Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Яковлев, Квантовая проблема N тел: матричные структуры и уравнения, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 1, 218–240

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8655>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 09:10:29

© 2014 г.

С. Л. Яковлев*

КВАНТОВАЯ ПРОБЛЕМА N ТЕЛ: МАТРИЧНЫЕ СТРУКТУРЫ И УРАВНЕНИЯ

Рассматриваются матричные структуры в квантовой задаче N тел, обобщающие компоненты Фаддеева для резольвент, T -матриц и собственных функций непрерывного спектра. Для введенных компонент T -матриц и резольвент выписаны матричные уравнения, и из этих уравнений получены матричные операторы, обобщающие на случай произвольного числа частиц матричные трехчастичные операторы Фаддеева. Определены собственные функции непрерывного спектра этих матричных операторов.

Ключевые слова: квантовая проблема N тел, интегральные уравнения Фаддеева, интегральные и дифференциальные уравнения для компонент волновых функций, резольвент, T -матриц.

DOI: 10.4213/tmf8655

Посвящается восьмидесятилетию юбилею академика Л. Д. Фаддеева

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе проведено систематическое обобщение формализма матричных уравнений Фаддеева для трех тел на случай произвольного числа частиц. Первоначально уравнения Фаддеева появились в форме интегральных уравнений для (3×3) -матричных ядер, отвечающих компонентам T -матрицы [1], [2]. Затем в ряде работ [3]–[9] были предприняты попытки обобщить эти уравнения на системы из большего числа частиц. И только в работах [10]–[12] такое обобщение было построено. Впоследствии в работах [13]–[15] было найдено обобщение уравнений Фаддеева на случай N частиц также в дифференциальной форме, а в работах [16]–[19] были развиты методы решения этих уравнений для конкретных систем.

Следует отметить, что необходимость построения матричных уравнений со специальной структурой зацепления уравнений вытекает из хорошо известного факта, что интегральное уравнение Липшманна–Швингера начиная со случая трех частиц теряет свойство фредгольмовости. А поскольку это уравнение является основным средством для построения решений стационарной задачи рассеяния в случае двух частиц, требовалось найти ему замену. Трехчастичные интегральные уравнения

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: sl-yakovlev@yandex.ru

Фаддеева и стали искомой заменой, так как именно для этих уравнений свойство фредгольмовости было восстановлено. С матричными интегральными уравнениями Фаддеева естественным образом связаны матричные дифференциальные уравнения, подобно тому как уравнение Липпманна–Швингера связано с уравнением Шредингера. В случае трех частиц эта связь была прослежена в работах [20]–[22], где были построены матричные операторы, собственные функции которых дают компоненты Фаддеева волновых функций системы трех тел. При этом компоненты Фаддеева резольвент и T -матриц оказываются матричными элементами резольвент и T -матриц для этих операторов. Дальнейшее развитие данных результатов в случае произвольного числа частиц является предметом настоящей работы.

(. Оператор энергии системы N частиц, цепочки разбиений, относительные координаты) Оператор энергии системы N частиц, цепочки разбиений, относительные координаты

Рассмотрим систему N попарно взаимодействующих частиц. Оператор энергии имеет вид¹⁾

$$\hat{H} = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \Delta_{\mathbf{r}_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} v_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

где m_i и $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$ – масса и радиус-вектор i -й частицы, $\Delta_{\mathbf{r}_i}$ – оператор Лапласа, функции v_{ij} – потенциалы взаимодействия между частицами i и j . В силу трансляционной инвариантности потенциальной энергии оператор $\hat{H}$ содержит тривиальное слагаемое, которое отвечает свободному движению системы как целого. Стандартным способом явного отделения этого слагаемого является переход от координат частиц $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ к радиус-вектору центра масс

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i, \quad (1)$$

и системе трансляционно-инвариантных относительных координат. Для описания последних, а также для классификации объектов, встречающихся в дальнейшем, необходимо ввести понятие цепочек разбиений.

Разбиением a_k называется некоторый способ деления системы N частиц на k подсистем:

$$a_k = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}, \quad \omega_i \cap \omega_j = \emptyset, \quad \omega_i \subset \{1, \dots, N\}.$$

Порядок следования частиц в каждой из подсистем несуществен. Заметим, что существуют два тривиальных разбиения $a_1 = \{1, \dots, N\}$ и $a_N = \{(1), \dots, (N)\}$, и тем самым нетривиальными являются все разбиения a_k при $2 \leq k \leq N-1$. Соотношение $a_k \subset a_l$ при $k \geq l$ означает, что $a_k = a_l$ при $k = l$. Если $k = l+1$, то для разбиений $a_{l+1} = \{\omega_1, \dots, \omega_p, \dots, \omega_q, \dots, \omega_{l+1}\}$ и $a_l = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r, \dots, \sigma_l\}$ существуют такие номера p, q и r , что $\omega_p \cup \omega_q = \sigma_r$. При $k > l+1$ существует последовательность разбиений $a_{k-1} \subset \dots \subset a_{l+2} \subset a_{l+1}$ такая, что $a_k \subset a_{k-1}$ и $a_{l+1} \subset a_l$. В дальнейшем одинаковыми буквами обозначаются разбиения, связанные знаком $\subset$.

Цепочкой разбиений A_l^k называется последовательность $A_l^k = a_l, a_{l+1}, \dots, a_k$, которая составлена из нетривиальных разбиений с $2 \leq l < k \leq N-1$. В частных случаях $k = N-1$ и $l = 2$ применяются обозначения $A_l = a_l, a_{l+1}, \dots, a_{N-1}$

¹⁾ На протяжении всего текста используется система единиц, в которой постоянная Планка $\hbar = 1$.

и $A^k = a_2, a_3, \dots, a_k$. Понятно, что самая полная информация о разбиениях системы N частиц содержится в цепочках A_2 .

Обозначим через n_N общее число цепочек A_2 для системы N частиц. Тогда легко сосчитать, что $n_N = 2^{1-N} N!(N-1)$, в частности $n_3 = 3$, $n_4 = 18$, $n_5 = 180$, $n_6 = 2700$ и т. д.

Введем относительные координаты, которые обычно связывают с именем Якоби. Следует отметить, что для N частиц существуют несколько различных типов относительных координат. При этом внутри каждого типа существуют несколько систем относительных координат. В настоящей работе выбран один из таких типов, в котором каждая из систем координат единственным образом фиксируется выбором цепочки разбиений. Таким образом мы определяем n_N координатных систем в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^d$, $d = 3N - 1$.

Пусть A_2 – некоторая цепочка разбиений. Определим $N - 1$ векторов

$$\mathbf{x}_{a_2}^{a_1}, \mathbf{x}_{a_3}^{a_2}, \dots, \mathbf{x}_{a_N}^{a_{N-1}}$$

по формуле

$$\mathbf{x}_{a_l}^{a_{l-1}} = \left(\frac{2M_{\omega_p} M_{\omega_q}}{M_{\omega_p} + M_{\omega_q}} \right)^{1/2} (\mathbf{R}_{\omega_p} - \mathbf{R}_{\omega_q}), \quad (2)$$

где

$$M_{\omega_p} = \sum_{j \in \omega_p} m_j, \quad \mathbf{R}_{\omega_p} = \frac{1}{M_{\omega_p}} \sum_{j \in \omega_p} m_j \mathbf{r}_j,$$

а подсистемы ω_p и ω_q определяются парой разбиений $a_{l-1} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r, \dots, \sigma_{l-1}\}$ и $a_l = \{\omega_1, \dots, \omega_p, \dots, \omega_q, \dots, \omega_l\}$ так, что имеет место равенство $\omega_p \cup \omega_q = \sigma_r$.

