi}_{\text{II}}, \bar{\xi}_I)}{f(\bar{\xi}_{\text{II}}, \bar{\eta}_h)} \times \\ \times \mathbf{K}_n^{(r)}(q^{-2}\bar{w}|\bar{\eta}_{\text{II}}) \mathbf{K}_n^{(\ell)}(\bar{\eta}_h|q^2\bar{\xi}_I) \mathbf{K}_n^{(\ell)}(\bar{\xi}_I|q^2\bar{w}) \mathbf{B}^{a-n,b}(\bar{\eta}_{\text{III}}; \bar{\xi}_{\text{II}}). \quad (4.3)$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_h, \bar{\eta}_{\text{II}}, \bar{\eta}_{\text{III}}\}$ при условии $\# \bar{\eta}_h = \# \bar{\eta}_{\text{II}} = n$ и по разбиениям $\bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{\text{II}}\}$ при условии $\# \bar{\xi}_I = n$.

- Кратное действие оператора T_{31} задается равенством

$$T_{31}(\bar{w})\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = \lambda_2(\bar{w}) \sum r_1(\bar{\eta}_{\text{II}}) r_3(\bar{\xi}_I) \times \\ \times \frac{f(\bar{\eta}_h, \bar{\eta}_{\text{II}}) f(\bar{\eta}_h, \bar{\eta}_{\text{III}}) f(\bar{\eta}_{\text{III}}, \bar{\eta}_{\text{II}}) f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{\text{II}}) f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{\text{III}}) f(\bar{\xi}_{\text{III}}, \bar{\xi}_{\text{II}})}{f(\bar{\xi}_I, \bar{\eta}_{\text{II}}) f(\bar{\xi}_I, \bar{\eta}_{\text{III}}) f(\bar{\xi}_{\text{III}}, \bar{\eta}_{\text{II}})} \times \\ \times \mathbf{K}_n^{(r)}(q^{-2}\bar{\eta}_h|\bar{\xi}_I) \mathbf{K}_n^{(\ell)}(\bar{\eta}_{\text{II}}|q^2\bar{\xi}_{\text{II}}) \mathbf{K}_n^{(r)}(q^{-2}\bar{w}|\bar{\eta}_{\text{II}}) \mathbf{K}_n^{(\ell)}(\bar{\xi}_{\text{II}}|q^2\bar{w}) \mathbf{B}^{a-n,b-n}(\bar{\eta}_{\text{III}}; \bar{\xi}_{\text{II}}). \quad (4.4)$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{\text{II}}, \bar{\xi}_{\text{III}}\}$ при условии $\# \bar{\xi}_I = \# \bar{\xi}_{\text{II}} = n$ и по разбиениям $\bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_h, \bar{\eta}_{\text{II}}, \bar{\eta}_{\text{III}}\}$ при условии $\# \bar{\eta}_h = \# \bar{\eta}_{\text{II}} = n$.

Отметим, что в частном случае $a = n$ мы имеем $\bar{\eta}_{\text{III}} = \emptyset$, и тем самым

$$T_{31}(\bar{w})\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = \lambda_2(\bar{w}) \sum r_1(\bar{\eta}_{\text{II}}) r_3(\bar{\xi}_I) \times \\ \times \frac{f(\bar{\eta}_h, \bar{\eta}_{\text{II}}) f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{\text{II}}) f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{\text{III}}) f(\bar{\xi}_{\text{III}}, \bar{\xi}_{\text{II}})}{f(\bar{\xi}_I, \bar{\eta}_{\text{II}}) f(\bar{\xi}_{\text{III}}, \bar{\eta}_{\text{II}})} \times \\ \times \mathbf{K}_n^{(r)}(q^{-2}\bar{\eta}_h|\bar{\xi}_I) \mathbf{K}_n^{(\ell)}(\bar{\eta}_{\text{II}}|q^2\bar{\xi}_{\text{II}}) \mathbf{K}_n^{(r)}(q^{-2}\bar{w}|\bar{\eta}_{\text{II}}) \mathbf{K}_n^{(\ell)}(\bar{\xi}_{\text{II}}|q^2\bar{w}) \mathbf{B}^{0,b-n}(\emptyset; \bar{\xi}_{\text{II}}). \quad (4.5)$$

- Кратное действие оператора T_{32} . Мы имеем

$$T_{32}(\bar{w})\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = (-q)^{-n} \lambda_2(\bar{w}) \sum r_3(\bar{\xi}_I) f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{\text{II}}) f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{\text{III}}) f(\bar{\xi}_{\text{III}}, \bar{\xi}_{\text{II}}) \frac{f(\bar{\eta}_h, \bar{\eta}_{\text{II}})}{f(\bar{\xi}_I, \bar{\eta}_{\text{II}})} \times \\ \times \mathbf{K}_n^{(r)}(q^{-2}\bar{w}|\bar{\eta}_{\text{II}}) \mathbf{K}_n^{(r)}(q^{-2}\bar{\eta}_h|\bar{\xi}_I) \mathbf{K}_n^{(\ell)}(\bar{\xi}_{\text{II}}|q^2\bar{w}) \mathbf{B}^{a,b-n}(\bar{\eta}_{\text{II}}; \bar{\xi}_{\text{III}}). \quad (4.6)$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{\text{II}}, \bar{\xi}_{\text{III}}\}$ при условии $\# \bar{\xi}_I = \# \bar{\xi}_{\text{II}} = n$ и по разбиениям $\bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_h, \bar{\eta}_{\text{II}}\}$ при условии $\# \bar{\eta}_h = n$.

Заметим, что в специальном случае $a = 0$ мы получим, что $\bar{\eta}_h = \bar{w}$ и $\bar{\eta}_{\text{II}} = \emptyset$. Если к тому же $b = n$, то $\bar{\xi}_{\text{III}} = \emptyset$, и тогда мы имеем

$$T_{32}(\bar{w})\mathbf{B}^{0,b}(\emptyset; \bar{v}) = \lambda_2(\bar{w}) \sum r_3(\bar{\xi}_I) f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{\text{II}}) \mathbf{K}_n^{(r)}(q^{-2}\bar{w}|\bar{\xi}_I) \mathbf{K}_n^{(\ell)}(\bar{\xi}_{\text{II}}|q^2\bar{w}) |0\rangle. \quad (4.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Во всех формулах кратного действия мы описывали размерности подмножеств в специальных комментариях. На самом деле в этом нет необходимости, так как количество элементов в подмножествах указано явно во всех этих формулах. Действительно, нижний индекс детерминанта Изергина показывает количество элементов в обоих наборах переменных, от которых он зависит. То есть, например, из формулы (4.3) мы можем заключить, что $\# \bar{\eta}_h = \# \bar{\eta}_{\text{II}} = \# \bar{\xi}_I = \# \bar{w} = n$. В дополнение к этому верхние индексы векторов Бете $\mathbf{B}^{a-n,b}(\bar{\eta}_{\text{III}}; \bar{\xi}_{\text{II}})$ показывают, что $\# \bar{\eta}_{\text{III}} = a - n$ и $\# \bar{\xi}_{\text{II}} = b$. Для удобства читателя в дальнейшем мы продолжим указывать размерности подмножеств. Однако в формулах, содержащих большое количество таких подмножеств, мы будем опускать эти комментарии.

4.3. Изоморфизм между алгебрами $\mathcal{A}_q$ и $\mathcal{A}_{q^{-1}}$. В работе [38] был описан изоморфизм между положительными борелевскими подалгебрами в квантовых аффинных алгебрах $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ и $U_{q^{-1}}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$. Мы обозначим это отображение символом φ . В случае алгебр $\mathcal{A}_q$ и $\mathcal{A}_{q^{-1}}$ отображение φ имеет вид

$$\varphi(T_{i,j}(u)) = \tilde{T}_{4-j,4-i}(u), \quad (4.8)$$

где $T_{i,j}(u) \in \mathcal{A}_q$ и $\tilde{T}_{4-j,4-i}(u) \in \mathcal{A}_{q^{-1}}$. Действие отображения φ на векторах Бете задается формулами (см. работу [38])

$$\varphi(\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})) = \mathbf{B}_{q^{-1}}^{b,a}(\bar{v}; \bar{u}), \quad \varphi(\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})) = \mathbf{C}_{q^{-1}}^{b,a}(\bar{v}; \bar{u}). \quad (4.9)$$

В данном случае мы снабдили вектор Бете и его дуальный вектор дополнительным индексом q^{-1} , чтобы подчеркнуть, что эти векторы построены из элементов алгебры $\mathcal{A}_{q^{-1}}$.

В общем случае отображение φ может быть задано как

$$\varphi(\mathcal{F}(T_{i,j}(u); \lambda_i(u); q)) = \mathcal{F}(\tilde{T}_{4-j,4-i}(u); \tilde{\lambda}_{4-i}(u); q^{-1}), \quad \tilde{\lambda}_i(u) = \langle 0 | \tilde{T}_{ii}(u) | 0 \rangle. \quad (4.10)$$

Здесь $\mathcal{F}$ – некоторый полином от операторов $T_{ij}(u)$, коэффициенты которого могут также зависеть от вакуумных собственных значений $\lambda_i(u)$ и параметра q .

Изоморфизм (4.8) является очень мощным инструментом при изучении скалярных произведений. Мы применим его в п. 6.2. Сейчас мы воспользуемся им, чтобы доказать эквивалентность представлений (4.1) и (4.2) для дуальных векторов Бете.

Начнем с представления (4.1), записанного для алгебры $\mathcal{A}_{q^{-1}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{q^{-1}}^{b,a}(\bar{v}; \bar{u}) &= \sum \frac{(-q)^{-k} f_{q^{-1}}(\bar{u}_{\Pi}, \bar{u}_I) f_{q^{-1}}(\bar{v}_{\Pi}, \bar{v}_I)}{\tilde{\lambda}_2(\bar{u}_{\Pi}) \tilde{\lambda}_2(\bar{v}) f_{q^{-1}}(\bar{u}_{\Pi}, \bar{v})} \times \\ &\times \mathbf{K}_{k,q^{-1}}^{(\ell)}(\bar{v}_I | q^{-2} \bar{u}_I) \langle 0 | \tilde{T}_{32}(\bar{u}_{\Pi}) \tilde{T}_{31}(\bar{v}_I) \tilde{T}_{21}(\bar{v}_{\Pi}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь, как и в формуле (4.9), мы добавили дополнительный индекс q^{-1} к функции f и к детерминанту Изергина. Это означает, что функция $f_{q^{-1}}$ определена соотношением (2.1) с заменой q на q^{-1} . Аналогично $\mathbf{K}_{k,q^{-1}}^{(\ell,r)}$ определены соотношениями (2.6) и (2.5), в которых q заменено на q^{-1} .

