Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Напалков, А. А. Нуятов, Многоточечная задача
Валле Пуссена для операторов свертки с узлами, задан-
ными в угле, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 2, 264–271

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8654>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:48:27

© 2014 г.

В. В. Напалков*, А. А. Нуятов†

МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ВАЛЛЕ ПУССЕНА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ С УЗЛАМИ, ЗАДАННЫМИ В УГЛЕ

Доказана разрешимость многоточечной задачи Валле Пуссена (задачи интерполяции) в ядре оператора свертки, когда нули характеристической функции и узловые точки, являющиеся нулями целой функции, содержатся внутри некоторых углов.

Ключевые слова: оператор свертки, многоточечная задача Валле Пуссена, интерполяция, пары Фишера.

DOI: 10.4231/tmf8654

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $H(\mathbb{C})$ – пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах, $H^*(\mathbb{C})$ – пространство, сопряженное к $H(\mathbb{C})$, $P_{\mathbb{C}}$ – пространство целых функций экспоненциального роста. Сопоставим функции $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$ функционал $F \in H^*(\mathbb{C})$ такой, что $\hat{F}(z) = \varphi(z)$, где $\hat{F}(z) = \langle F_{\lambda}, e^{\lambda z} \rangle$ – преобразование Лапласа функционала F . Оператор свертки в $H(\mathbb{C})$ запишем в виде

$$M_{\varphi}[f](z) = (F_t, f(z+t)), \quad f \in H(\mathbb{C}).$$

Обозначим через $\text{Ker } M_{\varphi}$ ядро оператора свертки M_{φ} ,

$$\text{Ker } M_{\varphi} = \{f \in H(\mathbb{C}) : M_{\varphi}[f] = 0\}.$$

Многоточечную задачу Валле Пуссена в $\text{Ker } M_{\varphi}$ с узлами μ_j , $j = 1, 2, \dots$, являющимися нулями функции $\psi \in H(\mathbb{C})$, поставим следующим образом: существует ли для произвольной последовательности комплексных чисел a_j , $j = 1, 2, \dots$, функция $y \in \text{Ker } M_{\varphi}$ такая, что $y(\mu_j) = a_j$ для всех $j = 1, 2, \dots$? В работе [1] эта задача решена для случая, когда узлы лежат на вещественной оси. В настоящей статье мы существенно обобщим постановку задачи, а именно будем считать, что узлы лежат в некотором угле, т. е. могут быть комплексными.

*Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: shaig@anrb.ru

†Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия. E-mail: nuyatov1aa@rambler.ru

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Разрешимость многоточечной задачи Валле Пуссена тесно связана с таким понятием, как пары Фишера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пара функций $(\varphi(z), \psi(z))$ называется парой Фишера, если пространство $H(\mathbb{C})$ можно представить в виде

$$H(\mathbb{C}) = \text{Ker } M_\varphi + (\psi), \quad (1)$$

где $(\psi) = \{\psi(\lambda) \cdot R(\lambda) : R(\lambda) \in H(\mathbb{C})\}$ – главный идеал в пространстве $H(\mathbb{C})$. Равенство (1) называется *представление Фишера*.

В работе [2] доказана

ТЕОРЕМА 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *задача Валле Пуссена для оператора M_φ с данными на множестве нулей функции $\psi(z) \in H(\mathbb{C})$ разрешима;*
- 2) *имеет место представление Фишера.*

Выясним, при каких условиях существует представление Фишера, для чего введем ряд вспомогательных понятий.

Топология $\tau_{\mathbb{C}}$ пространства $P_{\mathbb{C}}$ определяется как индуктивный предел нормированных весовых пространств

$$B_n = \left\{ \varphi(\lambda) \in P_{\mathbb{C}} : \|\varphi\|_n = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |\varphi(\lambda)| e^{-n|\lambda|} < \infty \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть $S \subset \mathbb{C}$ – множество единственности в $P_{\mathbb{C}}$. Тогда в $P_{\mathbb{C}}$ можно ввести топологию τ_S индуктивного предела пространств

$$B_{n,S} = \left\{ \varphi(\lambda) \in P_{\mathbb{C}} : \|\varphi\|_{n,S} = \sup_{\lambda \in S} |\varphi(\lambda)| e^{-n|\lambda|} < \infty \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество S называется *секвенциально достаточным* в пространстве $P_{\mathbb{C}}$, если сходимость последовательности $r_m(z) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ в топологии $\tau_{\mathbb{C}}$ эквивалентна сходимости последовательности $r_m(z) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ в топологии τ_S .