Набор векторов $\mathbf{X}_{A_2} = \{\mathbf{x}_{a_2}^{a_1}, \dots, \mathbf{x}_{a_N}^{a_{N-1}}\}$ совместно с вектором $\mathbf{R}$ из (1) дает альтернативные к набору $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\}$ координаты для системы N частиц. Заметим, что формулы (1) и (2) фактически определяют линейное преобразование

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{X}_{A_2}\} = L_{A_2} \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\}$$

с невырожденной матрицей L_{A_2} размера $N \times N$. Аналогично для некоторой цепочки $B_2 \neq A_2$ имеем

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{X}_{B_2}\} = L_{B_2} \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\}.$$

Отсюда следует, что

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{X}_{B_2}\} = L_{B_2} L_{A_2}^{-1} \{\mathbf{R}, \mathbf{X}_{A_2}\}.$$

Последнее означает, что матрица $L_{B_2} L_{A_2}^{-1}$ имеет блочную структуру $\text{diag}[1, O_{B_2 A_2}]$ с матрицей $O_{B_2 A_2}$ размера $(N-1) \times (N-1)$, которая реализует преобразование относительных координат $\mathbf{X}_{A_2}$ и $\mathbf{X}_{B_2}$:

$$\mathbf{X}_{B_2} = O_{B_2 A_2} \mathbf{X}_{A_2}. \quad (3)$$

Матрица преобразования $O_{B_2 A_2}$ является ортогональной, $O_{B_2 A_2} O_{B_2 A_2}^T = I$, где T означает транспонирование. Для доказательства достаточно заметить, что для любой цепочки C_2 выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^2 = M \mathbf{R}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^N (\mathbf{x}_{c_j}^{c_{j-1}})^2,$$

откуда для любых $A_2 \neq B_2$ следует, что

$$\sum_{j=2}^N (\mathbf{x}_{a_j}^{a_{j-1}})^2 = \sum_{j=2}^N (\mathbf{x}_{b_j}^{b_{j-1}})^2.$$

Введем несколько более компактных обозначений для наборов относительных координат. Пусть a_k – некоторое разбиение из цепочки A_2 . Обозначим через $\mathbf{x}_{a_k}$ набор относительных координат, внутренних по отношению к подсистемам разбиения a_k :

$$\mathbf{x}_{a_k} = \{\mathbf{x}_{a_{k+1}}^{a_k}, \dots, \mathbf{x}_{a_N}^{a_{k-1}}\}.$$

Через $\mathbf{y}_{a_k}$ обозначим набор внешних по отношению к a_k относительных координат:

$$\mathbf{y}_{a_k} = \{\mathbf{x}_{a_2}^{a_1}, \dots, \mathbf{x}_{a_k}^{a_{k-1}}\}.$$

По построению $\mathbf{X}_{A_2} = \{\mathbf{x}_{a_k}, \mathbf{y}_{a_k}\}$. Согласно определению $\mathbf{x}_{a_{N-1}} = \mathbf{x}_{a_N}^{a_{N-1}}$ и $\mathbf{y}_{a_2} = \mathbf{x}_{a_2}^{a_1}$. Наконец, заметим, что

$$\mathbf{x}_{a_{N-1}} = \left(\frac{2m_i m_j}{m_i + m_j} \right)^{1/2} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

где i и j – номера частиц, входящих в единственную нетривиальную подсистему разбиения a_{N-1} . В дальнейшем мы будем систематически использовать взаимно однозначное соответствие между парами ij и разбиениями a_{N-1} для классификации различных парных объектов.

Введенные координаты позволяют переписать оператор $\hat{H}$ в виде

$$\hat{H} = -\frac{1}{2M} \Delta_{\mathbf{R}} - \sum_{k=2}^N \Delta_{\mathbf{x}_{a_k}^{a_{k-1}}} + \sum_{b_{N-1}} V_{b_{N-1}}(\mathbf{x}_{b_{N-1}}), \quad (4)$$

где $V_{b_{N-1}}(\mathbf{x}_{b_{N-1}}) = v_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, а i, j – номера частиц, входящих в единственную нетривиальную подсистему разбиения b_{N-1} . Здесь и в дальнейшем предполагается, что фиксирована некоторая цепочка разбиений A_2 , которая определяет набор координат $\mathbf{X}_{A_2}$, а векторы $\mathbf{x}_{b_{N-1}}$ в последней сумме выражены в терминах координат $\mathbf{X}_{A_2}$ по формулам (3). Сумму трехмерных операторов Лапласа $\sum_{k=2}^N \Delta_{\mathbf{x}_{a_k}^{a_{k-1}}}$ удобно объединить в лапласиан $\Delta_{\mathbf{X}_{A_2}}$, где $\mathbf{X}_{A_2} \in \mathbb{R}^d$. Благодаря ортогональности преобразования (3) для любых $A_2 \neq B_2$ выполняется равенство

$$\Delta_{\mathbf{X}_{A_2}} = \Delta_{\mathbf{X}_{B_2}}.$$

По этой причине в дальнейшем мы будем опускать индексы цепочек у координат $\mathbf{X}_{A_2}$ и писать просто $\mathbf{X}$. Заметим, что для любого a_k верно представление

$$\Delta_{\mathbf{X}} = \Delta_{\mathbf{x}_{a_k}} + \Delta_{\mathbf{y}_{a_k}}, \quad (5)$$

где $\mathbf{x}_{a_k} \in \mathbb{R}^{3(N-k)}$ и $\mathbf{y}_{a_k} \in \mathbb{R}^{3(k-1)}$ – внутренние и внешние по отношению к a_k координаты, определенные выше.

Отделяя в (4) слагаемое $-(2M)^{-1} \Delta_{\mathbf{R}}$, отвечающее свободному движению системы N частиц как целого, получаем оператор энергии N частиц в системе центра масс:

$$H = -\Delta_{\mathbf{X}} + \sum_{b_{N-1}} V_{b_{N-1}}(\mathbf{x}_{b_{N-1}}) \equiv H_0 + \sum_{b_{N-1}} V_{b_{N-1}}. \quad (6)$$

Именно оператор H определяет все физические свойства системы, поэтому его изучение и представляет основную задачу.

Оператор H рассматривается в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$ квадратично-интегрируемых функций, зависящих от относительных координат. Предполагается, что потенциалы взаимодействия $V_{b_{N-1}}(\mathbf{x}_{b_{N-1}})$ являются вещественнозначными, гладкими, достаточно быстро убывающими функциями при $|\mathbf{x}_{b_{N-1}}| \rightarrow \infty$:

$$|V_{b_{N-1}}(\mathbf{x})| \leq C(1 + |\mathbf{x}|)^{-(3+\mu)}, \quad \mu > 0. \quad (7)$$

Оператор H с такими потенциалами становится самосопряженным в пространстве $\mathcal{H}$ с областью определения $D = D(-\Delta_{\mathbf{x}})$ [1], [23]. Потенциалы, удовлетворяющие условиям (7), не включают кулоновский случай, который требует специальных модификаций формализма уравнений Фаддеева [2], [24], что выходит за рамки настоящей работы.

Наряду с оператором H будем рассматривать операторы вида

$$H_{a_k} = H_0 + \sum_{a_{N-1} \subset a_k} V_{a_{N-1}}.$$

Эти операторы соответствуют системам N частиц, в которых взаимодействуют между собой лишь частицы, принадлежащие одной и той же подсистеме разбиения a_k , тогда как взаимодействие между частицами из разных подсистем отсутствует. Для операторов H_{a_k} в силу равенства (5) имеет место представление

$$H_{a_k} = h_{a_k} - \Delta_{\mathbf{y}_{a_k}}, \quad h_{a_k} = -\Delta_{\mathbf{x}_{a_k}} + \sum_{a_{N-1} \subset a_k} V_{a_{N-1}}(\mathbf{x}_{a_{N-1}}).$$

Итак, мы описали операторы H и H_{a_k} в координатном пространстве. Переход в импульсное представление осуществляется с помощью преобразования Фурье (чтобы избежать недоразумений, для мнимой единицы далее используется обозначение i)

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int d\mathbf{P} e^{i(\mathbf{P}, \mathbf{X})} f(\mathbf{P}),$$

где $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^d$ – набор относительных импульсов $\mathbf{k}_{a_2}^{a_1}, \dots, \mathbf{k}_{a_N}^{a_{N-1}}$, сопряженных координатам $\mathbf{X}$. Оператор H в импульсном пространстве дается выражением (6), где

$$H_0 = \mathbf{P}^2 = \mathbf{k}_{a_k}^2 + \mathbf{p}_{a_k}^2,$$

а $V_{a_{N-1}}$ – интегральные операторы с ядрами

$$V_{a_{N-1}}(\mathbf{P}, \mathbf{P}') = V_{a_{N-1}}(\mathbf{k}_{a_{N-1}} - \mathbf{k}'_{a_{N-1}}) \delta(\mathbf{p}_{a_{N-1}} - \mathbf{p}'_{a_{N-1}}).$$

Функции $V_{a_{N-1}}(\mathbf{k})$ связаны с $V_{a_{N-1}}(\mathbf{x})$ преобразованием Фурье:

$$V_{a_{N-1}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} V_{a_{N-1}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{k}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Для операторов H , H_{a_k} и H_0 резольвенты определяются равенствами

$$R(z) = (H - zI)^{-1}, \quad R_{a_k}(z) = (H_{a_k} - zI)^{-1}, \quad R_0 = (H_0 - zI)^{-1},$$

где I – единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}$. Отвечающие резольвентам T -матрицы имеют вид

$$T(z) = V - VR(z)V, \quad T_{a_k} = V_{a_k} - V_{a_k}R_{a_k}(z)V_{a_k},$$

где

$$V = \sum_{a_{N-1}} V_{a_{N-1}}, \quad V_{a_k} = \sum_{a_{N-1} \subset a_k} V_{a_{N-1}}.$$

Обратное преобразование

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)T(z)R_0(z), \quad R_{a_k}(z) = R_0(z) - R_0(z)T_{a_k}(z)R_0(z)$$

получается стандартными методами.