Легко проверить, что

$$f_{q^{-1}}(x, y) = f(y, x), \quad \mathbf{K}_{k,q^{-1}}^{(\ell,r)}(\bar{x} | \bar{y}) = \mathbf{K}_k^{(r,\ell)}(\bar{y} | \bar{x}).$$

Тогда формулу (4.11) можно переписать следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})) = \sum \frac{(-q)^{-k} f(\bar{u}_I, \bar{u}_{\Pi}) f(\bar{v}_I, \bar{v}_{\Pi})}{\tilde{\lambda}_2(\bar{u}_{\Pi}) \tilde{\lambda}_2(\bar{v}) f(\bar{v}, \bar{u}_{\Pi})} \mathbf{K}_k^{(r)}(q^{-2} \bar{v}_I | \bar{u}_I) \langle 0 | \tilde{T}_{32}(\bar{u}_{\Pi}) \tilde{T}_{31}(\bar{v}_I) \tilde{T}_{21}(\bar{v}_{\Pi}), \quad (4.12)$$

где были использованы соотношения (4.9).

Применим теперь отображение φ непосредственно к представлению (4.12), пользуясь соотношением (4.10). Отметим, что отображение φ действует только на операторы $\tilde{T}_{ij}$ и вакуумные собственные значения $\tilde{\lambda}_2$. Принимая во внимание, что $\varphi^2 = 1$, получим

$$\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = \sum \frac{(-q)^{-k} f(\bar{u}_I, \bar{u}_{\Pi}) f(\bar{v}_I, \bar{v}_{\Pi})}{\lambda_2(\bar{u}_{\Pi}) \lambda_2(\bar{v}) f(\bar{v}, \bar{u}_{\Pi})} \mathbf{K}_k^{(r)}(\bar{v}_I | \bar{u}_I q^2) \langle 0 | T_{21}(\bar{u}_{\Pi}) T_{31}(\bar{v}_I) T_{32}(\bar{v}_{\Pi}),$$

где использовано равенство $\mathbf{K}_k^{(r)}(q^{-2} \bar{x} | \bar{y}) = \mathbf{K}_k^{(r)}(\bar{x} | \bar{y} q^2)$ (см. свойство (A.1) в приложении A). Таким образом, мы получили представление (4.2).

5. ДЕЙСТВИЕ ПОНИЖАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ НА ВЕКТОР БЕТЕ

Для вычисления скалярного произведения необходимо получить формулы последовательного действия операторов $T_{32}(\bar{z})T_{31}(\bar{y})T_{21}(\bar{x})$ на вектор Бете $\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}, \bar{v})$, где $\bar{z}$, $\bar{y}$, $\bar{x}$, $\bar{u}$ и $\bar{v}$ являются наборами, составленными из произвольных комплексных чисел. Из явного представления (4.1) для дуальных векторов Бете следует, что для нашей цели достаточно рассмотреть случай $\# \bar{y} + \# \bar{x} = \# \bar{u}$ и $\# \bar{y} + \# \bar{z} = \# \bar{v}$. Таким образом, мы можем положить³⁾ $\# \bar{y} = k$, $\# \bar{x} = a - k$ и $\# \bar{z} = b - k$, где $k = 0, 1, \dots, \min(a, b)$.

Для вычисления последовательного кратного действия мы будем пользоваться формулами (4.3), (4.5), (4.7). Нетрудно догадаться, что в конечном результате мы получим сумму по разбиениям исходных наборов переменных на большое количество подмножеств. Поэтому, чтобы избежать громоздких римских цифр, мы будем в этом разделе нумеровать подмножества арабскими цифрами.

5.1. Последовательное действие операторов $T_{31}(\bar{y})T_{21}(\bar{x})$. Пусть

$$S_1 = T_{31}(\bar{y})T_{21}(\bar{x})\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}).$$

Действие произведения операторов $T_{21}(\bar{x})$ задано соотношением (4.3), в котором необходимо положить $\bar{w} = \bar{x}$ и $n = a - k$. В результате мы получим

$$S_1 = (-q)^{a-k} \lambda_2(\bar{x}) T_{31}(\bar{y}) \sum r_1(\bar{\eta}_1) f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_1) f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3) f(\bar{\eta}_3, \bar{\eta}_1) \frac{f(\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_1)}{f(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_1)} \times \\ \times K_{a-k}^{(r)}(q^{-2}\bar{x}|\bar{\eta}_2) K_{a-k}^{(\ell)}(\bar{\eta}_1|q^2\bar{\xi}_1) K_{a-k}^{(\ell)}(\bar{\xi}_1|q^2\bar{x}) \mathbf{B}^{k,b}(\bar{\eta}_3; \bar{\xi}_2), \quad (5.1)$$

где $\bar{\eta} = \{\bar{u}, \bar{x}\}$ и $\bar{\xi} = \{\bar{v}, \bar{x}\}$. Напомним, что здесь суммирование ведется по разбиениям $\bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3\}$ и $\bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2\}$. Количества элементов в подмножествах равны нижним индексам соответствующих детерминантов Изергина или соответствующих верхних индексов векторов Бете (см. замечание 1).

Действие произведения операторов $T_{31}(\bar{y})$ порождает новые разбиения $\{\bar{y}, \bar{\eta}_3\} \Rightarrow \{\bar{\eta}_4, \bar{\eta}_5\}$ и $\{\bar{y}, \bar{\xi}_2\} \Rightarrow \{\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_4, \bar{\xi}_5\}$. Это означает, в частности, что произведение по подмножеству $\bar{\eta}_3$ в соотношении (5.1) может быть переписано следующим образом:

$$f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3) f(\bar{\eta}_3, \bar{\eta}_1) = \frac{f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_4) f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_5) f(\bar{\eta}_5, \bar{\eta}_1) f(\bar{\eta}_4, \bar{\eta}_1)}{f(\bar{\eta}_2, \bar{y}) f(\bar{y}, \bar{\eta}_1)}.$$

Аналогично имеем

$$\frac{f(\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_1)}{f(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_1)} = \frac{f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_1) f(\bar{\xi}_4, \bar{\xi}_1) f(\bar{\xi}_5, \bar{\xi}_1) f(\bar{y}, \bar{\eta}_1)}{f(\bar{\xi}_3, \bar{\eta}_1) f(\bar{\xi}_4, \bar{\eta}_1) f(\bar{\xi}_5, \bar{\eta}_1) f(\bar{y}, \bar{\xi}_1)}.$$

Используя затем соотношение (4.5), получим

$$S_1 = (-q)^{a-k} \lambda_2(\bar{x}) \lambda_2(\bar{y}) \sum r_1(\bar{\eta}_1) r_1(\bar{\eta}_5) r_3(\bar{\xi}_3) \times \\ \times f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_4) f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_1) f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_5) f(\bar{\eta}_4, \bar{\eta}_5) f(\bar{\eta}_4, \bar{\eta}_1) f(\bar{\eta}_5, \bar{\eta}_1) \times \\ \times \frac{f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_4) f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_1) f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_5) f(\bar{\xi}_5, \bar{\xi}_4) f(\bar{\xi}_5, \bar{\xi}_1) f(\bar{\xi}_4, \bar{\xi}_1)}{f(\bar{\xi}_3, \bar{\eta}_1) f(\bar{\xi}_3, \bar{\eta}_5) f(\bar{\xi}_5, \bar{\eta}_1) f(\bar{\xi}_5, \bar{\eta}_5) f(\bar{\xi}_4, \bar{\eta}_1) f(\bar{y}, \bar{\xi}_1) f(\bar{\eta}_2, \bar{y})} \times \\ \times K_{a-k}^{(r)}(q^{-2}\bar{x}|\bar{\eta}_2) K_{a-k}^{(\ell)}(\bar{\eta}_1|q^2\bar{\xi}_1) K_{a-k}^{(\ell)}(\bar{\xi}_1|q^2\bar{x}) \times \\ \times K_k^{(r)}(q^{-2}\bar{\eta}_4|\bar{\xi}_3) K_k^{(\ell)}(\bar{\eta}_5|q^2\bar{\xi}_4) K_k^{(r)}(q^{-2}\bar{y}|\bar{\eta}_4) K_k^{(\ell)}(\bar{\xi}_4|q^2\bar{y}) \mathbf{B}^{0,b-k}(\emptyset; \bar{\xi}_5). \quad (5.2)$$

³⁾ Напомним, что количество элементов в наборах $\bar{u}$ и $\bar{v}$ совпадает с верхними индексами a и b векторов Бете соответственно.

Здесь $\bar{\eta} = \{\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}\}$ и $\bar{\xi} = \{\bar{v}, \bar{x}, \bar{y}\}$, а суммирование ведется по всем разбиениям $\bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3, \bar{\eta}_4, \bar{\eta}_5\}$ и $\bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3, \bar{\xi}_4, \bar{\xi}_5\}$.

Выражение (5.2) можно слегка упростить. Во-первых, положим $\{\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_5\} = \bar{\eta}_6$ и $\{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_4\} = \bar{\xi}_6$. Тогда соотношение (5.2) примет вид

$$\begin{aligned} S_1 = & (-q)^{a-k} \lambda_2(\bar{x}) \lambda_2(\bar{y}) \sum r_1(\bar{\eta}_6) r_3(\bar{\xi}_3) \times \\ & \times \frac{f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_4) f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_6) f(\bar{\eta}_4, \bar{\eta}_6) f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_6) f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_5) f(\bar{\xi}_5, \bar{\xi}_6) f(\bar{\xi}_4, \bar{\xi}_1)}{f(\bar{\xi}_3, \bar{\eta}_6) f(\bar{\xi}_5, \bar{\eta}_6) f(\bar{y}, \bar{\xi}_1) f(\bar{\eta}_2, \bar{y})} \times \\ & \times K_{a-k}^{(r)}(q^{-2}\bar{x}|\bar{\eta}_2) K_{a-k}^{(\ell)}(\bar{\xi}_1|q^2\bar{x}) K_k^{(r)}(q^{-2}\bar{\eta}_4|\bar{\xi}_3) K_k^{(r)}(q^{-2}\bar{y}|\bar{\eta}_4) K_k^{(\ell)}(\bar{\xi}_4|q^2\bar{y}) \times \\ & \times \left\{ \frac{f(\bar{\eta}_5, \bar{\eta}_1)}{f(\bar{\xi}_4, \bar{\eta}_1)} K_{a-k}^{(\ell)}(\bar{\eta}_1|q^2\bar{\xi}_1) K_k^{(\ell)}(\bar{\eta}_5|q^2\bar{\xi}_4) \right\} \mathbf{B}^{0,b-k}(\emptyset; \bar{\xi}_5). \end{aligned}$$