Функция $\psi(z) \in H(\mathbb{C})$ порождает (см. работу [3]) в пространстве $P_{\mathbb{C}}$ линейный и непрерывный оператор $M_\psi : P_{\mathbb{C}} \rightarrow P_{\mathbb{C}}$, действующий по правилу

$$M_\psi[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{z\xi} \psi(\xi) \gamma(\xi) d\xi,$$

где $\gamma(\xi)$ – функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$, C – замкнутый контур, охватывающий все особые точки функции $\gamma(\xi)$.

Обозначим через N_φ множество нулей функции $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$. В работе [1] доказана

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$, $\psi \in H(\mathbb{C})$ и множество N_φ является секвенциально достаточным в $\text{Ker } M_\psi$. Тогда имеет место представление Фишера*

$$H(\mathbb{C}) = \text{Ker } M_\varphi + (\psi).$$

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $N_\varphi = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – бесконечное множество нулей функции $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$, каждый нуль повторяется столько раз, какова его кратность; $N_\psi = \{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – бесконечное множество простых нулей функции $\psi \in H(\mathbb{C})$.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что для некоторого фиксированного $\alpha \in [0, +\infty)$ число $\beta \in [0, +\infty)$ таково, что $\alpha\beta < 1$, и при этом выполнены следующие условия:*

1) *имеет место включение $N_\varphi \subset D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leq \alpha \operatorname{Re} z\}$, и существует подпоследовательность λ_{k_s} такая, что*

$$\operatorname{Re} \lambda_{k_s} < \operatorname{Re} \lambda_{k_{s+1}}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (2)$$

2) *имеет место включение $N_\psi \subset D_\beta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leq \beta \operatorname{Re} z\}$, причем*

$$\operatorname{Re} \mu_k < \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \operatorname{Re} \mu_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Тогда N_φ является секвенциально достаточным в $\operatorname{Ker} M_\psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно результату работы [3] пространство $\operatorname{Ker} M_\psi$ состоит из квазиполиномов с показателями из множества N_ψ , другими словами, любой элемент $r(z) \in \operatorname{Ker} M_\psi$ можно записать в виде

$$r(z) = \sum_{j=1}^N C_j e^{\mu_j z}.$$

Пусть последовательность

$$r_m(z) = \sum_{j=1}^{N(m)} C_j(m) e^{\mu_j z}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

стремится к нулю в топологии τ_{N_φ} . По известным свойствам рассматриваемых топологий [4] и с учетом дискретности множества N_φ условие сходимости к нулю в топологии τ_{N_φ} можно записать в следующем виде: для некоторых постоянных $\sigma, M > 0$ выполняются соотношения

$$|r_m(\lambda_k)| \leq M e^{\sigma |\lambda_k|}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

и для любого $k = 1, 2, \dots$ последовательность сходится равномерно на компактных подмножествах N_φ , т. е.

$$|r_m(\lambda_k)| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Требуется показать, что $r_m \rightarrow 0$ в топологии $\tau_{\mathbb{C}}$.

1. Докажем, что при выполнении условия (5) имеет место оценка

$$\operatorname{Re} \mu_j \leq \frac{(1 + \alpha)\sigma}{1 - \alpha\beta}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Проведем доказательство от противного. Пусть для фиксированного m все значения μ_j , $j = 1, \dots, N$, упорядочены по возрастанию реальных частей. Предположим, что

$$\operatorname{Re} \mu_N > \frac{(1 + \alpha)\sigma}{1 - \alpha\beta}. \quad (8)$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{|e^{\mu_j \lambda_k}|}{|e^{\mu_N \lambda_k}|} \leq \frac{e^{(1+\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_j \operatorname{Re} \lambda_k}}{e^{(1-\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_N \operatorname{Re} \lambda_k}} = e^{(1+\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_j \operatorname{Re} \lambda_k - (1-\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_N \operatorname{Re} \lambda_k}. \quad (9)$$

Для $j = 1, \dots, N-1$ в силу условия (3) показатель экспоненты отрицателен, поэтому отношение модулей стремится к нулю при $\operatorname{Re} \lambda_k \rightarrow +\infty$. Из неравенства (9) следует, что

$$\left| \sum_{j=1}^N C_j(m) e^{(\mu_j - \mu_N) \lambda_k} \right| \rightarrow |C_N(m)|, \quad \operatorname{Re} \lambda_k \rightarrow +\infty,$$