Как обычно, при решении задачи N тел предполагаются известными решения задач для меньшего числа частиц, в частности, при изучении резольвенты $R(z)$ считаются известными все операторы $R_{a_k}(z)$ при $2 \leq k \leq N-1$. Однако, как и в работе [10], мы выписываем соответствующие уравнения для всех операторов $R_{a_l}(z)$. При этом самые сложные уравнения для $R(z)$ получаются при $l = 1$.

В конце данного раздела условимся о некоторых обозначениях, используемых на протяжении работы. Как ясно из предыдущего, векторы будем обозначать жирными буквами, их модули как $|\mathbf{x}|$, а единичные векторы – как $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Скалярные произведения векторов обозначаются через $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

2. КОМПОНЕНТЫ T -МАТРИЦЫ И РЕЗОЛЬВЕНТЫ И УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА–ЯКУБОВСКОГО

В настоящем разделе определяются компоненты T -матриц $T(z)$, $T_{a_k}(z)$ и резольвент $R(z)$, $R_{a_k}(z)$. Компоненты классифицируются цепочками разбиений A_l . Такие компоненты и уравнения для них были введены в работе [1] для $N = 3$ и затем обобщены на случай произвольных N в статьях [10], [11]. Будем работать с операторами $T_{a_k}(z)$ и $R_{a_k}(z)$, проведя отождествления $T_{a_1}(z) = T(z)$ и $R_{a_1}(z) = R(z)$.

Компоненты T -матриц T_{a_k} определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} M_{a_{N-1}b_{N-1}}^{a_k}(z) &= V_{a_{N-1}}\delta_{a_{N-1}b_{N-1}} - V_{a_{N-1}}R_{a_k}(z)V_{b_{N-1}}, \\ M_{A_{i-1}B_{i-1}}^{a_k}(z) &= M_{A_{i+1}B_{i+1}}^{a_i}(z)\delta_{a_ib_i}\delta_{a_{i-1}b_{i-1}} - \\ &\quad - \sum_{(d_i \neq a_i) \subset a_{i-1}} \sum'_{(C_{i+1} \neq D_{i+1}) \subset a_i} M_{A_{i+1}C_{i+1}}^{a_i}(z)R_0(z)M_{D_iB_i}^{a_k}(z), \end{aligned} \quad (8)$$

где $A_i \subset a_k$, $B_i \subset a_k$, $k+1 \leq i \leq N-1$, $1 \leq k \leq N-1$ и $\delta_{a_ib_i}$ – символ Кронекера. Штрих у знака суммы означает, что ограничения при суммировании понимаются покомпонентно: цепочки C_{i+1} и D_{i+1} подчиняются условиям

$$c_{N-1} \neq d_{N-1}, \dots, c_{i+1} \neq d_{i+1}, \quad d_{N-1} \subset c_{N-2}, \dots, d_{i+2} \subset c_{i+1}.$$

Операторы $M_{A_kB_k}^{a_i}(z)$ удовлетворяют системе уравнений [10], [11]

$$\begin{aligned} M_{A_kB_k}^{a_i}(z) &= M_{A_{k+1}B_{k+1}}^{a_k}(z)\delta_{a_kb_k} - \\ &\quad - \sum_{d_k \neq a_k} \sum'_{(C_{k+1} \neq D_{k+1}) \subset a_k} M_{A_{k+1}C_{k+1}}^{a_k}(z)R_0(z)M_{D_kB_k}^{a_i}(z). \end{aligned} \quad (9)$$

В случае $k = 2$, $i = 1$ уравнения (9) являются обобщением системы уравнений Фаддеева [1] на случай N частиц. Сформулируем два важнейших свойства уравнений (9), доказанных в работах [10], [11].

ЛЕММА 1. Пусть операторы $\widetilde{M}_{A_k B_k}^{a_i}(z)$, $\text{Im } z \neq 0$, определены на D и удовлетворяют системе (9). Тогда операторы

$$\widetilde{M}_{A_{k+1} B_{k+1}}^{a_i}(z) = \sum_{a_k} \widetilde{M}_{A_k B_k}^{a_i}(z), \quad \widetilde{T}_{a_i}(z) = \sum_{A_k, b_{N-1}} \widetilde{M}_{A_k B_k}^{a_i}(z)$$

совпадают с $M_{A_{k+1} B_{k+1}}^{a_i}(z)$ и T_{a_i} соответственно.

ЛЕММА 2. Однородная система уравнений, соответствующая системе (9),

$$\varphi_{A_k}^{a_i} = - \sum_{d_k \neq a_k} \sum'_{(C_{k+1} \neq D_{k+1}) \subset a_k} M_{A_{k+1} C_{k+1}}^{a_k}(z) R_0(z) \varphi_{D_k}^{a_i}, \quad (10)$$

не имеет нетривиальных решений при $\text{Im } z \neq 0$.

Последняя лемма следует из формальной эквивалентности системы (10) уравнению Шредингера [10]

$$H_{a_i} \Psi^{a_i} = z \Psi^{a_i}, \quad \Psi^{a_i} = \sum_{A_k} R_0(z) \varphi_{A_k}^{a_i}.$$

Аналогично T -матрицам можно определить компоненты резольвент по формулам

$$\begin{aligned} R_{a_{N-1} b_{N-1}}^{a_k}(z) &= R_0(z) \delta_{a_{N-1} b_{N-1}} - R_0(z) V_{a_{N-1}} R_{a_k}(z), \\ R_{A_{i-1} B_{i-1}}^{a_k}(z) &= R_{A_{i+1} B_{i+1}}^{a_i}(z) \delta_{a_i b_i} \delta_{a_{i-1} b_{i-1}} - \\ &- \sum_{(d_i \neq a_i) \subset a_{i-1}} \sum'_{(C_{i+1} \neq D_{i+1}) \subset a_i} R_{A_{i+1} C_{i+1}}^{a_i}(z) V_{c_{N-1}} R_{D_i B_i}^{a_k}(z). \end{aligned} \quad (11)$$

Эти соотношения приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} R_{A_k B_k}^{a_i}(z) &= R_{A_{k+1} B_{k+1}}^{a_k}(z) \delta_{a_k b_k} - \\ &- \sum_{d_k \neq a_k} \sum'_{(C_{k+1} \neq D_{k+1}) \subset a_k} R_{A_{k+1} C_{k+1}}^{a_k}(z) V_{c_{N-1}} R_{D_k B_k}^{a_i}(z). \end{aligned} \quad (12)$$

Данные уравнения будут выведены в разделе 5 настоящей работы. Там же будет доказано свойство

$$R_{A_{k+1} C_{k+1}}^{a_k}(z) V_{c_{N-1}} = R_0(z) M_{A_{k+1} C_{k+1}}^{a_k}(z),$$

из которого следует, что

$$R_{A_k B_k}^{a_i}(z) V_{b_{N-1}} = R_0(z) M_{A_k B_k}^{a_i}(z) \quad (13)$$

для произвольного a_i . Последняя формула является обобщением на случай многих компонент хорошо известного равенства $R(z)V = R_0(z)T(z)$. Равенство (13) позволяет получить связь между компонентами T -матрицы и резольвенты:

$$M_{A_k B_k}^{a_i}(z) = (H_0 - z) R_{A_k B_k}^{a_i}(z) V_{b_{N-1}}.$$

Подобно системе (10) однородная система уравнений, отвечающая (12),

$$\psi_{A_k}^{a_i} = - \sum_{d_k \neq a_k} \sum'_{(C_{k+1} \neq D_{k+1}) \subset a_k} R_{A_{k+1}C_{k+1}}^{a_k}(z) V_{c_{N-1}} \psi_{D_k}^{a_i}, \quad (14)$$

не имеет нетривиальных решений при $\text{Im } z \neq 0$. Как и в случае системы (10), данное утверждение является следствием эквивалентности уравнений (14) и уравнения Шредингера

$$H_{a_i} \Psi^{a_i} = z \Psi^{a_i}. \quad (15)$$

Компоненты $\psi_{A_k}^{a_i}$ получаются из Ψ^{a_i} с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} \psi_{A_{N-1}}^{a_i} &= -R_0(z) V_{a_{N-1}} \Psi^{a_i}, \\ \psi_{A_{j-1}}^{a_i} &= \sum_{(d_j \neq a_j) \subset a_{j-1}} \sum'_{(C_{j+1} \neq D_{j+1}) \subset a_j} R_{A_{j+1}C_{j+1}}^{a_j}(z) V_{c_{N-1}} \psi_{D_j}^{a_i}. \end{aligned} \quad (16)$$

При этом

$$\Psi^{a_i} = \sum_{A_k} \psi_{A_k}^{a_i}.$$

Если $\psi_{A_k}^{a_i}$ суть решения системы (14), то Ψ^{a_i} – решение системы (15), и в силу самосопряженности оператора H_{a_i} получается, что $\Psi^{a_i} = 0$ при $\text{Im } z \neq 0$. В свою очередь, из (16) следует, что все $\psi_{A_{j-1}}^{a_i}$ равны нулю.