Теперь можно выполнить суммирование по разбиениям $\bar{\eta}_6 \Rightarrow \{\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_5\}$ (см. слагаемые в фигурных скобках в правой части последнего равенства):

$$\begin{aligned} & \sum \frac{f(\bar{\eta}_5, \bar{\eta}_1)}{f(\bar{\xi}_4, \bar{\eta}_1)} K_{a-k}^{(\ell)}(\bar{\eta}_1|q^2\bar{\xi}_1) K_k^{(\ell)}(\bar{\eta}_5|q^2\bar{\xi}_4) = \\ & = (-q)^{-k} \sum \frac{f(\bar{\eta}_5, \bar{\eta}_1)}{f(\bar{\xi}_4, \bar{\eta}_6)} K_{a-k}^{(\ell)}(\bar{\eta}_1|q^2\bar{\xi}_1) K_k^{(r)}(\bar{\xi}_4|\bar{\eta}_5) = K_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_6|q^2\bar{\xi}_6). \end{aligned}$$

Здесь мы сначала преобразовали $K_k^{(\ell)}$ в $K_k^{(r)}$, воспользовавшись формулой (A.3) приложения, и затем применили тождество (A.5). Таким образом, формула для S_1 превращается в

$$\begin{aligned} S_1 = & (-q)^{a-k} \lambda_2(\bar{x}) \lambda_2(\bar{y}) \sum r_1(\bar{\eta}_6) r_3(\bar{\xi}_3) \times \\ & \times \frac{f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_4) f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_6) f(\bar{\eta}_4, \bar{\eta}_6) f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_6) f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_5) f(\bar{\xi}_5, \bar{\xi}_6)}{f(\bar{\xi}_3, \bar{\eta}_6) f(\bar{\xi}_5, \bar{\eta}_6) f(\bar{\eta}_2, \bar{y})} \times \\ & \times K_{a-k}^{(r)}(q^{-2}\bar{x}|\bar{\eta}_2) K_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_6|q^2\bar{\xi}_6) K_k^{(r)}(q^{-2}\bar{\eta}_4|\bar{\xi}_3) K_k^{(r)}(q^{-2}\bar{y}|\bar{\eta}_4) \times \\ & \times \left\{ \frac{f(\bar{\xi}_4, \bar{\xi}_1)}{f(\bar{y}, \bar{\xi}_1)} K_{a-k}^{(\ell)}(\bar{\xi}_1|q^2\bar{x}) K_k^{(\ell)}(\bar{\xi}_4|q^2\bar{y}) \right\} \mathbf{B}^{0,b-k}(\emptyset; \bar{\xi}_5). \end{aligned}$$

Теперь можно вычислить сумму по разбиениям $\bar{\xi}_6 \Rightarrow \{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_4\}$ (см. слагаемые в фигурных скобках):

$$\begin{aligned} & \sum \frac{f(\bar{\xi}_4, \bar{\xi}_1)}{f(\bar{y}, \bar{\xi}_1)} K_{a-k}^{(\ell)}(\bar{\xi}_1|q^2\bar{x}) K_k^{(\ell)}(\bar{\xi}_4|q^2\bar{y}) = \\ & = (-q)^{-k} \sum \frac{f(\bar{\xi}_4, \bar{\xi}_1)}{f(\bar{y}, \bar{\xi}_6)} K_{a-k}^{(\ell)}(\bar{\xi}_1|q^2\bar{x}) K_k^{(r)}(\bar{y}|\bar{\xi}_4) = K_a^{(\ell)}(\bar{\xi}_6|\{q^2\bar{x}, q^2\bar{y}\}). \end{aligned}$$

Мы снова преобразовали $K_k^{(\ell)}$ в $K_k^{(r)}$, используя равенство (A.3), и затем применили соотношение (A.5). Окончательно получим

$$\begin{aligned} S_1 = & (-q)^{a-k} \lambda_2(\bar{x}) \lambda_2(\bar{y}) \sum r_1(\bar{\eta}_6) r_3(\bar{\xi}_3) \times \\ & \times \frac{f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_4) f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_6) f(\bar{\eta}_4, \bar{\eta}_6) f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_5) f(\bar{\xi}_5, \bar{\xi}_6) f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_6)}{f(\bar{\xi}_3, \bar{\eta}_6) f(\bar{\xi}_5, \bar{\eta}_6) f(\bar{\eta}_2, \bar{y})} \times \\ & \times K_a^{(\ell)}(\bar{\xi}_6|\{q^2\bar{x}, q^2\bar{y}\}) K_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_6|q^2\bar{\xi}_6) K_{a-k}^{(r)}(q^{-2}\bar{x}|\bar{\eta}_2) \times \\ & \times K_k^{(r)}(q^{-2}\bar{\eta}_4|\bar{\xi}_3) K_k^{(r)}(q^{-2}\bar{y}|\bar{\eta}_4) \mathbf{B}^{0,b-k}(\emptyset; \bar{\xi}_5). \end{aligned}$$

В последней формуле $\bar{\eta} = \{\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}\}$ и $\bar{\xi} = \{\bar{v}, \bar{x}, \bar{y}\}$, а суммирование ведется по разбиениям $\bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_4, \bar{\eta}_6\}$ и $\bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_5, \bar{\xi}_6\}$. Разбиения являются независимыми, за исключением ограничений на размерности подмножеств, которые определяются индексами детерминантов Изергина и вектора Бете.

5.2. Последовательное действие операторов $T_{32}(\bar{z})T_{31}(\bar{y})T_{21}(\bar{x})$. Для вычисления последовательного действия операторов $T_{32}(\bar{z})T_{31}(\bar{y})T_{21}(\bar{x})$ на вектор Бете необходимо применить произведение операторов $T_{32}(\bar{z})$ к S_1 . Напомним, что $\# \bar{z} = b - k$, следовательно, мы можем использовать соотношение (4.7). Тогда действие оператора $T_{32}(\bar{z})$ даст дополнительную сумму по разбиениям $\{\bar{z}, \bar{\xi}_5\} \Rightarrow \{\bar{\xi}_7, \bar{\xi}_8\}$. В результате мы получим

$$\begin{aligned} T_{32}(\bar{z})S_1 &= (-q)^{a-k} \lambda_2(\bar{x}) \lambda_2(\bar{y}) \lambda_2(\bar{z}) \sum r_1(\bar{\eta}_6) r_3(\bar{\xi}_3) r_3(\bar{\xi}_7) \times \\ &\times \frac{f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_4) f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_6) f(\bar{\eta}_4, \bar{\eta}_6) f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_7) f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_8) f(\bar{\xi}_7, \bar{\xi}_8) f(\bar{\xi}_8, \bar{\xi}_6) f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_6) f(\bar{\xi}_7, \bar{\xi}_6) f(\bar{z}, \bar{\eta}_6)}{f(\bar{\xi}_3, \bar{\eta}_6) f(\bar{\xi}_7, \bar{\eta}_6) f(\bar{\xi}_3, \bar{z}) f(\bar{z}, \bar{\xi}_6) f(\bar{\xi}_8, \bar{\eta}_6) f(\bar{\eta}_2, \bar{y})} \times \\ &\times K_a^{(\ell)}(\bar{\xi}_6 | \{q^2 \bar{x}, q^2 \bar{y}\}) K_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_6 | q^2 \bar{\xi}_6) K_{a-k}^{(r)}(q^{-2} \bar{x} | \bar{\eta}_2) K_k^{(r)}(q^{-2} \bar{\eta}_4 | \bar{\xi}_3) \times \\ &\times K_k^{(r)}(q^{-2} \bar{y} | \bar{\eta}_4) K_{b-k}^{(r)}(q^{-2} \bar{z} | \bar{\xi}_7) K_{b-k}^{(\ell)}(\bar{\xi}_8 | q^2 \bar{z}) |0\rangle. \end{aligned}$$

В этой формуле по-прежнему $\bar{\eta} = \{\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}\}$, однако $\bar{\xi} = \{\bar{v}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$. Суммирование ведется по разбиениям $\bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_4, \bar{\eta}_6\}$ и $\bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_6, \bar{\xi}_7, \bar{\xi}_8\}$.

Теперь мы можем снова частично вычислить сумму по разбиениям. Полагая $\{\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_7\} = \bar{\xi}_9$, мы получаем

$$\begin{aligned} T_{32}(\bar{z})S_1 &= (-q)^{a-k} \lambda_2(\bar{x}) \lambda_2(\bar{y}) \lambda_2(\bar{z}) \sum r_1(\bar{\eta}_6) r_3(\bar{\xi}_9) \times \\ &\times \frac{f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_4) f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_6) f(\bar{\eta}_4, \bar{\eta}_6) f(\bar{\xi}_9, \bar{\xi}_8) f(\bar{\xi}_8, \bar{\xi}_6) f(\bar{\xi}_9, \bar{\xi}_6) f(\bar{z}, \bar{\eta}_6)}{f(\bar{\xi}_9, \bar{\eta}_6) f(\bar{z}, \bar{\xi}_6) f(\bar{\xi}_8, \bar{\eta}_6) f(\bar{\eta}_2, \bar{y})} \times \\ &\times K_a^{(\ell)}(\bar{\xi}_6 | \{q^2 \bar{x}, q^2 \bar{y}\}) K_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_6 | q^2 \bar{\xi}_6) K_{a-k}^{(r)}(q^{-2} \bar{x} | \bar{\eta}_2) K_k^{(r)}(q^{-2} \bar{y} | \bar{\eta}_4) K_{b-k}^{(\ell)}(\bar{\xi}_8 | q^2 \bar{z}) \times \\ &\times \left\{ \frac{f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_7)}{f(\bar{\xi}_3, \bar{z})} K_k^{(r)}(q^{-2} \bar{\eta}_4 | \bar{\xi}_3) K_{b-k}^{(r)}(q^{-2} \bar{z} | \bar{\xi}_7) \right\} |0\rangle. \end{aligned}$$

Тем же способом, что и выше, можно вычислить сумму по разбиениям $\bar{\xi}_9 \Rightarrow \{\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_7\}$ в фигурных скобках:

$$\begin{aligned} \sum \frac{f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_7)}{f(\bar{\xi}_3, \bar{z})} K_k^{(r)}(q^{-2} \bar{\eta}_4 | \bar{\xi}_3) K_{b-k}^{(r)}(q^{-2} \bar{z} | \bar{\xi}_7) &= \\ = (-q)^{b-k} \sum \frac{f(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_7)}{f(\bar{\xi}_9, \bar{z})} K_k^{(r)}(q^{-2} \bar{\eta}_4 | \bar{\xi}_3) K_{b-k}^{(\ell)}(\bar{\xi}_7 | \bar{z}) &= K_b^{(r)}(\{q^{-2} \bar{z}, q^{-2} \bar{\eta}_4\} | \bar{\xi}_9). \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} T_{32}(\bar{z})S_1 &= (-q)^{a-k} \lambda_2(\bar{x}) \lambda_2(\bar{y}) \lambda_2(\bar{z}) \sum r_1(\bar{\eta}_6) r_3(\bar{\xi}_9) \times \\ &\times \frac{f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_4) f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_6) f(\bar{\eta}_4, \bar{\eta}_6) f(\bar{\xi}_9, \bar{\xi}_8) f(\bar{\xi}_8, \bar{\xi}_6) f(\bar{\xi}_9, \bar{\xi}_6) f(\bar{z}, \bar{\eta}_6)}{f(\bar{\xi}_9, \bar{\eta}_6) f(\bar{z}, \bar{\xi}_6) f(\bar{\xi}_8, \bar{\eta}_6) f(\bar{\eta}_2, \bar{y})} \times \\ &\times K_a^{(\ell)}(\bar{\xi}_6 | \{q^2 \bar{x}, q^2 \bar{y}\}) K_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_6 | q^2 \bar{\xi}_6) K_b^{(r)}(\{q^{-2} \bar{z}, q^{-2} \bar{\eta}_4\} | \bar{\xi}_9) \times \\ &\times K_{a-k}^{(r)}(q^{-2} \bar{x} | \bar{\eta}_2) K_k^{(r)}(q^{-2} \bar{y} | \bar{\eta}_4) K_{b-k}^{(\ell)}(\bar{\xi}_8 | q^2 \bar{z}) |0\rangle. \end{aligned} \quad (5.3)$$