поэтому рост квазиполинома определяется величиной μ_N . С другой стороны, рост квазиполинома $r_m(\lambda_k)$ задается с помощью (5). Записав оценки сверху и снизу в (5), получаем цепочку неравенств

$$\left| \sum_{j=1}^N C_j(m) e^{(\mu_j - \mu_N) \lambda_k} \right| e^{(1-\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_N \operatorname{Re} \lambda_k} \leq |r_m(\lambda_k)| \leq M e^{\sigma |\lambda_k|} \leq M e^{\sigma(1+\alpha) \operatorname{Re} \lambda_k}.$$

Рассмотрим крайние элементы неравенства и перепишем данное неравенство как

$$\frac{\left| \sum_{j=1}^N C_j(m) e^{(\mu_j - \mu_N) \lambda_k} \right| e^{(1-\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_N \operatorname{Re} \lambda_k}}{e^{\sigma(1+\alpha) \operatorname{Re} \lambda_k}} \leq M$$

или, что эквивалентно, как

$$\left| \sum_{j=1}^N C_j(m) e^{(\mu_j - \mu_N) \lambda_k} \right| e^{((1-\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_N - \sigma(1+\alpha)) \operatorname{Re} \lambda_k} \leq M. \quad (10)$$

Из неравенства (8) следует, что левая часть неравенства (10) стремится к $+\infty$, когда $\operatorname{Re} \lambda_k \rightarrow +\infty$. Получаем противоречие с тем, что левая часть должна быть ограничена.

Таким образом, $\operatorname{Re} \mu_N \leq (1 + \alpha)\sigma / (1 - \alpha\beta)$. Мы показали, что в представлении (4) участвуют лишь $e^{\mu_j z}$ с показателем μ_j , удовлетворяющим оценке (7). Поскольку μ_j – нули целой функции, показателей, участвующих в представлении (4), конечное число.

2. Докажем далее, что если последовательность квазиполиномов $r_m(z)$ стремится к нулю в топологии τ_{N_φ} , то коэффициенты $C_j(m)$ ограничены, т.е. найдется константа C такая, что $|C_j(m)| \leq C$ для всех $j = 1, \dots, N$ и $m = 1, 2, \dots$. Чтобы не было громоздких обозначений, в дальнейшем под $\lambda_{\tilde{k}}$, $\tilde{k} = 1, 2, \dots$, будем понимать некоторую подпоследовательность последовательности $\{\lambda_i\}_{i=1}^{+\infty}$. Пусть для некоторого $N = N(m)$

$$r_m(\lambda_{\tilde{k}}) = \sum_{j=1}^N C_j(m) e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}}}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Мы воспользуемся простым замечанием, что если набор из N нулей $\lambda_{\tilde{k}_p}$ выбрать так, что определитель матрицы

$$A = (e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_p}}), \quad j, p = 1, 2, \dots, N,$$

отличен от нуля, то коэффициенты $C_j(m)$ являются решением системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^N C_j e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_p}} = r_m(\lambda_{\tilde{k}_p}), \quad p = 1, 2, \dots, N.$$

Докажем по индукции по параметру $t = 1, 2, \dots$, что набор нулей можно выбрать так, что модули определителей матриц

$$A(t) = (e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_p}}), \quad j, p = 1, 2, \dots, t,$$

будут больше единицы. Вначале рассмотрим $t = 1$:

$$|\det A(1)| = e^{\operatorname{Re}(\mu_1 \lambda_{\tilde{k}_1})} \geq e^{(1-\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_1 \operatorname{Re} \lambda_{\tilde{k}_1}} \geq 1.$$

В качестве $\lambda_{\tilde{k}_1}$ можно взять первый элемент последовательности $\lambda_{\tilde{k}}$.