Решения систем (9) и (12) позволяют восстановить T -матрицы и резольвенты по формулам

$$T_{a_i}(z) = \sum_{A_k, b_{N-1}} M_{A_k B_k}^{a_i}(z), \quad R_{a_i}(z) = \sum_{A_k} R_{A_k B_k}^{a_i}(z).$$

3. T -МАТРИЦА И РЕЗОЛЬВЕНТА В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

Введенные в предыдущем разделе операторы $M_{A_k B_k}^{a_i}(z)$ и $R_{A_k B_k}^{a_i}(z)$ реализуются в импульсном пространстве как интегральные операторы. Соответственно системы уравнений (9) и (12) превращаются в системы интегральных уравнений для ядер входящих в них операторов. Эти системы уравнений позволяют явно описать сингулярности ядер T -матрицы и резольвенты в импульсном представлении и определить собственные функции непрерывного спектра [14].

Будем называть интегральный оператор с ядром вида $A_{a_l}(\mathbf{k}_{a_l}, \mathbf{k}'_{a_l}) \delta(\mathbf{p}_{a_l} - \mathbf{p}'_{a_l})$, где $A_{a_l}(\mathbf{k}_{a_l}, \mathbf{k}'_{a_l})$ не имеет особенностей типа δ -функции, *оператором, связным в разбиении* a_l , и обозначать его как $A_{a_l}^c$. Понятно, что резольвенты $R_{a_k}(z)$ и T -матрицы $T_{a_k}(z)$ не являются связными в a_k операторами. Ближайшая наша задача – явное описание несвязных частей операторов $R_{a_k}(z)$ и $T_{a_k}(z)$. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Для связанных частей операторов $R_{a_k}(z)$ и $T_{a_k}(z)$, $1 \leq k \leq N-1$, имеют место представления

$$\begin{aligned} R_{a_k}^c(z) &= R_{a_k}(z) - R_0(z) - \sum_{i=k+1}^{N-1} \sum_{a_i} R_{a_i}^c(z), \\ T_{a_k}^c(z) &= T_{a_k}(z) - \sum_{i=k+1}^{N-1} \sum_{a_i} T_{a_i}^c(z), \end{aligned} \quad (17)$$

где $T_{a_{N-1}}^c = T_{a_{N-1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что достаточно доказать второе из равенств (17), так как первое тогда будет следовать из соотношения

$$R_{a_k}(z) = R_0(z) - R_0(z)T_{a_k}(z)R_0(z).$$

Формулы (17) можно получить с помощью графической техники [25], однако для полноты изложения мы дадим алгебраическое доказательство, используя основное свойство уравнений (9).

Вместо компонент (8) удобно рассмотреть компоненты T -матриц $T_{a_k}(z)$ вида

$$\begin{aligned} T_{a_{N-1}}^{a_k}(z) &= V_{a_{N-1}} - V_{a_{N-1}}R_{a_k}(z)V_{a_{N-1}}, \\ T_{A_{i-1}}^{a_k}(z) &= - \sum_{(d_i \neq a_i) \subset a_{i-1}} \sum'_{(C_{i+1} \neq D_{i+1}) \subset a_i} M_{A_{i+1}C_{i+1}}^{a_i}(z)R_0(z)T_{D_i}^{a_k}(z), \end{aligned} \quad (18)$$

которые удовлетворяют уравнениям [25]

$$T_{A_i}^{a_k}(z) = T_{A_{i+1}}^{a_i}(z) - \sum_{(d_i \neq a_i)} \sum'_{(C_{i+1} \neq D_{i+1}) \subset a_i} M_{A_{i+1}C_{i+1}}^{a_i}(z)R_0(z)T_{D_i}^{a_k}(z). \quad (19)$$

Эти уравнения отличаются от (9) тем, что свободный член $T_{A_{i+1}}^{a_i}(z)$ является связным в a_i оператором и представляет собой компоненту связной части оператора $T_{a_i}(z)$. При этом оператор $T_{a_i}^c(z)$ дается формулой

$$T_{a_i}^c(z) = \sum_{A_{i+1}} T_{A_{i+1}}^{a_i}(z). \quad (20)$$

Из определений (18) и уравнений (19) получаем для $T_{A_{i+1}}^{a_k}(z)$ следующее соотношение:

$$T_{A_{i+1}}^{a_k}(z) = T_{A_{i+2}}^{a_{i+1}}(z) + \sum_{a_i} T_{A_i}^{a_k}(z).$$

Из свойств уравнений (19), доказанных в работах [10], [11], следует, что второе слагаемое в (19) при $i = k+1$ является связным в a_k оператором. Отсюда, с учетом формул (20) и соотношения

$$T_{a_k}(z) = \sum_{a_{N-1}} T_{a_{N-1}}^{a_k}(z),$$

получаем требуемое представление

$$T_{a_k}^c(z) = T_{a_k}(z) - \sum_{i=k+1}^{N-1} \sum_{a_i} T_{a_i}^c(z)$$

и соответствующее представление для $R_{a_k}^c(z)$. Лемма доказана.

Для описания структуры сингулярностей T -матриц нам понадобятся несколько новых обозначений. Пусть $\psi^{a_i}(\mathbf{k}_{a_i})$ – собственная функция дискретного спектра и ε_{a_i} – абсолютная величина отвечающего ей собственного значения ($\varepsilon_{a_i} > 0$) для оператора h_{a_i} :

$$h_{a_i} \psi^{a_i}(\mathbf{k}_{a_i}) = -\varepsilon_{a_i} \psi^{a_i}(\mathbf{k}_{a_i}).$$

Состояние системы N частиц, в котором взаимодействуют лишь частицы из подсистем разбиения a_i , описываемое функцией $\psi^{a_i}(\mathbf{k}_{a_i})$, называют *i -кластерным каналом*.

Введем формфактор формулой

$$\phi^{a_i} = \sum_{a_{N-1} \subset a_i} V_{a_{N-1}} \psi^{a_i}.$$

Для ψ^{a_i} , ϕ^{a_i} и ε_{a_i} под индексом a_i будем понимать в дальнейшем не только само разбиение a_i , но и возможные дополнительные индексы (квантовые числа), классифицирующие собственные функции и собственные значения оператора h_{a_i} . Далее будем считать выполненным условие $\varepsilon_{a_i} < \varepsilon_{a_k}$ при $a_i \subset a_k$, согласующееся с известным утверждением [26] о порогах непрерывного спектра для многочастичных гамильтонианов.

T -матрица $T(z)$ оператора H описывается формулами [14]

$$T(z) = \sum_{i=2}^{N-1} \sum_{a_i} T_{a_i}^c(z) + T^c(z), \quad (21)$$

где ядра операторов $T_{a_i}^c(z)$ при $2 \leq i \leq N-1$ и оператора $T_{a_1}^c(z) \equiv T^c(z)$ задаются формулами (здесь и далее черта означает комплексное сопряжение)

$$\begin{aligned} T_{a_i}^c(\mathbf{P}, \mathbf{P}', z) &= t_{a_i}^c(\mathbf{k}_{a_i}, \mathbf{k}'_{a_i}, z - \mathbf{p}_{a_i}^2) \delta(\mathbf{p}_{a_i} - \mathbf{p}'_{a_i}), \\ t_{a_i}^c(\mathbf{k}_{a_i}, \mathbf{k}'_{a_i}, z) &= \frac{\phi^{a_i}(\mathbf{k}_{a_i}) \bar{\phi}^{a_i}(\mathbf{k}'_{a_i})}{z + \varepsilon_{a_i}} + \\ &+ \sum_{a_j, a_l \subset a_i} \frac{\phi^{a_j}(\mathbf{k}_{a_j})}{z - \mathbf{p}_{a_j a_i}^2 + \varepsilon_{a_j}} \mathcal{H}_{a_j a_l}^{a_i}(\mathbf{p}_{a_j a_i}, \mathbf{p}'_{a_l a_i}, z) \frac{\bar{\phi}^{a_l}(\mathbf{k}'_{a_l})}{z - \mathbf{p}_{a_l a_i}^2 + \varepsilon_{a_l}}. \end{aligned} \quad (22)$$

В этих формулах $\mathbf{p}_{a_j a_i}$ – набор относительных импульсов, внешних по отношению к разбиению a_j и внутренних по отношению к разбиению $a_i \supset a_j$, так что

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{k}_{a_i}, \mathbf{p}_{a_i}\} = \{\mathbf{k}_{a_j}, \mathbf{p}_{a_j}\}, \quad \mathbf{p}_{a_j} = \{\mathbf{p}_{a_j a_i}, \mathbf{p}_{a_i}\}, \quad \mathbf{k}_{a_i} = \{\mathbf{k}_{a_j}, \mathbf{p}_{a_j a_i}\}.$$

При суммировании по a_j и a_l во втором уравнении формулы (22) допускаются значения $j, l = N$, при этом полагается

$$\frac{\phi^{a_N}(\mathbf{k}_{a_N})}{z - \mathbf{p}_{a_N a_i}^2 + \varepsilon_{a_N}} \equiv 1.$$

Доказательство соотношений (22) можно получить по индукции с помощью формул из работы [1] и уравнений (9) и (19). Мы не будем приводить его здесь из-за чрезвычайной громоздкости промежуточных формул, которые частично приведены в статье [2].