На последнем шаге мы перенумеруем подмножества в соотношении (5.3) следующим образом: $\bar{\eta}_6 \rightarrow \bar{\eta}_i$, $\bar{\eta}_2 \rightarrow \bar{\eta}_{ii}$, $\bar{\eta}_4 \rightarrow \bar{\eta}_{iii}$, $\bar{\xi}_9 \rightarrow \bar{\xi}_i$, $\bar{\xi}_6 \rightarrow \bar{\xi}_{ii}$, $\bar{\xi}_8 \rightarrow \bar{\xi}_{iii}$. Положим $\bar{u} = \bar{u}^B$, $\bar{v} = \bar{v}^B$. В результате получим

$$\begin{aligned} T_{32}(\bar{z})T_{31}(\bar{y})T_{21}(\bar{x})\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) &= (-q)^{a-k}\lambda_2(\bar{x})\lambda_2(\bar{y})\lambda_2(\bar{z})\sum r_1(\bar{\eta}_i)r_3(\bar{\xi}_i) \times \\ &\times \frac{f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii})f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_i)f(\bar{\eta}_{iii}, \bar{\eta}_i)f(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_{iii})f(\bar{\xi}_{iii}, \bar{\xi}_{ii})f(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_{ii})f(\bar{z}, \bar{\eta}_i)}{f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)f(\bar{z}, \bar{\xi}_{ii})f(\bar{\xi}_{iii}, \bar{\eta}_i)f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{y})} \times \\ &\times K_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_i|q^2\bar{\xi}_{ii})K_a^{(\ell)}(\bar{\xi}_{ii}|\{q^2\bar{x}, q^2\bar{y}\})K_b^{(r)}(\{q^{-2}\bar{z}, q^{-2}\bar{\eta}_{iii}\}|\bar{\xi}_i) \times \\ &\times K_{a-k}^{(r)}(q^{-2}\bar{x}|\bar{\eta}_{ii})K_k^{(r)}(q^{-2}\bar{y}|\bar{\eta}_{iii})K_{b-k}^{(\ell)}(\bar{\xi}_{iii}|q^2\bar{z}|0). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь

$$\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}^B\} = \bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_i, \bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}\}, \quad \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{v}^B\} = \bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_{ii}, \bar{\xi}_{iii}\}.$$

6. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

6.1. Выражение для скалярного произведения в терминах старших коэффициентов. Формула (5.4) позволяет получить выражение для скалярного произведения векторов Бете (3.1) в виде суммы по разбиениям параметров Бете. Для этого мы выберем представление дуальных векторов Бете в виде (4.1):

$$\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) = \sum \frac{(-q)^k f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{v}_i^C) f(\bar{u}_{ii}^C, \bar{u}_i^C)}{\lambda_2(\bar{v}_{ii}^C) \lambda_2(\bar{u}^C) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{u}^C)} K_k^{(\ell)}(\bar{u}_i^C | q^2 \bar{v}_i^C) \langle 0 | T_{32}(\bar{v}_{ii}^C) T_{31}(\bar{u}_i^C) T_{21}(\bar{u}_{ii}^C). \quad (6.1)$$

Напомним, что здесь сумма берется по разбиениям $\bar{u}^C \Rightarrow \{\bar{u}_i^C, \bar{u}_{ii}^C\}$ и $\bar{v}^C \Rightarrow \{\bar{v}_i^C, \bar{v}_{ii}^C\}$ при условии $\# \bar{u}_i^C = \# \bar{v}_i^C = k$, где $k = 0, 1, \dots, \min(a, b)$. Таким образом, чтобы вычислить скалярное произведение (3.1), необходимо скомбинировать выражение (6.1) с формулой (5.4), положив в ней $\bar{y} = \bar{u}_i^C$, $\bar{x} = \bar{u}_{ii}^C$ и $\bar{z} = \bar{v}_{ii}^C$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{a,b} &= (-q)^a \sum r_1(\bar{\eta}_i) r_3(\bar{\xi}_i) \times \\ &\times \frac{f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}) f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_i) f(\bar{\eta}_{iii}, \bar{\eta}_i) f(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_{iii}) f(\bar{\xi}_{iii}, \bar{\xi}_{ii}) f(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_{ii}) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{\eta}_i) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{v}_i^C)}{f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{\xi}_{ii}) f(\bar{\xi}_{iii}, \bar{\eta}_i) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{u}^C)} \times \\ &\times K_a^{(\ell)}(\bar{\xi}_{ii} | q^2 \bar{u}^C) K_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_i | q^2 \bar{\xi}_{ii}) K_b^{(r)}(\{q^{-2} \bar{v}_{ii}^C, q^{-2} \bar{\eta}_{iii}\} | \bar{\xi}_i) K_{b-k}^{(\ell)}(\bar{\xi}_{iii} | q^2 \bar{v}_{ii}^C) \times \\ &\times \left\{ \frac{f(\bar{u}_{ii}^C, \bar{u}_i^C)}{f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{u}_i^C)} K_{a-k}^{(r)}(q^{-2} \bar{u}_{ii}^C | \bar{\eta}_{ii}) K_k^{(r)}(q^{-2} \bar{u}_i^C | \bar{\eta}_{iii}) K_k^{(\ell)}(\bar{u}_i^C | q^2 \bar{v}_i^C) \right\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Напомним, что в этой формуле

$$\{\bar{u}^C, \bar{u}^B\} = \bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_i, \bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}\}, \quad \{\bar{u}^C, \bar{v}_{ii}^C, \bar{v}^B\} = \bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_{ii}, \bar{\xi}_{iii}\}.$$

Аргументы скалярного произведения $S_{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C | \bar{u}^B; \bar{v}^B)$ в левой части равенства (6.2) опущены для краткости.

Теперь выражение для скалярного произведения (6.2) можно упростить. В частности, можно применить соотношения (A.3) и (B.1) к слагаемым в фигурных скобках в формуле (6.2), чтобы вычислить сумму по разбиениям $\bar{u}^C \Rightarrow \{\bar{u}_i^C, \bar{u}_{ii}^C\}$:

$$\begin{aligned} \sum \frac{f(\bar{u}_{ii}^C, \bar{u}_i^C)}{f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{u}_i^C)} K_k^{(r)}(q^{-2} \bar{u}_i^C | \bar{\eta}_{iii}) K_k^{(\ell)}(\bar{u}_i^C | q^2 \bar{v}_i^C) K_{a-k}^{(r)}(q^{-2} \bar{u}_{ii}^C | \bar{\eta}_{ii}) &= \\ &= (-q)^{a-k} \sum \frac{f(\bar{u}_{ii}^C, \bar{u}_i^C)}{f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{u}^C)} K_k^{(r)}(\bar{u}_i^C | q^2 \bar{\eta}_{iii}) K_k^{(\ell)}(\bar{u}_i^C | q^2 \bar{v}_i^C) K_{a-k}^{(\ell)}(\bar{\eta}_{ii} | \bar{u}_{ii}^C) = \\ &= \frac{(-q)^a Z_{a,k}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \{\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}\} | \bar{v}_i^C; q^{-2} \bar{\eta}_{iii})}{f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{u}^C) f(\bar{\eta}_{iii}, \bar{u}^C) f(\bar{v}_i^C, \bar{u}^C)}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
 S_{a,b} &= \frac{(-q)^{2a}}{f(\bar{v}^C, \bar{u}^C)} \sum r_1(\bar{\eta}_i) r_3(\bar{\xi}_i) \times \\
 &\times \frac{f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}) f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_i) f(\bar{\eta}_{iii}, \bar{\eta}_i) f(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_{iii}) f(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_{ii}) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{\eta}_i) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{v}_i^C)}{f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i) f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{u}^C) f(\bar{\eta}_{iii}, \bar{u}^C)} \times \\
 &\times Z_{a,k}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \{\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}\} | \bar{v}_i^C; q^{-2} \bar{\eta}_{iii}) K_b^{(r)}(\{q^{-2} \bar{v}_{ii}^C, q^{-2} \bar{\eta}_{iii}\} | \bar{\xi}_i) \times \\
 &\times \left\{ \frac{f(\bar{\xi}_{iii}, \bar{\xi}_{ii})}{f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{\xi}_{ii}) f(\bar{\xi}_{iii}, \bar{\eta}_i)} K_a^{(\ell)}(\bar{\xi}_{ii} | q^2 \bar{u}^C) K_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_i | q^2 \bar{\xi}_{ii}) K_{b-k}^{(\ell)}(\bar{\xi}_{iii} | q^2 \bar{v}_{ii}^C) \right\}.
 \end{aligned}$$

Аналогично можно вычислить сумму слагаемых в фигурных скобках, суммируя по разбиениям $\bar{\xi}_{ii}$ и $\bar{\xi}_{iii}$. Действительно, в силу соотношений (A.3) и (B.1) имеем

$$\begin{aligned}
 &\sum \frac{f(\bar{\xi}_{iii}, \bar{\xi}_{ii})}{f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{\xi}_{ii}) f(\bar{\xi}_{iii}, \bar{\eta}_i)} K_a^{(\ell)}(\bar{\xi}_{ii} | q^2 \bar{u}^C) K_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_i | q^2 \bar{\xi}_{ii}) K_{b-k}^{(\ell)}(\bar{\xi}_{iii} | q^2 \bar{v}_{ii}^C) = \\
 &= (-q)^{k-b-a} \sum \frac{f(\bar{\xi}_{iii}, \bar{\xi}_{ii})}{f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{\xi}_0) f(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_i)} K_a^{(\ell)}(\bar{\xi}_{ii} | q^2 \bar{u}^C) K_a^{(r)}(\bar{\xi}_{ii} | \bar{\eta}_i) K_{b-k}^{(r)}(\bar{v}_{ii}^C | \bar{\xi}_{iii}) = \\
 &= (-q)^{k-b-2a} \frac{Z_{a+b-k,a}^{(r)}(\bar{\xi}_0; \{\bar{v}_{ii}^C, \bar{u}^C\} | q^{-2} \bar{\eta}_i; q^{-2} \bar{u}^C)}{f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{\xi}_0) f(\bar{u}^C, \bar{\xi}_0)},
 \end{aligned}$$