Допустим, что нули $\lambda_{\tilde{k}_p}$, $p = 1, 2, \dots, t-1$, выбраны нужным образом, причем $\operatorname{Re} \lambda_{\tilde{k}_p}$ возрастает по p . Определитель матрицы A_t разложим по последней строке:

$$\det A(t) = \sum_{j=1}^t (-1)^{j+t} \det A_{j,t} e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_t}},$$

где $(-1)^{j+t} \det A_{j,t}$ — алгебраическое дополнение элемента $e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_t}}$. Отсюда

$$|\det A(t)| \geq |\det A_{t,t}| e^{\operatorname{Re}(\mu_t \lambda_{\tilde{k}_t})} - \left| \sum_{j=1}^{t-1} (-1)^{j+t} \det A_{j,t} e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_t}} \right|. \quad (11)$$

Оценим сверху $|\det A_{j,t}|$. Этот определитель есть сумма $(N-1)!$ слагаемых, при этом каждое слагаемое есть произведение $N-1$ множителей вида $e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_p}}$, $j = 1, 2, \dots, t$, $p = 1, 2, \dots, t-1$. Учитывая монотонность наборов μ_j и $\lambda_{\tilde{k}_p}$, получим

$$|\det A_{j,t}| \leq (N-1)! e^{(N-1)(1+\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_t \operatorname{Re} \lambda_{\tilde{k}_{t-1}}}, \quad (12)$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{t-1} (-1)^{j+t} \det A_{j,t} e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_t}} \right| \leq \\ & \leq (N-1)! (N-1) e^{(N-1)(1+\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_t \operatorname{Re} \lambda_{\tilde{k}_{t-1}} + (1+\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_{t-1} \operatorname{Re} \lambda_{\tilde{k}_t}}. \end{aligned}$$

Алгебраическое дополнение $A_{t,t}$ совпадает с определителем матрицы A_{t-1} , и по допущению индукции $\det A_{t-1} \geq 1$. Из неравенства (11) теперь имеем

$$\begin{aligned} |\det A(t)| &\geq \\ &\geq e^{(1-\alpha\beta) \operatorname{Re} \lambda_{\bar{k}_t} \operatorname{Re} \mu_t} (N-1)! (N-1) e^{(N-1)(1+\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_t \operatorname{Re} \lambda_{\bar{k}_{t-1}}} e^{(1+\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_{t-1} \operatorname{Re} \lambda_{\bar{k}_t}} = \\ &= e^{(1-\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_t \operatorname{Re} \lambda_{\bar{k}_t}} [1 - (N-1)! (N-1) e^{(N-1)(1+\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_t \operatorname{Re} \lambda_{\bar{k}_{t-1}}} \times \\ &\times e^{(1+\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_{t-1} \operatorname{Re} \lambda_{\bar{k}_t} - (1-\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_t \operatorname{Re} \lambda_{\bar{k}_t}}]. \end{aligned}$$

В правой части последнего равенства первая экспонента в квадратных скобках является фиксированной величиной, а показатель второй экспоненты в силу условия (3) отрицателен. Таким образом, если действительную часть нуля $\lambda_{\bar{k}_t}$ выбрать достаточно большой, то $\Delta = |\det A(t)|$ будет больше единицы.

В построенном определителе в силу условия (2) нули $\lambda_{\bar{k}_p}$ выбраны таким образом, чтобы не было одинаковых строк. Докажем, что в определителе Δ нет одинаковых столбцов. Возьмем элемент из произвольно выбранной строки и не из последнего столбца, имеем для $i = 1, 2, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} |e^{\mu_i \lambda_{\bar{k}_p}}| &= e^{\operatorname{Re}(\mu_i \lambda_{\bar{k}_p})} \leq e^{(1+\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_i \operatorname{Re} \lambda_{\bar{k}_p}} < e^{(1+\alpha\beta) \frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta} \operatorname{Re} \mu_{i+1} \operatorname{Re} \lambda_{\bar{k}_p}} = \\ &= e^{(1-\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_{i+1} \operatorname{Re} \lambda_{\bar{k}_p}} \leq e^{\operatorname{Re}(\mu_{i+1} \lambda_{\bar{k}_p})} = |e^{\mu_{i+1} \lambda_{\bar{k}_p}}|. \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольной строки получаем цепочку неравенств

$$|e^{\mu_1 \lambda_{\bar{k}_p}}| < |e^{\mu_2 \lambda_{\bar{k}_p}}| < \dots < |e^{\mu_N \lambda_{\bar{k}_p}}|.$$

По правилу Крамера

$$C_j(m) = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad (13)$$

где Δ_j – определитель матрицы, полученной из A_N заменой j -го столбца столбцом свободных членов. Чтобы оценить Δ_j , сверху разложим соответствующую матрицу по j -му столбцу:

$$\Delta_j = \sum_{p=1}^N (-1)^{j+p} \det A_{j,p} r_m(\lambda_{\bar{k}_p}).$$

Так же, как соотношение (12), получим оценку

$$|\det A_{j,p}| \leq (N-1)! e^{(N-1)(1+\alpha\beta) \operatorname{Re} \mu_N \operatorname{Re} \lambda_{\bar{k}_N}},$$