Кроме явно выделенных в (22) особенностей, называемых главными, функции $t_{a_i}^c(\mathbf{k}_{a_i}, \mathbf{k}'_{a_i}, z)$ имеют ряд второстепенных сингулярностей, отвечающих первым итерациям систем (9) и (19). Эти сингулярности соответствуют законам сохранения энергии в процессах многократных разделенных столкновений кластеров. Отличительной чертой второстепенных сингулярностей является зависимость не только от модулей векторов $\mathbf{p}_{a_j a_i}$ и $\mathbf{p}'_{a_j a_i}$, но и от углов между этими векторами. Мы также не будем приводить здесь соответствующие формулы из-за их громоздкости [2].

Представление для ядра резольвенты получается из (21) и (22) с помощью формулы

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)T(z)R_0(z). \quad (23)$$

Теперь мы имеем возможность определить собственные функции непрерывного спектра оператора H . Обозначим через $\chi_{b_l}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l})$ волновую функцию l свободных кластеров. Функция χ_{b_l} выражается через ψ^{b_l} с помощью формулы

$$\chi_{b_l}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l}) = \psi^{b_l}(\mathbf{k}_{b_l})\delta(\mathbf{p}'_{b_l} - \mathbf{p}_{b_l}).$$

Собственная функция $\Psi_{b_l}^{(\pm)}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l})$, отвечающая l -кластерному начальному (+) или конечному (−) состоянию, определяется как предел

$$\Psi_{b_l}^{(\pm)} = \mp \lim_{\epsilon \rightarrow +0} i\epsilon R(E_{b_l} \pm i\epsilon)\chi_{b_l}, \quad (24)$$

где энергия $E_{b_l} = \mathbf{p}_{b_l}^2 - \varepsilon_{b_l}$. Используя соотношения (21)–(23) для вычисления предела в (24), получаем следующую формулу:

$$\Psi_{b_l}^{(\pm)}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l}) = \chi_{b_l}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l}) + \sum_{a_k \supset b_l} u_{a_k b_l}^{\pm}(\mathbf{k}'_{a_k}, \mathbf{p}_{b_l a_k})\delta(\mathbf{p}'_{a_k} - \mathbf{p}_{a_k}) + u_{b_l}^{\pm}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l}), \quad (25)$$

где $u_{a_k b_l}^{\pm}(\mathbf{k}'_{a_k}, \mathbf{p}_{b_l a_k})$ и $u_{b_l}^{\pm}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l})$ – связанные части волновых функций $\psi_{a_k b_l}^{(\pm)}(\mathbf{k}'_{a_k}, \mathbf{p}_{b_l a_k})$, которые задаются формулами

$$\begin{aligned} u_{a_k b_l}^{\pm}(\mathbf{k}'_{a_k}, \mathbf{p}_{b_l a_k}) &= -\frac{1}{\mathbf{k}'_{a_k}{}^2 - E_{b_l a_k} \mp i0} \times \\ &\times \sum_{a_i \subset a_k} \frac{\phi_{a_i}(\mathbf{k}'_{a_i})\mathcal{H}_{a_i b_l}^{a_k}(\mathbf{p}'_{a_i a_k}, \mathbf{p}_{b_l a_k}, E_{b_l a_k} \pm i0)}{E_{b_l a_k} - \mathbf{p}'_{a_i a_k}{}^2 + \varepsilon_{a_i} \mp i0}, \\ u_{b_l}^{\pm}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l}) &= -\frac{1}{\mathbf{P}'^2 - E_{b_l} \mp i0} \sum_{a_i} \frac{\phi_{a_i}(\mathbf{k}'_{a_i})\mathcal{H}_{a_i b_l}(\mathbf{p}'_{a_i}, \mathbf{p}_{b_l}, E_{b_l} \pm i0)}{E_{b_l} - \mathbf{p}'_{a_i}{}^2 + \varepsilon_{a_i} \mp i0}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $E_{b_l a_k} = \mathbf{p}_{b_l a_k}^2 - \varepsilon_{b_l}$.

Рассмотрим N невзаимодействующих частиц. Такая система описывается волновой функцией

$$\chi_0(\mathbf{P}', \mathbf{P}) = \delta(\mathbf{P}' - \mathbf{P}).$$

Собственная функция, отвечающая системе N частиц, свободных в начальном (+) или конечном (−) состоянии, определяется как предел

$$\Psi_0^{(\pm)} = \mp \lim_{\epsilon \rightarrow +0} i\epsilon R(E \pm i\epsilon)\chi_0, \quad (27)$$

где энергия $E = \mathbf{P}^2$. Вычисляя предел, как и выше, получим

$$\Psi_0^{(\pm)}(\mathbf{P}', \mathbf{P}) = \chi_0(\mathbf{P}', \mathbf{P}) + \sum_{a_k} u_{a_k 0}^{\pm}(\mathbf{k}'_{a_k}, \mathbf{k}_{a_k})\delta(\mathbf{p}'_{a_k} - \mathbf{p}_{a_k}) + u_0^{\pm}(\mathbf{P}', \mathbf{P}). \quad (28)$$

Здесь $u_{a_k 0}^{\pm}(\mathbf{k}'_{a_k}, \mathbf{k}_{a_k})$ и $u_0^{\pm}(\mathbf{P}', \mathbf{P})$ – связанные части волновых функций $\psi_{a_k 0}^{(\pm)}(\mathbf{k}'_{a_k}, \mathbf{k}_{a_k})$, которые выражаются через ядра T -матриц $T_{a_k}^c(z)$ с помощью формул

$$\begin{aligned} u_{a_k 0}^{\pm}(\mathbf{k}'_{a_k}, \mathbf{k}_{a_k}) &= -\frac{1}{\mathbf{k}'_{a_k}{}^2 - \mathbf{k}_{a_k}^2 \mp i0} t_{a_k}^c(\mathbf{k}'_{a_k}, \mathbf{k}_{a_k}, \mathbf{k}_{a_k}^2 \pm i0), \\ u_0^{\pm}(\mathbf{P}', \mathbf{P}) &= -\frac{1}{\mathbf{P}'^2 - \mathbf{P}^2 \mp i0} T^c(\mathbf{P}', \mathbf{P}, \mathbf{P}^2 \pm i0). \end{aligned} \quad (29)$$

4. РЕЗОЛЬВЕНТА И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В данном разделе мы опишем асимптотические свойства ядра резольвенты оператора H и волновых функций $\Psi_{b_l}^{(\pm)}$ в конфигурационном пространстве. Ядро резольвенты $R(z)$ в конфигурационном пространстве дается преобразованием Фурье:

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{X}', z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{P} d\mathbf{P}' e^{i(\mathbf{P}, \mathbf{X})} R(\mathbf{P}, \mathbf{P}', z) e^{-i(\mathbf{P}', \mathbf{X}')}, \quad (30)$$

где $R(\mathbf{P}, \mathbf{P}', z)$ – ядро оператора $R(z)$ в импульсном представлении. Используя связь (23) операторов $R(z)$ и $T(z)$, представим ядро $R(\mathbf{X}, \mathbf{X}', z)$ в виде

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{X}', z) = R_0(\mathbf{X}, \mathbf{X}', z) + G(\mathbf{X}, \mathbf{X}', z). \quad (31)$$

Здесь $R_0(\mathbf{P}, \mathbf{P}', z)$ – ядро оператора $R_0(z)$, которое выражается через функцию Ханкеля:

$$R_0(\mathbf{X}, \mathbf{X}', z) = \frac{i}{4} \left(\frac{\sqrt{z}}{2\pi} \right)^{(n-2)/2} \frac{H_{(n-2)/2}^{(1)}(\sqrt{z} |\mathbf{X} - \mathbf{X}'|)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}'|^{(n-2)/2}}.$$

Ядро $G(\mathbf{X}, \mathbf{X}', z)$ дается преобразованием Фурье (30) от функции

$$g(\mathbf{P}, \mathbf{P}', z) = -\frac{T(\mathbf{P}, \mathbf{P}', z)}{(\mathbf{P}^2 - z)(\mathbf{P}'^2 - z)}.$$

Следует отметить, что в силу представления (31) ядро $R(\mathbf{X}, \mathbf{X}', z)$ имеет стандартную сингулярность при $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$:

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{X}', z) = \frac{1}{(d-2)\sigma_d |\mathbf{X} - \mathbf{X}'|^{d-2}} (1 + O(|\mathbf{X} - \mathbf{X}'|)),$$

где σ_d – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^d$.