где $\bar{\xi}_0 = \{\bar{\xi}_{ii}, \bar{\xi}_{iii}\}$. Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned}
 S_{a,b} &= \sum \frac{(-q)^{k-b}}{f(\bar{v}^C, \bar{u}^C)} r_1(\bar{\eta}_i) r_3(\bar{\xi}_i) \frac{f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}) f(\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_i) f(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_0) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{\eta}_i) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{v}_i^C)}{f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i) f(\bar{\eta}_0, \bar{u}^C) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{\xi}_0) f(\bar{u}^C, \bar{\xi}_0)} \times \\
 &\times K_b^{(r)}(\{q^{-2} \bar{v}_{ii}^C, q^{-2} \bar{\eta}_{iii}\} | \bar{\xi}_i) Z_{a,k}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \bar{\eta}_0 | \bar{v}_i^C; q^{-2} \bar{\eta}_{iii}) Z_{a+b-k,a}^{(r)}(\bar{\xi}_0; \{\bar{v}_{ii}^C, \bar{u}^C\} | q^{-2} \bar{\eta}_i; q^{-2} \bar{u}^C),
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

где $\bar{\eta}_0 = \{\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Строго говоря, наборы $\bar{\eta}$ и $\bar{\xi}$ в (6.3) необходимо понимать в следующем смысле:

$$\bar{\eta} = \{\bar{u}^B + \epsilon, \bar{u}^C + \epsilon\}, \quad \bar{\xi} = \{\bar{u}^C + \epsilon, \bar{v}^B + \epsilon, \bar{v}_{ii}^C + \epsilon\} \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0.$$

Дело в том, что отдельные сомножители в формуле (6.3) могут иметь сингулярности, если положить $\epsilon = 0$. Например, старший коэффициент $Z_{a,k}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \bar{\eta}_0 | \bar{v}_{ii}^C; q^{-2} \bar{\eta}_{iii})$ является сингулярным, если $\bar{\eta}_0 \cap \bar{u}^C \neq \emptyset$ (см. формулу (B.3) приложения). Эти сингулярности, конечно, компенсируются произведением $f^{-1}(\bar{\eta}_0, \bar{u}^C)$, но для вычисления этого предела необходимо иметь $\epsilon \neq 0$. Чтобы не загромождать формулы, мы не пишем вспомогательный параметр ϵ явным образом, но его надо иметь в виду, выполняя вычисления.

Выражение (6.3) уже дает ответ для скалярного произведения векторов Бете в виде суммы по разбиениям параметров Бете. Однако в таком виде оно крайне неудобно для дальнейших применений. В частности, оно содержит много слагаемых, которые фактически сокращаются друг с другом. Ниже мы упростим эту формулу, выполнив несколько редукций старших коэффициентов.

6.2. Первая редукция старших коэффициентов. Первое упрощение соотношения (6.3) основано на следующем утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Подмножество $\bar{\xi}_i$ в соотношении (6.3) не содержит элементов из набора $\bar{u}^C$, т. е. $\bar{\xi}_i \cap \bar{u}^C = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление скалярного произведения (6.3) может быть переписано в следующем виде:

$$S_{a,b} \equiv \mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) = \sum r_1(\bar{\eta}_i) r_3(\bar{\xi}_i) W_{\text{part}}(\bar{\eta}; \bar{\xi}; q), \quad (6.4)$$

где $W_{\text{part}}(\bar{\eta}; \bar{\xi}; q)$ является рациональной функцией, зависящей от разбиений. В данный момент точный вид этой функции несуществен, однако W_{part} зависит от параметра q , что указано явно в списке аргументов этой функции. Сумма берется по разбиениям наборов $\bar{\eta} = \{\bar{u}^B, \bar{u}^C\}$ и $\bar{\xi} = \{\bar{u}^C, \bar{v}^B, \bar{v}_i^C\}$.

Мы можем применить изоморфизм φ к равенству (6.4). В силу (4.10) надо просто сделать замену $r_1 \leftrightarrow r_3$ в правой части этого соотношения:

$$\varphi(S_{a,b}) = \sum r_3(\bar{\eta}_i) r_1(\bar{\xi}_i) W_{\text{part}}(\bar{\eta}; \bar{\xi}; q).$$

С другой стороны, благодаря определению (4.9) в левой части равенства мы получим

$$\varphi(S_{a,b}) = \varphi(\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C)) \varphi(\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B)) = \mathbf{C}_{q^{-1}}^{b,a}(\bar{v}^C; \bar{u}^C) \mathbf{B}_{q^{-1}}^{b,a}(\bar{v}^B; \bar{u}^B). \quad (6.5)$$

Вычисляя скалярное произведение в (6.5) с использованием (6.4), получим

$$\varphi(S_{a,b}) = \sum r_1(\bar{\eta}'_i) r_3(\bar{\xi}'_i) W_{\text{part}}(\bar{\eta}'; \bar{\xi}'; q^{-1}),$$

где теперь сумма берется по разбиениям наборов $\bar{\eta}' = \{\bar{v}^B, \bar{v}^C\}$ и $\bar{\xi}' = \{\bar{v}^C, \bar{u}^B, \bar{u}_i^C\}$. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\sum r_1(\bar{\eta}'_i) r_3(\bar{\xi}'_i) W_{\text{part}}(\bar{\eta}'; \bar{\xi}'; q^{-1}) = \sum r_3(\bar{\eta}_i) r_1(\bar{\xi}_i) W_{\text{part}}(\bar{\eta}; \bar{\xi}; q).$$

Так как r_1 и r_3 являются свободными функциональными параметрами, мы заключаем, что для произвольного подмножества $\bar{\eta}'_i \subset \bar{\eta}'$ существует подмножество $\bar{\xi}_i \subset \bar{\xi}$ такое, что $\bar{\eta}'_i = \bar{\xi}_i$, и наоборот. Но $\bar{\eta}'_i \subset \{\bar{v}^B, \bar{v}^C\}$, следовательно, $\bar{\xi}_i \subset \{\bar{v}^B, \bar{v}^C\}$, что означает $\bar{\xi}_i \cap \bar{u}^C = \emptyset$. Предложение доказано.

В силу предложения 2, если $\bar{\xi}_i \cap \bar{u}^C \neq \emptyset$, то соответствующие слагаемые в сумме (6.3) исчезают. Таким образом, $\bar{u}^C \subset \bar{\xi}_0$, и можно положить $\bar{\xi}_0 = \{\bar{\xi}_{ii}, \bar{u}^C\}$ и $\{\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_{ii}\} = \bar{\xi} = \{\bar{v}^B, \bar{v}_i^C\}$. Тогда мы получаем возможность упростить старший коэффициент $Z_{a+b-k,a}^{(r)}$, используя свойства (Б.3) и (Б.5):

$$\begin{aligned} & \frac{Z_{a+b-k,a}^{(r)}(\{\bar{\xi}_{ii}, \bar{u}^C\}; \{\bar{v}_{ii}^C, \bar{u}^C\} | q^{-2}\bar{\eta}_i; q^{-2}\bar{u}^C)}{f(\bar{\xi}_0, \bar{u}^C)} = \\ & = \frac{f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{u}^C)}{f(\bar{u}^C, \bar{\eta}_i)} Z_{b-k,a}^{(r)}(\bar{\xi}_{ii}; \bar{v}_{ii}^C | q^{-2}\bar{\eta}_i; q^{-2}\bar{u}^C) = \frac{Z_{a,b-k}^{(r)}(\bar{\eta}_i; \bar{u}^C | \bar{\xi}_{ii}; \bar{v}_{ii}^C)}{f(\bar{u}^C, \bar{\eta}_i) f(\bar{\xi}_{ii}, \bar{\eta}_i)}. \end{aligned}$$

Тем самым равенство (6.3) переходит в

$$\begin{aligned} S_{a,b} = & \sum \frac{(-q)^{k-b}}{f(\bar{v}^C, \bar{u}^C)} r_1(\bar{\eta}_i) r_3(\bar{\xi}_i) \frac{f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}) f(\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_i) f(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_{ii}) f(\bar{\xi}_i, \bar{u}^C) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{v}_i^C)}{f(\bar{v}^B, \bar{\eta}_i) f(\bar{\eta}_0, \bar{u}^C) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{u}^C) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{\xi}_{ii}) f(\bar{u}^C, \bar{\eta}_i)} \times \\ & \times K_b^{(r)}(\{q^{-2}\bar{v}_{ii}^C, q^{-2}\bar{\eta}_{iii}\} | \bar{\xi}_i) Z_{a,k}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \bar{\eta}_0 | \bar{v}_i^C; q^{-2}\bar{\eta}_{iii}) Z_{a,b-k}^{(r)}(\bar{\eta}_i; \bar{u}^C | \bar{\xi}_{ii}; \bar{v}_{ii}^C), \quad (6.6) \end{aligned}$$

где мы учли, что $\{\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_{ii}\} = \{\bar{v}^B, \bar{v}_{ii}^C\}$.

6.3. Второе упрощение. Для дальнейшего упрощения необходимо вернуться к описанию подмножеств $\bar{\eta}_k$ и $\bar{\xi}_k$ через исходные переменные. Напоминаем, что суммирование в соотношении (6.6) проводится по разбиениям $\{\bar{v}^B, \bar{v}_{ii}^C\} \Rightarrow \{\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_{ii}\}$ и разбиениям $\{\bar{u}^C, \bar{u}^B\} \Rightarrow \{\bar{\eta}_i, \bar{\eta}_0\}$, а затем по разбиениям $\bar{\eta}_0 \Rightarrow \{\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}\}$.

Положим

$$\bar{\eta}_i = \{\bar{u}_i^B, \bar{u}_{ii}^C\}, \quad \bar{\eta}_0 = \{\bar{u}_{ii}^B, \bar{u}_i^C\},$$

где $\# \bar{u}_i^C = \# \bar{u}_i^B = n$, $n = 0, 1, \dots, a$. Обращаем внимание читателя, что мы не конкретизируем подмножества $\bar{\eta}_{ii}$ и $\bar{\eta}_{iii}$, однако $\{\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}\} = \{\bar{u}_{ii}^B, \bar{u}_i^C\}$.