а по условию (5)

$$|r_m(\lambda_{\bar{k}_p})| \leq M e^{(1+\alpha)\sigma \operatorname{Re} \lambda_{\bar{k}_N}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\Delta_j| &\leq N! M e^{(N-1)(1+\alpha\beta) \frac{\sigma(1+\alpha)}{1-\alpha\beta} \operatorname{Re} \lambda_{\tilde{k}_N} + \sigma(1+\alpha) \operatorname{Re} \lambda_{\tilde{k}_N}} = \\ &= N! M e^{((N-1) \frac{1+\alpha\beta}{1-\alpha\beta} + 1) \sigma(1+\alpha) \operatorname{Re} \lambda_{\tilde{k}_N}} \end{aligned}$$

и

$$|C_j(m)| \leq C := N! M e^{((N-1) \frac{1+\alpha\beta}{1-\alpha\beta} + 1) \sigma(1+\alpha) \operatorname{Re} \lambda_{\tilde{k}_N}}.$$

3. Докажем, что N_φ является множеством единственности в $\operatorname{Ker} M_\psi$. Для этого надо показать, что из равенства $r_m(\lambda_{\tilde{k}_p}) = 0$ следует тождество $r_m(z) \equiv 0$. Рассмотрим систему

$$\sum_{j=1}^N C_j(m) e^{\mu_j \lambda_{\tilde{k}_p}} = 0.$$

По доказанному в п. 2 модуль определителя матрицы этой системы будет больше единицы. Выражая коэффициенты $C_j(m)$, $j = 1, 2, \dots, N$, по правилу Крамера (см. формулу (13)) и заменяя в определителе Δ_j j -й столбец столбцом свободных членов, состоящим из нулей, получим, что $C_j(m) = 0$, а это означает, что $r_m(z) \equiv 0$.

4. Докажем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_j(m) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Из рассуждений предыдущего пункта следует, что для $|C_j(m)|$ в силу соотношения (6)

$$|C_j(m)| \leq |\Delta_j| \leq N! e^{(N-1)(1+\alpha\beta) \frac{\sigma(1+\alpha)}{1-\alpha\beta} \operatorname{Re} \lambda_{\tilde{k}_N}} |r_m(\lambda_{\tilde{k}_N})| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

для любых $N = 1, 2, \dots$, таким образом,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_j(m) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

5. Закончим доказательство секвенциальной достаточности множества N_φ . Ранее в п. 1, 2 мы доказали, что

$$\operatorname{Re} \mu_j \leq \frac{\sigma(1+\alpha)}{1-\alpha\beta}, \quad |C_j(m)| \leq C.$$

Следовательно,

$$|r_m(z)| \leq N |C_j(m)| e^{\operatorname{Re}(\mu_j \cdot z)} \leq N C e^{\frac{\sigma(1+\alpha)}{1-\alpha\beta} (1+\beta) |z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

В п. 4 мы доказали, что $C_j(m) \rightarrow 0$ при любом j , следовательно, $\max_j |C_j(m)| \rightarrow 0$. Поэтому для любого компакта $K_{\mathbb{C}}$ при $z \in K_{\mathbb{C}}$ мы имеем

$$|r_m(z)| \leq N \cdot \max_{j=1,2,\dots,N} |C_j(m)| e^{\frac{\sigma(1+\alpha)}{1-\alpha\beta} (1+\beta) \max_{z \in K_{\mathbb{C}}} |z|} \rightarrow 0.$$

Отсюда вытекает, что $r_m(z) \rightarrow 0$ в топологии $\tau_{\mathbb{C}}$.

Список литературы

- [1] В. В. Напалков, А. А. Нуятов, *Матем. сб.*, **203**:2 (2012), 77–86.
- [2] В. В. Напалков, С. В. Попёнов, *Докл. РАН*, **381**:2 (2001), 164–166.
- [3] H. Muggli, *Comment. Math. Helv.*, **11**:1 (1938), 151–179.
- [4] Ж. Себаштьян-и-Силва, “О некоторых классах локально-выпуклых пространств, важных в приложениях”, *Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей*, т. 1, вып. 1, ред. А. О. Гельфонд, ИЛ, М., 1957, 60–77.

Поступила в редакцию 13.02.2014