Опишем асимптотический вид ядра $R(\mathbf{X}, \mathbf{X}', z)$ при $|\mathbf{X}'| \rightarrow \infty$ и $|\mathbf{X}| = O(|\mathbf{X}'|^\nu)$, $\nu < 1$. Поскольку $R(z)$ как функция от z имеет разрез на вещественной оси, следует, как обычно, различать пределы при $z \rightarrow E \pm i0$ (здесь $\text{Im } E = 0$). Для вычисления асимптотики ядер $R(\mathbf{X}, \mathbf{X}', E \pm i0)$ воспользуемся полученной в разделе 3 структурой сингулярностей ядра резольвенты в импульсном пространстве и представлением (30).

Докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Ядро $R(\mathbf{X}, \mathbf{X}', E \pm i0)$ представляется в виде*

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{X}', E \pm i0) = \sum_{b_l} \bar{\psi}_{b_l}(\mathbf{x}'_{b_l}) Q_{b_l}^{\pm}(\mathbf{X}, \mathbf{y}'_{b_l}) + Q_0^{\pm}(\mathbf{X}, \mathbf{X}'), \quad (32)$$

где функции $Q_{b_l}^\pm(\mathbf{X}, \mathbf{y}'_{b_l})$ и $Q_0^\pm(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$ при $|\mathbf{y}'_{b_l}| \rightarrow \infty$ и $|\mathbf{X}'| \rightarrow \infty$ переходят в сферические волны:

$$\begin{aligned} Q_{b_l}^\pm(\mathbf{X}, \mathbf{y}'_{b_l}) &\sim \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sqrt{E}}{2\pi} \right)^{(d_l-3)/2} \Psi_{b_l}^{(\pm)}(\mathbf{X}, \mp \sqrt{E + \varepsilon_{b_l}} \hat{\mathbf{y}}'_{b_l}) \times \\ &\times |\mathbf{y}'_{b_l}|^{(d_l-1)/2} \exp \left\{ \pm i \sqrt{E + \varepsilon_{b_l}} |\mathbf{y}'_{b_l}| \mp i \frac{\pi(d_l-3)}{4} \right\}, \\ Q_0^\pm(\mathbf{X}, \mathbf{X}') &\sim \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sqrt{E}}{2\pi} \right)^{(d-3)/2} \Psi_0^{(\pm)}(\mathbf{X}, \mp \sqrt{E} \hat{\mathbf{X}}') \times \\ &\times |\mathbf{X}'|^{(d-1)/2} \exp \left\{ \pm i \sqrt{E} |\mathbf{X}'| \mp i \frac{\pi(d-3)}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $d_l = 3(l-1)$, $d = 3(N-1)$, а функции $\Psi_{b_l}^{(\pm)}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_l})$ и $\Psi_0^{(\pm)}(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ являются собственными функциями непрерывного спектра оператора H в конфигурационном пространстве и связаны с функциями (25) и (28) преобразованием Фурье, например

$$\Psi_{b_l}^{(\pm)}(\mathbf{X}, \mathbf{p}'_{b_l}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{d-d_l}}} \int d\mathbf{P} \Psi_{b_l}^{(\pm)}(\mathbf{P}, \mathbf{p}'_{b_l}) e^{i(\mathbf{P}, \mathbf{X})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности рассмотрим случай ядра $R(\mathbf{X}, \mathbf{X}', E^+)$, $E^+ = E + i0$. Запишем формулу (23) в терминах ядер участвующих в ней операторов:

$$R(\mathbf{P}, \mathbf{P}', E^+) = \frac{\delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}')}{\mathbf{P}^2 - E^+} - \frac{T(\mathbf{P}, \mathbf{P}', E^+)}{(\mathbf{P}^2 - E^+)(\mathbf{P}'^2 - E^+)}. \quad (34)$$

Ядро $T(\mathbf{P}, \mathbf{P}', E^+)$ представим в виде

$$T(\mathbf{P}, \mathbf{P}', E^+) = \sum_{b_l} u_{b_l}(\mathbf{P}, \mathbf{p}'_{b_l}, E^+) \frac{\bar{\phi}_{b_l}(\mathbf{k}'_{b_l})}{E^+ - \mathbf{p}_{b_l}'^2 + \varepsilon_{b_l}}, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} u_{b_l}(\mathbf{P}, \mathbf{p}'_{b_l}, E^+) &= \phi_{b_l}(\mathbf{k}_{b_l}) \delta(\mathbf{p}_{b_l} - \mathbf{p}'_{b_l}) + \\ &+ \sum_{a_k \supset a_i, b_l} \frac{\phi_{a_i}(\mathbf{k}_{a_i})}{E^+ - \mathbf{p}_{a_i}'^2 + \varepsilon_{a_i}} \mathcal{H}_{a_i b_l}^{a_k}(\mathbf{p}_{a_i a_k}, \mathbf{p}'_{b_l a_k}, E^+ - \mathbf{p}_{a_k}'^2) \delta(\mathbf{p}_{a_k} - \mathbf{p}'_{a_k}). \end{aligned}$$

Заметим, что при $E = \mathbf{p}_{b_l}'^2 - \varepsilon_{b_l}$ функция $(\mathbf{P}^2 - E^+)^{-1} u_{b_l}$ совпадает с волновой функцией $\Psi_{b_l}^+$. Подставляя представление (34) в (30), получаем

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{X}', E^+) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{P}' \hat{R}(\mathbf{X}, \mathbf{P}', E^+) e^{i(\mathbf{P}', -\mathbf{X}')}, \quad (36)$$

где через $\hat{R}(\mathbf{X}, \mathbf{P}', E^+)$ обозначено преобразование Фурье ядра $R(\mathbf{P}, \mathbf{P}', E^+)$ по первому аргументу. Учтем далее, что особенности сингулярных знаменателей $\mathbf{P}'^2 - E^+$ и $E^+ - \mathbf{p}_{b_l}'^2 + \varepsilon_{b_l}$ не пересекаются:

$$\mathbf{P}'^2 - E^+ + E^+ - \mathbf{p}_{b_l}'^2 + \varepsilon_{b_l} = \mathbf{k}_{b_l}'^2 + \varepsilon_{b_l} > 0.$$

Выделим из области интегрирования в (36) окрестность Ω гиперболы $\mathbf{P}'^2 = E$ такую, что в ней знаменатели $E^+ - \mathbf{p}_{b_l}'^2 + \varepsilon_{b_l}$ не обращаются в нуль. В этой области

подынтегральная функция в (36) имеет единственную особенность $(\mathbf{P}'^2 - E^+)^{-1}$. Асимптотика интеграла (36), взятого по выделенной области, легко вычисляется с помощью формулы [2]

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}, E) &= \int dq e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} \frac{f(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 - E \mp i0} = \\ &= \left(\frac{2\pi}{|\mathbf{x}|} \right)^{(n-1)/2} \pi E^{(n-3)/4} \exp \left\{ \pm i\sqrt{E} |\mathbf{x}| \mp i \frac{(n-3)\pi}{4} \right\} \times \\ &\times \left[f(\pm\sqrt{E}\hat{\mathbf{x}}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{E}|\mathbf{x}|} \right) \right], \quad \mathbf{x}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (37)$$

Применяя эту асимптотику к интегралу (36), взятому по области Ω , получаем в старшем порядке выражение для Q_0^+ из (33).