Разбиения наборов $\bar{v}^B$ и $\bar{v}^C$ являются более сложными. Мы начнем с набора $\bar{v}^C$, который появляется в соотношении (6.6) как $\bar{v}^C \Rightarrow \{\bar{v}_i^C, \bar{v}_{ii}^C\}$, где $\# \bar{v}_i^C = k$. Сначала мы разобьем набор $\bar{v}_{ii}^C$ на дополнительные подмножества:

$$\bar{v}_{ii}^C \Rightarrow \{\bar{v}_{ii}^C, \bar{v}_0^C\}, \quad \# \bar{v}_{ii}^C = b - m, \quad m = 0, 1, \dots, b - k.$$

Затем мы определим подмножество $\bar{v}_i^C$ такое, что $\{\bar{v}_i^C, \bar{v}_{ii}^C\} = \bar{v}^C$. Очевидно, что $\# \bar{v}_i^C = m$ и $\bar{v}_i^C = \{\bar{v}_i^C, \bar{v}_0^C\}$. Наконец, мы проведем разбиение $\bar{v}^B \Rightarrow \{\bar{v}_i^B, \bar{v}_{ii}^B\}$ при условии $\# \bar{v}_i^B = m$ и положим

$$\bar{\xi}_i = \{\bar{v}_i^B, \bar{v}_{ii}^C\}, \quad \bar{\xi}_{ii} = \{\bar{v}_{ii}^B, \bar{v}_0^C\}.$$

Тем самым

$$\begin{aligned} \bar{v}_{ii}^C &= \{\bar{v}_{ii}^C, \bar{v}_0^C\}, & \# \bar{v}_i^C &= \# \bar{v}_i^B = m, & \# \bar{v}_i^C &= k, \\ \bar{v}_i^C &= \bar{v}_i^C \setminus \bar{v}_0^C, & \# \bar{v}_{ii}^C &= \# \bar{v}_{ii}^B = b - m, & \# \bar{v}_0^C &= m - k. \end{aligned}$$

Применим теперь свойство (Б.3) к старшему коэффициенту $Z_{a,k}^{(\ell)}$:

$$\frac{Z_{a,k}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \bar{\eta}_0 | \bar{v}_i^C; q^{-2} \bar{\eta}_{iii})}{f(\bar{\eta}_0, \bar{u}^C)} = \frac{f(\bar{v}_i^C, \bar{u}_i^C)}{f(\bar{u}_{ii}^B, \bar{u}_{ii}^C)} Z_{a-n,k}^{(\ell)}(\bar{u}_{ii}^C; \bar{u}_{ii}^B | \bar{v}_i^C; q^{-2} \bar{\eta}_{iii}). \quad (6.7)$$

Для упрощения $Z_{a,b-k}^{(r)}$ воспользуемся последовательно соотношением (Б.3), а затем формулой (Б.4), получим

$$\frac{Z_{a,b-k}^{(r)}(\bar{\eta}_i; \bar{u}_i^C | \bar{\xi}_{ii}; \bar{v}_{ii}^C)}{f(\bar{u}^C, \bar{\eta}_i) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{\xi}_{ii})} = \frac{f(\bar{v}_{ii}^B, \bar{u}_{ii}^C) f(\bar{v}_0^C, \bar{u}_i^C)}{f(\bar{u}_i^C, \bar{u}_i^B) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{v}_{ii}^B)} Z_{n,b-m}^{(r)}(\bar{u}_i^B; \bar{u}_i^C | \bar{v}_{ii}^B; \bar{v}_{ii}^C). \quad (6.8)$$

Наконец, благодаря свойству (А.2) мы имеем

$$K_b^{(r)}(\{q^{-2} \bar{v}_{ii}^C, q^{-2} \bar{\eta}_{iii}\} | \bar{\xi}_i) = (-q)^{b-m} K_m^{(r)}(\{q^{-2} \bar{v}_0^C, q^{-2} \bar{\eta}_{iii}\} | \bar{v}_i^B). \quad (6.9)$$

Теперь необходимо подставить формулы (6.7)–(6.9) в равенство (6.6). После некоторых элементарных, но достаточно громоздких преобразований получим

$$\begin{aligned} S_{a,b} &= \frac{1}{f(\bar{v}^C, \bar{u}^C) f(\bar{v}^B, \bar{u}^B)} \sum r_1(\bar{u}_i^B) r_1(\bar{u}_{ii}^C) r_3(\bar{v}_i^B) r_3(\bar{v}_{ii}^C) \times \\ &\times f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}) f(\bar{v}_0^C, \bar{v}_i^C) f(\bar{v}_i^B, \bar{v}_0^C) f(\bar{v}_i^C, \bar{u}_i^C) f(\bar{u}_{ii}^B, \bar{u}_i^B) \times \\ &\times f(\bar{u}_i^C, \bar{u}_{ii}^C) f(\bar{v}_i^B, \bar{v}_{ii}^B) f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{v}_i^C) f(\bar{v}_i^B, \bar{u}_i^C) f(\bar{v}^B, \bar{u}_{ii}^B) \times \\ &\times (-q)^{k-m} Z_{n,b-m}^{(r)}(\bar{u}_i^B; \bar{u}_i^C | \bar{v}_{ii}^B, \bar{v}_{ii}^C) K_m^{(r)}(q^{-2} \bar{v}_0^C, q^{-2} \bar{\eta}_{iii} | \bar{v}_i^B) Z_{a-n,k}^{(\ell)}(\bar{u}_{ii}^C; \bar{u}_{ii}^B | \bar{v}_i^C; q^{-2} \bar{\eta}_{iii}). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Напоминаем, что в этом соотношении $\{\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}\} = \{\bar{u}_{ii}^B, \bar{u}_i^C\}$.

Таким образом, скалярное произведение $S_{a,b}$ имеет вид (3.2), где функция W_{part} может быть представлена как

$$W_{\text{part}} \left(\begin{matrix} \bar{u}_{\text{II}}^C, \bar{u}_{\text{II}}^B, & \bar{u}_{\text{I}}^C, \bar{u}_{\text{I}}^B \\ \bar{v}_{\text{I}}^C, \bar{v}_{\text{I}}^B, & \bar{v}_{\text{II}}^C, \bar{v}_{\text{II}}^B \end{matrix} \right) = Z_{n,b-m}^{(r)}(\bar{u}_{\text{I}}^B; \bar{u}_{\text{I}}^C | \bar{v}_{\text{II}}^B; \bar{v}_{\text{II}}^C) \times \\ \times f(\bar{u}_{\text{II}}^B, \bar{u}_{\text{I}}^B) f(\bar{u}_{\text{I}}^C, \bar{u}_{\text{II}}^C) f(\bar{v}_{\text{I}}^B, \bar{v}_{\text{II}}^B) f(\bar{v}_{\text{II}}^C, \bar{v}_{\text{I}}^C) f(\bar{v}_{\text{I}}^B, \bar{u}_{\text{I}}^C) f(\bar{v}_{\text{I}}^C, \bar{u}_{\text{I}}^C) f(\bar{v}_{\text{II}}^B, \bar{u}_{\text{II}}^B) \widetilde{W}.$$

Множитель $\widetilde{W}$ задается суммой по дополнительным разбиениям $\bar{v}_{\text{I}}^C \Rightarrow \{\bar{v}_0^C, \bar{v}_1^C\}$ и $\{\bar{u}_{\text{II}}^B, \bar{u}_{\text{I}}^C\} \Rightarrow \{\bar{\eta}_{\text{II}}, \bar{\eta}_{\text{III}}\}$:

$$\widetilde{W} = \sum (-q)^{k-m} \frac{f(\bar{\eta}_{\text{II}}, \bar{\eta}_{\text{III}}) f(\bar{v}_0^C, \bar{v}_1^C) f(\bar{v}_{\text{I}}^B, \bar{v}_0^C)}{f(\bar{v}_0^C, \bar{u}_{\text{I}}^C)} \times \\ \times K_m^{(r)}(q^{-2} \bar{v}_0^C, q^{-2} \bar{\eta}_{\text{III}} | \bar{v}_{\text{I}}^B) Z_{a-n,k}^{(\ell)}(\bar{u}_{\text{II}}^C; \bar{u}_{\text{II}}^B | \bar{v}_{\text{I}}^C; q^{-2} \bar{\eta}_{\text{III}}). \quad (6.11)$$

Эту сумму можно вычислить, используя следующее тождество.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть a, b, n являются неотрицательными целыми числами, а наборы $\bar{t}, \bar{x}, \bar{s}, \bar{y}, \bar{z}$ составлены из произвольных комплексных чисел, причем $\# \bar{t} = \# \bar{x} = a$, $\# \bar{s} = \# \bar{y} = b$ и $\# \bar{z} = n$. Тогда

$$\frac{Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{y})}{f(\bar{y}, \bar{\eta})} = \sum (-q)^{\mp l} \frac{f(\bar{s}_{\text{I}}, \bar{s}_{\text{II}}) f(\bar{\eta}_{\text{II}}, \bar{\eta}_{\text{I}}) f(\bar{y}, \bar{s}_{\text{I}})}{f(\bar{s}_{\text{I}}, \bar{z})} \times \\ \times K_b^{(r,\ell)}(\{\bar{s}_{\text{I}} q^{-2}, \bar{\eta}_{\text{I}} q^{-2}\} | \bar{y}) Z_{a,b-k}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}_{\text{II}}; \bar{\eta}_{\text{I}} q^{-2}). \quad (6.12)$$

Здесь набор $\bar{\eta}$ является объединением двух наборов: $\bar{\eta} = \{\bar{x}, \bar{z}\}$. Сумма берется по разбиениям набора $\bar{s} \Rightarrow \{\bar{s}_{\text{I}}, \bar{s}_{\text{II}}\}$ при условии $\# \bar{s}_{\text{I}} = l \in [0, 1, \dots, b]$ и разбиениям набора $\bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_{\text{I}}, \bar{\eta}_{\text{II}}\}$ при условии $\# \bar{\eta}_{\text{I}} = b - l$.

Тождество (6.12) было доказано в работе [5]. В приложении В дано еще одно доказательство этого тождества. Легко увидеть, что, выполняя в формуле (6.12) замену переменных

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{\text{I}} &\rightarrow \bar{\eta}_{\text{III}}, & \bar{\eta}_{\text{II}} &\rightarrow \bar{\eta}_{\text{III}}, \\ \bar{s}_{\text{I}} &\rightarrow \bar{v}_0^C, & \bar{s}_{\text{II}} &\rightarrow \bar{v}_1^C, \\ \bar{y} &= \bar{v}_{\text{I}}^B, & \bar{t} &= \bar{u}_{\text{II}}^C, & \bar{x} &= \bar{u}_{\text{II}}^B, & \bar{z} &= \bar{u}_{\text{I}}^C, \\ a &\rightarrow a - n, & l &\rightarrow m - k, & b &\rightarrow m, \end{aligned}$$

мы воспроизведем сумму по разбиениям в формуле (6.11), что даст нам окончательно

$$\widetilde{W} = \frac{Z_{a-n,m}^{(\ell)}(\bar{u}_{\text{II}}^C; \bar{u}_{\text{II}}^B | \bar{v}_{\text{I}}^C; \bar{v}_{\text{I}}^B)}{f(\bar{v}_{\text{I}}^B, \bar{u}_{\text{I}}^C) f(\bar{v}_{\text{I}}^C, \bar{u}_{\text{II}}^B)}. \quad (6.13)$$

Подставляя это соотношение в формулу (6.10), мы получим соотношение (3.3). Таким образом, мы имеем окончательно тригонометрический аналог формулы скалярного произведения векторов Бете, которая получена в работе [26] для моделей с $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью настоящей работы являлось доказательство представления (3.2), (3.3) для скалярных произведений векторов Бете в моделях с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей. Как мы уже упоминали выше, это представление очень похоже на аналогичную формулу, полученную в работе [26]. Основное отличие состоит в том, что рациональная функция W_{part} в соотношении (3.3) зависит от двух различных старших коэффициентов, тогда как в моделях с $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей существует только один старший коэффициент.

Как упомянуто во введении, представление (3.2) не является удобным для его непосредственного применения к исследованию корреляционных функций и формфакторов локальных операторов. Однако следует отметить, что это представление получено в самой общей ситуации, когда параметры Бете обоих векторов являются произвольными комплексными числами. Более того, мы рассматривали собственные значения $\lambda_i(u)$ диагональных элементов $T_{ii}(u)$ матрицы монодромии на векторе старшего веса как произвольные свободные функциональные параметры. В этом случае трудно надеяться на то, что удастся упростить выражение для скалярного произведения. С другой стороны, вычисляя корреляционные функции и формфакторы в конкретной квантовой интегрируемой модели, мы всегда имеем дело со вполне определенным представлением алгебры $\mathcal{A}_q$, что фиксирует вид функций $\lambda_i(u)$. Более того, при вычислениях корреляционных функций необходимо рассматривать частные случаи скалярных произведений, где большая часть параметров Бете удовлетворяют уравнениям Бете. Это позволяет вычислить по крайней мере часть сумм по разбиениям в формуле (3.2). На этом пути открывается возможность получить компактные детерминантные представления для некоторых скалярных произведений и формфакторов элементов матрицы монодромии. Подобные вычисления уже были проделаны в моделях с $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей (см. работы [28], [29]). Следует ожидать, что аналогичные результаты можно также получить из представлений (3.2), (3.3) для скалярного произведения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Свойства детерминантов Изергина

Большинство свойств левого и правого детерминантов Изергина следуют непосредственно из их определений. Ниже мы приводим список этих свойств. Напоминаем, что верхние индексы (ℓ, r) у K означают, что равенство выполняется как для левого $K^{(\ell)}$, так и для правого $K^{(r)}$ детерминантов при соответствующем выборе компонент (первый/верхний или второй/нижний) во всем соотношении.

Начальное условие:

$$K_1^{(\ell)}(\bar{x}|\bar{y}) = xg(x, y), \quad K_1^{(r)}(\bar{x}|\bar{y}) = yg(x, y).$$

Скейлинг:

$$K_n^{(\ell, r)}(\alpha\bar{x}|\alpha\bar{y}) = K_n^{(\ell, r)}(\bar{x}|\bar{y}). \quad (\text{A.1})$$

Редукция:

$$K_{n+1}^{(\ell, r)}(\{\bar{x}, q^{-2}z\}|\{\bar{y}, z\}) = K_{n+1}^{(\ell, r)}(\{\bar{x}, z\}|\{\bar{y}, q^2z\}) = -q^{\mp 1}K_n^{(\ell, r)}(\bar{x}|\bar{y}). \quad (\text{A.2})$$

Обращение порядка аргументов:

$$\mathcal{K}_n^{(\ell,r)}(q^{-2}\bar{x}|\bar{y}) = (-q)^{\mp n} \frac{\mathcal{K}_n^{(r,\ell)}(\bar{y}|\bar{x})}{f(\bar{y}, \bar{x})}, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{K}_{n;q^{-1}}^{(\ell,r)}(\bar{x}|\bar{y}) = \mathcal{K}_{n;q}^{(r,\ell)}(\bar{y}|\bar{x}), \quad (\text{A.4})$$

где $\mathcal{K}_{n;q^{-1}}^{(\ell,r)}$ означает $\mathcal{K}_n^{(\ell,r)}$, в котором q заменено на q^{-1} . Мы добавили дополнительные индексы q^{-1} или q в равенстве (A.4), чтобы подчеркнуть эту замену.

Вычеты в полюсах:

$$\mathcal{K}_{n+1}^{(\ell,r)}(\{\bar{x}, z\}|\{\bar{y}, z'\})|_{z' \rightarrow z} = f(z, z')f(z, \bar{y})f(\bar{x}, z)\mathcal{K}_n^{(\ell,r)}(\bar{x}|\bar{y}) + \text{reg},$$

где reg означает регулярную часть.

Детерминанты Изергина удовлетворяют также тождествам суммирования.

ЛЕММА 1. Пусть $\bar{\gamma}$, $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ суть три набора произвольных комплексных параметров, удовлетворяющих условиям $\#\alpha = m_1$, $\#\beta = m_2$ и $\#\gamma = m_1 + m_2$. Тогда

$$\sum f(\bar{\gamma}_{\text{II}}, \bar{\gamma}_{\text{I}})\mathcal{K}_{m_1}^{(\ell,r)}(\bar{\gamma}_{\text{I}}|\bar{\alpha})\mathcal{K}_{m_2}^{(r,\ell)}(\bar{\beta}|\bar{\gamma}_{\text{II}}) = (-q)^{\mp m_1} f(\bar{\gamma}, \bar{\alpha})\mathcal{K}_{m_1+m_2}^{(r,\ell)}(\{\bar{\alpha}q^{-2}, \bar{\beta}\}|\bar{\gamma}), \quad (\text{A.5})$$

где сумма берется по всем разбиениям множества $\bar{\gamma} \Rightarrow \{\bar{\gamma}_{\text{I}}, \bar{\gamma}_{\text{II}}\}$ при условиях $\#\bar{\gamma}_{\text{I}} = m_1$ и $\#\bar{\gamma}_{\text{II}} = m_2$. Благодаря соотношению (A.3) формула (A.5) может быть также записана в виде

$$\sum f(\bar{\gamma}_{\text{II}}, \bar{\gamma}_{\text{I}})\mathcal{K}_{m_1}^{(\ell,r)}(\bar{\gamma}_{\text{I}}|\bar{\alpha})\mathcal{K}_{m_2}^{(r,\ell)}(\bar{\beta}|\bar{\gamma}_{\text{II}}) = (-q)^{\pm m_2} f(\bar{\beta}, \bar{\gamma})\mathcal{K}_{m_1+m_2}^{(\ell,r)}(\bar{\gamma}|\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}q^2\}).$$

Это утверждение является простым следствием леммы 1 из работы [28].

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Свойства старших коэффициентов $Z_{a,b}$

Доказательства свойств, перечисленных ниже, можно найти в работе [5].

Б.1. Формулы суммирования. Пусть $a \geq b$. Тогда

$$\sum f(\bar{t}_{\text{II}}, \bar{t}_{\text{I}})\mathcal{K}_b^{(r,\ell)}(\bar{t}_{\text{I}}|\bar{y}q^2)\mathcal{K}_b^{(\ell,r)}(\bar{t}_{\text{I}}|\bar{s}q^2)\mathcal{K}_{a-b}^{(\ell,r)}(\bar{\xi}|\bar{t}_{\text{II}}) = (-q)^{\pm b} \frac{Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \{\bar{\xi}, \bar{y}\}|\bar{s}; \bar{y}q^{-2})}{f(\bar{y}, \bar{t})f(\bar{s}, \bar{t})}, \quad (\text{B.1})$$

$$\sum f(\bar{t}_{\text{II}}, \bar{t}_{\text{I}})\mathcal{K}_b^{(\ell,r)}(\bar{t}_{\text{I}}|\bar{y}q^2)\mathcal{K}_b^{(r,\ell)}(\bar{t}_{\text{I}}|\bar{s}q^2)\mathcal{K}_{a-b}^{(\ell,r)}(\bar{\xi}|\bar{t}_{\text{II}}) = (-q)^{\pm b} \frac{Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \{\bar{\xi}, \bar{s}\}|\bar{y}; \bar{s}q^{-2})}{f(\bar{y}, \bar{t})f(\bar{s}, \bar{t})}. \quad (\text{B.2})$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{t} \Rightarrow \{\bar{t}_{\text{I}}, \bar{t}_{\text{II}}\}$ при условии $\#\bar{t}_{\text{I}} = b$.

Б.2. Редукции старших коэффициентов. Пусть $\#\bar{z} = n$. Тогда

$$\lim_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}} \frac{Z_{a+n,b}^{(\ell,r)}(\{\bar{t}, \bar{z}\}; \{\bar{x}, \bar{z}'\}|\bar{s}; \bar{y})}{f(\bar{z}', \bar{z})} = f(\bar{z}, \bar{t})f(\bar{x}, \bar{z})f(\bar{s}, \bar{z})Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}), \quad (\text{B.3})$$

$$\lim_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}} \frac{Z_{a,b+n}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\{\bar{s}, \bar{z}\}; \{\bar{y}, \bar{z}'\})}{f(\bar{z}', \bar{z})} = f(\bar{z}, \bar{x})f(\bar{z}, \bar{s})f(\bar{y}, \bar{z})Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}). \quad (\text{B.4})$$

Б.3. Обращение порядка аргументов. Имеет место следующее равенство:

$$Z_{b,a}^{(\ell,r)}(\bar{s}; \bar{y}|\bar{t}q^{-2}; \bar{x}q^{-2}) = \frac{Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y})}{f(\bar{y}, \bar{x})f(\bar{s}, \bar{t})}. \quad (\text{B.5})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Доказательство предложения 3

Мы начнем доказательство с рассмотрения соотношения (6.6). Положим в нем $\bar{\eta}_i = \bar{u}^C$ и $\bar{\xi}_i = \bar{v}^B$. Отсюда следует, что $\bar{\eta}_0 = \bar{u}^B$ и $\bar{\xi}_{ii} = \bar{v}_{ii}^C$. Мы знаем, что рациональная функция при произведении $r_1(\bar{u}^C)r_3(\bar{v}^B)$ является старшим коэффициентом $Z^{(\ell)}$ (с точностью до нормировки):

$$S_{a,b} = r_1(\bar{u}^C)r_3(\bar{v}^B) \frac{Z_{a,b}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \bar{u}^B | \bar{v}^C; \bar{v}^B)}{f(\bar{v}^C, \bar{u}^C)f(\bar{v}^B, \bar{u}^B)} + \dots,$$