Рассмотрим интеграл (36) по оставшейся части пространства $\mathbb{R}^d$. Теперь можно воспользоваться представлением (35). В результате интеграл представляется как ряд слагаемых вида

$$J(\mathbf{X}', E) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} d\mathbf{P}' f(\mathbf{p}'_{b_l}) \frac{\bar{\phi}_{b_l}(\mathbf{k}'_{b_l}) e^{i(\mathbf{P}', \mathbf{X}')}}{(E^+ - \mathbf{p}'_{b_l}{}^2 + \varepsilon_{b_l})(\mathbf{P}'^2 - E^+)},$$

причем в области $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ выражение $\mathbf{P}'^2 - E$ не обращается в нуль. Для вычисления асимптотики $J(\mathbf{X}', E)$ при $|\mathbf{X}'| \rightarrow \infty$ проведем сначала интегрирование по переменной $\mathbf{p}'_{b_l}$ с помощью формулы (37) и учтем, что

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{d-d_l}}} \int d\mathbf{k}'_{b_l} e^{i(\mathbf{x}'_{b_l}, \mathbf{k}'_{b_l})} \frac{\bar{\phi}_{b_l}(\mathbf{k}'_{b_l})}{\mathbf{k}'_{b_l}{}^2 + \varepsilon_{b_l}} = \bar{\psi}_{b_l}(\mathbf{x}'_{b_l}).$$

Тогда в старшем порядке интеграл $J(\mathbf{X}', E)$ дается выражением

$$\begin{aligned} J(\mathbf{X}', E) &\sim \frac{1}{4\pi \sqrt{(2\pi)^{d-d_l}}} \left(\frac{\sqrt{E + \varepsilon_{b_l}}}{2\pi} \right)^{(d_l-3)/2} \bar{\psi}_{b_l}(\mathbf{x}'_{b_l}) f(\sqrt{E + \varepsilon_{b_l}} \hat{\mathbf{y}}'_{b_l}) \times \\ &\times |\mathbf{y}'_{b_l}|^{(d_l-1)/2} \exp \left\{ i\sqrt{E + \varepsilon_{b_l}} |\mathbf{y}'_{b_l}| - i \frac{\pi(d_l-3)}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Собирая полученные вклады, получаем для ядра $R(\mathbf{X}, \mathbf{X}', E^+)$ требуемое представление (32). Теорема доказана.

Перейдем к обсуждению асимптотических свойств волновых функций

$$\Psi_{b_l}^{(+)}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_l}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{d-d_l}}} \int d\mathbf{P}' \Psi_{b_l}^{(+)}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l}) e^{i(\mathbf{P}', \mathbf{X})}.$$

Опишем асимптотику волновых функций $\Psi_{b_2}^{(+)}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2})$, которые отвечают двукластерным начальным состояниям. В этом случае можно показать, что функции $\Psi_{b_2}^{(+)}(\mathbf{P}, \mathbf{p}_{b_2})$ не содержат второстепенных сингулярностей, связанных с перерассеянием кластеров. Это означает, что амплитуды в формулах (26) являются гладкими функциями. Последнее позволяет легко вычислить асимптотику волновых функций $\Psi_{b_2}^{(+)}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2})$ при $|\mathbf{X}| \rightarrow \infty$, используя приемы, аналогичные тем, что применялись при доказательстве теоремы 1. Приведем окончательный результат.

Функции $\Psi_{b_2}^{(+)}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2})$ представляются в виде

$$\Psi_{b_2}^{(+)}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2}) = \chi_{b_2}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2}) + \sum_{i=2}^N \sum_{a_i} \psi_{a_i}(\mathbf{x}_{a_i}) U_{a_i b_2}^+(\mathbf{y}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2}). \quad (38)$$

Здесь

$$\chi_{b_2}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2}) = \psi_{b_2}(\mathbf{x}_{b_2}) e^{i(\mathbf{p}_{b_2}, \mathbf{y}_{b_2})},$$

а функции $U_{a_i b_2}^+(\mathbf{y}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2})$ переходят в сферические волны при $|\mathbf{y}_{a_i}| \rightarrow \infty$:

$$U_{a_i b_2}^+(\mathbf{y}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2}) \sim C_{3(i-1)}(E_{a_i b_2}) \mathcal{H}_{a_i b_2}(\sqrt{E_{a_i b_2}} \hat{\mathbf{y}}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2}, E_{b_2} + i0) \times \\ \times |\mathbf{y}_{a_i}|^{-(3i-4)/2} e^{i\sqrt{E_{a_i b_2}} |\mathbf{y}_{a_i}|}, \quad (39)$$

где

$$E_{a_i b_2} = E_{b_2} + \varepsilon_{a_i} = \mathbf{p}_{b_2}^2 - \varepsilon_{b_2} + \varepsilon_{a_i}, \quad C_m(E) = -2\pi^2 E^{(m-3)/4} e^{-i\pi(m-3)/4}.$$

В формулах (38) и (39) мы полагаем $\psi_{a_N} = 1$, $\varepsilon_{a_N} = 0$ при $i = N$.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ

В разделе 2 мы ввели компоненты резольвенты $R_{A_k B_k}^{a_i}(z)$, выписали уравнения (12) для этих компонент и анонсировали перестановочное свойство (13). В настоящем разделе мы дадим соответствующие доказательства. Более того, мы покажем, что компоненты резольвенты $R_{A_k B_k}^{a_i}(z)$ являются матричными элементами резольвенты некоторого матричного оператора. Мы построим этот оператор и на его основе получим так называемые дифференциальные уравнения для компонент резольвенты и компонент волновых функций системы N тел.

В дальнейшем удобно использовать матричные обозначения. Сопоставим компонентам $R_{A_k B_k}^{a_i}(z)$ и $M_{A_k B_k}^{a_i}(z)$ матрицы $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ и $\mathbf{M}_k^{a_i}(z)$, столбцы и строки которых нумеруются цепочками разбиений A_k, B_k такими, что $A_k, B_k \subset a_i$. Определим матрицы $\mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z)$, $\mathbf{M}_{kj}^{a_i}(z)$, $\mathbf{V}_k^{a_i}$, $\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)$ и $\mathbf{I}_k^{a_i}$ формулами

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z)]_{A_k B_k} &= R_{A_{j+1} B_{j+1}}^{a_j}(z) \delta_{a_j b_j} \dots \delta_{a_k b_k}, \\ [\mathbf{M}_{kj}^{a_i}(z)]_{A_k B_k} &= M_{A_{j+1} B_{j+1}}^{a_j}(z) \delta_{a_j b_j} \dots \delta_{a_k b_k}, \\ [\mathbf{V}_k^{a_i}]_{A_k B_k} &= V_{a_{N-1}} \delta_{a_{N-1} b_{N-1}} \dots \delta_{a_k b_k}, \\ [\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)]_{A_k B_k} &= R_0(z) \delta_{a_{N-1} b_{N-1}} \dots \delta_{a_k b_k}, \\ [\mathbf{I}_k^{a_i}]_{A_k B_k} &= I \delta_{a_{N-1} b_{N-1}} \dots \delta_{a_k b_k}. \end{aligned}$$

Введем числовую матрицу $\mathbf{X}_{kj}^{a_i}$, с помощью которой можно учесть ограничения при суммировании в уравнениях (9) и (12):

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_{kj}^{a_i}]_{A_k B_k} &= X_{A_{j+1} B_{j+1}} \delta_{a_j b_j} \dots \delta_{a_k b_k}, \\ X_{A_{j+1} B_{j+1}} &= \delta^{a_j b_j} \delta(b_{j+1} \subset a_j) \dots \delta(b_{N-1} \subset a_{N-2}) \delta^{a_{N-1} b_{N-1}}. \end{aligned}$$

Здесь $\delta^{ab} = 1 - \delta_{ab}$, а символ $\delta(b_{k+1} \subset a_k)$ понимается в следующем смысле:

$$\delta(b_{k+1} \subset a_k) = \begin{cases} 1, & b_{k+1} \subset a_k, \\ 0, & b_{k+1} \not\subset a_k. \end{cases}$$

Уравнения (9) и (12) в матричной форме принимают вид

$$\mathbf{M}_k^{a_i}(z) = \mathbf{M}_{kk}^{a_i}(z) - \mathbf{M}_{kk}^{a_i}(z) \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z) \mathbf{X}_{kk}^{a_i} \mathbf{M}_k^{a_i}(z), \quad (40)$$

$$\mathbf{R}_k^{a_i}(z) = \mathbf{R}_{kk}^{a_i}(z) - \mathbf{R}_{kk}^{a_i}(z) \mathbf{V}_k^{a_i} \mathbf{X}_{kk}^{a_i} \mathbf{R}_k^{a_i}(z). \quad (41)$$

Запишем также уравнения для матриц $\mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z)$, получающиеся из определения этих операторов и уравнений (41):

$$\mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z) = \mathbf{R}_{k,j+1}^{a_i}(z) - \mathbf{R}_{k,j+1}^{a_i}(z) \mathbf{V}_k^{a_i} \mathbf{X}_{k,j+1}^{a_i} \mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z) \quad (42)$$

(здесь и далее в двойных нижних индексах использована запятая, когда один из индексов дается выражением вида $j+1$ или $j-1$).