где многоточие означает слагаемые, которые соответствуют всем другим подмножествам $\bar{\eta}_i$ и $\bar{\xi}_i$. С другой стороны, мы по-прежнему имеем сумму по разбиениям $\bar{v}^C \Rightarrow \{\bar{v}_i^C, \bar{v}_{ii}^C\}$ и $\bar{\eta}_0 = \bar{u}^B \Rightarrow \{\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}\}$ в соотношении (6.6). Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} r_1(\bar{u}^C)r_3(\bar{v}^B) \frac{Z_{a,b}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \bar{u}^B | \bar{v}^C; \bar{v}^B)}{f(\bar{v}^C, \bar{u}^C)f(\bar{v}^B, \bar{u}^B)} &= \\ &= \sum (-q)^{k-b} r_1(\bar{u}^C)r_3(\bar{v}^B) \frac{f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii})f(\bar{v}^B, \bar{v}_{ii}^C)f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{v}_i^C)}{f(\bar{v}^C, \bar{u}^C)} \times \\ &\times K_b^{(r)}(\{q^{-2}\bar{v}_{ii}^C, q^{-2}\bar{\eta}_{iii}\} | \bar{v}^B) Z_{a,k}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \bar{u}^B | \bar{v}_i^C; q^{-2}\bar{\eta}_{iii}) \times \\ &\times \lim_{\substack{\bar{\xi}_{ii} \rightarrow \bar{v}_{ii}^C, \\ \bar{\eta}_i \rightarrow \bar{u}^C}} \frac{Z_{a,b-k}^{(r)}(\bar{\eta}_i; \bar{u}^C | \bar{\xi}_{ii}; \bar{v}_{ii}^C)}{f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{u}^C)f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{\xi}_{ii})f(\bar{u}^C, \bar{\eta}_i)}, \end{aligned}$$

где суммирование ведется по разбиениям $\bar{v}^C \Rightarrow \{\bar{v}_i^C, \bar{v}_{ii}^C\}$ и $\bar{u}^B \Rightarrow \{\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii}\}$. В силу свойств (Б.3), (Б.4) мы имеем

$$\lim_{\substack{\bar{\xi}_{ii} \rightarrow \bar{v}_{ii}^C, \\ \bar{\eta}_i \rightarrow \bar{u}^C}} \frac{Z_{a,b-k}^{(r)}(\bar{\eta}_i; \bar{u}^C | \bar{\xi}_{ii}; \bar{v}_{ii}^C)}{f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{u}^C)f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{\xi}_{ii})f(\bar{u}^C, \bar{\eta}_i)} = 1,$$

в результате

$$\begin{aligned} \frac{Z_{a,b}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \bar{u}^B | \bar{v}^C; \bar{v}^B)}{f(\bar{v}^B, \bar{u}^B)} &= \sum (-q)^{k-b} f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii})f(\bar{v}^B, \bar{v}_{ii}^C)f(\bar{v}_{ii}^C, \bar{v}_i^C) \times \\ &\times K_b^{(r)}(\{q^{-2}\bar{v}_{ii}^C, q^{-2}\bar{\eta}_{iii}\} | \bar{v}^B) Z_{a,k}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \bar{u}^B | \bar{v}_i^C; q^{-2}\bar{\eta}_{iii}). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

В этом соотношении легко увидеть частный случай тождества (6.12), который соответствует пустому набору $\bar{z} = \emptyset$.

Чтобы воспроизвести соотношение (6.12) при $\bar{z} \neq \emptyset$, заменим в формуле (Б.1) величину a на $a + n$ и положим в (Б.1)

$$\bar{u}^C = \{\bar{t}, \bar{z}\}, \quad \bar{v}^C = \bar{s}, \quad \bar{u}^B = \{\bar{x}, \bar{z}'\}, \quad \bar{v}^B = \bar{y},$$

где $\#\bar{t} = \#\bar{x} = a$ и $\#\bar{z} = \#\bar{z}' = n$. Как промежуточный результат получим

$$\begin{aligned} \frac{Z_{a+n,b}^{(\ell)}(\{\bar{t}, \bar{z}\}; \{\bar{x}, \bar{z}'\} | \bar{s}; \bar{y})}{f(\bar{y}, \bar{x})f(\bar{y}, \bar{z}')} &= \sum (-q)^{k-b} f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_{iii})f(\bar{y}, \bar{s}_{ii})f(\bar{s}_{ii}, \bar{s}_i) \times \\ &\times K_b^{(r)}(\{q^{-2}\bar{s}_{ii}, q^{-2}\bar{\eta}_{iii}\} | \bar{y}) Z_{a+n,k}^{(\ell)}(\{\bar{t}, \bar{z}\}; \{\bar{x}, \bar{z}'\} | \bar{s}_i; q^{-2}\bar{\eta}_{iii}), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

где сумма берется по разбиениям $\bar{s} \Rightarrow \{\bar{s}_I, \bar{s}_{II}\}$ и $\{\bar{x}, \bar{z}'\} \Rightarrow \{\bar{\eta}_{II}, \bar{\eta}_{III}\}$. Деля обе части равенства (B.2) на $f(\bar{z}', \bar{z})$ и выполняя предельный переход $\bar{z}' \rightarrow \bar{z}$ с помощью свойства (B.3), мы немедленно получаем

$$\frac{Z_{a,b}^{(\ell)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{y})}{f(\bar{y}, \bar{\eta})} = \sum (-q)^{k-b} \frac{f(\bar{\eta}_{II}, \bar{\eta}_{III}) f(\bar{y}, \bar{s}_{II}) f(\bar{s}_{II}, \bar{s}_I)}{f(\bar{s}_{II}, \bar{z})} \times \\ \times \mathsf{K}_b^{(r)}(\{q^{-2}\bar{s}_{II}, q^{-2}\bar{\eta}_{III}\} | \bar{y}) Z_{a,k}^{(\ell)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}_I; q^{-2}\bar{\eta}_{III}),$$

где $\bar{\eta} = \{\bar{x}, \bar{z}\}$. Эта формула совпадает с соотношением (6.12) с точностью до обозначений.

Благодарности. Работа С.З. Пакуляка частично финансово поддержана РФФИ (грант № 14-01-00474) и Программой “Научный фонд НИУ ВШЭ”. Э. Рагуси поддержан проектом ANR DIADEMS (Programme Blanc ANR SIMI1-2010-BLAN-0120-02). Н.А. Славнов поддержан Программой президиума РАН П-19 и РФФИ (гранты № 13-01-12405-офи_м2, 14-01-00860_a).

Список литературы

- [1] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **40**:2 (1979), 194–220.
- [2] L. D. Faddeev, “How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Symétries quantiques [Quantum Symmetries]*, Proceedings of the Les Houches summer school, Session LXIV (Les Houches, France, August 1 – September 8, 1995), eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam, 1998, 149–219, arXiv: hep-th/9605187.
- [3] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *Phys. Lett. A*, **70**:5–6 (1979), 461–463.
- [4] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *УМН*, **34**:5(209) (1979), 13–63.
- [5] С.З. Пакуляк, Э. Рагуси, Н.А. Славнов, *ТМФ*, **178**:3 (2014), 363–389, arXiv: 1311.3500.
- [6] V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **86**:3 (1982), 391–418.
- [7] A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **94**:1 (1984), 67–92.
- [8] V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **94**:1 (1984), 93–113.
- [9] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [10] Н. А. Славнов, *ТМФ*, **79**:2 (1989), 232–240.
- [11] N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **567**:3 (2000), 554–582, arXiv: math-ph/9907019.
- [12] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **641**:3 (2002), 487–518, arXiv: hep-th/0201045.
- [13] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Stat. Mech.*, **04** (2009), P04003, 66 pp., arXiv: 0808.0227.
- [14] F. Göhmann, A. Klümper, A. Seel, *J. Phys. A*, **37**:31 (2004), 7625–7651, arXiv: hep-th/0405089.
- [15] F. Göhmann, A. Klümper, A. Seel, *J. Phys. A*, **38**:9 (2006), 1833–1841, arXiv: cond-mat/0412062.
- [16] A. Seel, T. Bhattacharyya, F. Göhmann, A. Klümper, *J. Stat. Mech.*, **08** (2007), P08030, 10 pp., arXiv: 0705.3569.
- [17] Н. А. Славнов, *ТМФ*, **82**:3 (1990), 389–401.
- [18] A. G. Izergin, N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **554**:3 (1999), 679–696, arXiv: solv-int/9812021.
- [19] N. Kitanine, K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Stat. Mech.*, **05** (2011), P05028, 34 pp., arXiv: 1003.4557.

- [20] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Stat. Mech.*, **12** (2011), P12010, 28 pp., arXiv: 1110.0803.
- [21] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Stat. Mech.*, **09** (2012), P09001, 33 pp., arXiv: 1206.2630.
- [22] J.-S. Caux, J. M. Maillet, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:7 (2005), 077201, 3 pp., arXiv: cond-mat/0502365.
- [23] R. G. Pereira, J. Sirker, J.-S. Caux, R. Hagemans, J. M. Maillet, S. R. White, I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.*, **96**:25 (2006), 257202, 4 pp., arXiv: cond-mat/0603681.
- [24] R. G. Pereira, J. Sirker, J.-S. Caux, R. Hagemans, J. M. Maillet, S. R. White, I. Affleck, *J. Stat. Mech.*, **08** (2007), P08022, 64 pp., arXiv: 0706.4327.
- [25] J.-S. Caux, P. Calabrese, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **01** (2007), P01008, 20 pp., arXiv: cond-mat/0611321.
- [26] Н. Ю. Решетихин, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **150** (1986), 196–213.
- [27] M. Wheeler, *Commun. Math. Phys.*, **327**:3 (2014), 737–777, arXiv: 1204.2089.
- [28] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **10** (2012), P10017, 25 pp., arXiv: 1207.0956.
- [29] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **04** (2013), P04033, 16 pp., arXiv: 1211.3968.
- [30] А. Г. Изергин, *Докл. АН СССР*, **297**:2 (1987), 331–333.
- [31] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, *J. Phys. A*, **16**:16 (1983), L591–L596.
- [32] П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, *ЖЭТФ*, **80**:1 (1981), 214–228.
- [33] П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **120** (1982), 92–121.
- [34] А. Н. Варченко, В. О. Тарасов, *Алгебра и анализ*, **6**:2 (1994), 90–137, arXiv: hep-th/9311040.
- [35] S. Khoroshkin, S. Pakuliak, *J. Math. Kyoto Univ.*, **48**:2 (2008), 277–321, arXiv: 0711.2819.
- [36] B. Enriquez, S. Khoroshkin, S. Pakuliak, *Commun. Math. Phys.*, **276**:3 (2007), 691–725.
- [37] А. Ф. Оськин, С. З. Пакуляк, А. В. Силантьев, *Алгебра и анализ*, **21**:4 (2009), 196–240.
- [38] S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *J. Phys. A*, **47**:10 (2014), 105202, 16 pp., arXiv: 1310.3253.
- [39] S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *SIGMA*, **9** (2013), 058, 23 pp., arXiv: 1304.7602.

Поступила в редакцию 12.02.2014