Нашей первой задачей будет доказательство справедливости уравнения (42) для любого фиксированного k из промежутка $i+1 \leq k \leq N-1$ и любого j такого, что $k \leq j \leq N-1$. Рассмотрим уравнение (42) при $j = N-1$. В этом случае оно сводится к виду

$$R_{a_{N-1}}(z) = R_0(z) - R_0(z) V_{a_{N-1}} R_{a_{N-1}}(z), \quad R_{a_{N-1}}(z) = (H_0 + V_{a_{N-1}} - zI)^{-1},$$

и представляет собой уравнение Липшманна–Швингера для двухчастичной резольвенты. Таким образом, уравнение (42) справедливо при $j = N-1$. Предположим, что оно верно на j -м шаге и докажем его справедливость на $(j-1)$ -м шаге. Оператор $\mathbf{R}_{k,j-1}^{a_i}(z)$ имеет матричные элементы

$$[\mathbf{R}_{k,j-1}^{a_i}(z)]_{A_k B_k} = R_{A_j B_j}^{a_j-1}(z) \delta_{a_{j-1} b_{j-1}} \dots \delta_{a_k b_k}.$$

В свою очередь, компоненты $R_{A_j B_j}^{a_j-1}(z)$ определяются формулой

$$\begin{aligned} R_{A_j B_j}^{a_j-1}(z) &= R_{A_{j+2} B_{j+2}}^{a_j+2}(z) \delta_{a_{j+1} b_{j+1}} \delta_{a_j b_j} - \\ &- \sum_{(d_{j+1} \neq a_{j+1}) \subset a_j} \sum'_{(C_{j+2} \neq D_{j+2}) \subset a_{j+1}} R_{A_{j+2} C_{j+2}}^{a_j+2}(z) V_{C_{N-1}} R_{D_{j+1} B_{j+1}}^{a_j-1}(z). \end{aligned} \quad (43)$$

Суммируя данные равенства по a_j , используя правило [10], [14]

$$\sum_{a_j} \sum_{(d_{j+1} \neq a_{j+1}) \subset a_j} (\cdot) = \sum_{d_{j+1} \neq a_{j+1}} (\cdot)$$

и уравнения (42) на j -м шаге, приходим к заключению, что

$$\sum_{a_j} R_{A_j B_j}^{a_j-1}(z) = R_{A_{j+1} B_{j+1}}^{a_j-1}(z). \quad (44)$$

Подставляя это соотношение в правую часть равенства (43), получаем уравнения для компонент $R_{A_j B_j}^{a_j-1}(z)$, которые в матричной форме имеют вид

$$(\mathbf{X}_k^{a_i} + \mathbf{R}_{k,j+1}^{a_i}(z) \mathbf{V}_k^{a_i} \mathbf{X}_{k,j+1}^{a_i}) \mathbf{R}_{k,j-1}^{a_i}(z) = \mathbf{R}_{k,j+1}^{a_i}(z) - \mathbf{R}_{k,j+1}^{a_i}(z) \mathbf{V}_k^{a_i} \mathbf{X}_{kj}^{a_i} \mathbf{R}_{k,j-1}^{a_i}(z).$$

Отсюда с учетом уравнений (42), записанных в форме

$$(\mathbf{X}_k^{a_i} + \mathbf{R}_{k,j+1}^{a_i}(z) \mathbf{V}_k^{a_i} \mathbf{X}_{k,j+1}^{a_i})^{-1} \mathbf{R}_{k,j+1}^{a_i}(z) = \mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z),$$

получаем искомые уравнения на $(j-1)$ -м шаге:

$$\mathbf{R}_{k,j-1}^{a_i}(z) = \mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z) - \mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z) \mathbf{V}_k^{a_i} \mathbf{X}_{kj}^{a_i} \mathbf{R}_{k,j-1}^{a_i}(z).$$

Это завершает доказательство справедливости уравнений (42).

Уравнения (41) для операторов $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ формально получаются из уравнений (42) при $j = k - 1$ с отождествлением $\mathbf{R}_{k,k-1}^{a_i}(z) = \mathbf{R}_k^{a_i}(z)$. Однако уравнения (41) можно получить и независимо от (42), повторяя практически дословно этапы вывода уравнений (42). Чтобы избежать повторения, мы не будем приводить здесь это доказательство, и справедливость уравнений (41) будем считать доказанной.

На следующем этапе мы построим операторы, для которых $\mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z)$ и $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ являются резольвентами.

5.1. Дифференциальные уравнения для компонент резольвенты. Рассмотрим оператор

$$\mathbf{H}_{kj}^{a_i} = H_0 \mathbf{I}_k^{a_i} + \mathbf{V}_k^{a_i} + \mathbf{V}_k^{a_i} \sum_{m=j+1}^{N-1} \mathbf{X}_{km}^{a_i}.$$

В координатном представлении в силу равенства $H_0 = -\Delta_{\mathbf{X}}$ оператор $\mathbf{H}_{kj}^{a_i}$ является матричным дифференциальным оператором, действующим на вектор-функции, компоненты которых классифицируются цепочками разбиений A_k . Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 4. *Оператор $\mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z)$ является резольвентой оператора $\mathbf{H}_{kj}^{a_i}$:*

$$(\mathbf{H}_{kj}^{a_i} - z \mathbf{I}_k^{a_i}) \mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z) = \mathbf{I}_k^{a_i}. \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $j = N - 1$ уравнение (45) принимает вид

$$(H_0 + V_{a_{N-1}} - zI) R_{a_{N-1}}(z) = I,$$

и тем самым в силу определения $R_{a_{N-1}}(z) = (H_0 + V_{a_{N-1}} - zI)^{-1}$ равенство (45) справедливо при $j = N - 1$. Предположим, что равенство (45) выполнено на j -м шаге. Рассмотрим оператор $\mathbf{R}_{k,j-1}^{a_i}(z)$, удовлетворяющий уравнению (42) при замене $j \rightarrow j - 1$. Применяя оператор $\mathbf{H}_{kj}^{a_i} - z \mathbf{I}_k^{a_i}$ к обеим частям данного уравнения, получим

$$(\mathbf{H}_{kj}^{a_i} - z \mathbf{I}_k^{a_i}) \mathbf{R}_{k,j-1}^{a_i}(z) = \mathbf{I}_k^{a_i} - \mathbf{V}_k^{a_i} \mathbf{X}_{kj}^{a_i} \mathbf{R}_{k,j-1}^{a_i}(z),$$

что совпадает с уравнением (45) на $(j - 1)$ -м шаге. Тем самым мы показали справедливость уравнения (45) при любом j . Лемма доказана.

Найдем теперь оператор, для которого $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ является резольвентой. Рассмотрим оператор $\mathbf{H}_k^{a_i} = \mathbf{H}_{kk}^{a_i} + \mathbf{V}_k^{a_i} \mathbf{X}_{kk}^{a_i}$.

ЛЕММА 5. *Оператор $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ является резольвентой оператора $\mathbf{H}_k^{a_i}$:*

$$(\mathbf{H}_k^{a_i} - z \mathbf{I}_k^{a_i}) \mathbf{R}_k^{a_i}(z) = \mathbf{I}_k^{a_i}. \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (46) немедленно следует из уравнений (41) и леммы 4 при $j = k$.

Нам осталось доказать сформулированное в разделе 2 коммутационное свойство

$$R_{A_k B_k}^{a_i}(z) V_{b_{N-1}} = R_0(z) M_{A_k B_k}^{a_i}(z),$$

которое в матричной форме принимает вид

$$\mathbf{R}_k^{a_i}(z) \mathbf{V}_k^{a_i} = \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z) \mathbf{M}_k^{a_i}(z). \quad (47)$$

Сначала докажем аналогичное равенство для операторов $\mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z)$ и $\mathbf{M}_{kj}^{a_i}(z)$.

ЛЕММА 6. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z)\mathbf{V}_k^{a_i} = \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)\mathbf{M}_{kj}^{a_i}(z). \quad (48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $j = N - 1$ равенство (48) эквивалентно соотношению

$$R_{a_{N-1}}(z)V_{a_{N-1}} = R_0(z)T_{a_{N-1}}(z)$$

для парных резольвенты и T -матрицы. Для обоснования справедливости перехода $j \rightarrow j - 1$ запишем в матричной форме уравнения для операторов $M_{AjBj}^{a_{j-1}}(z)$:

$$\mathbf{M}_{k,j-1}^{a_i}(z) = \mathbf{M}_{kj}^{a_i}(z) - \mathbf{M}_{kj}^{a_i}(z)\mathbf{X}_{kj}^{a_i}\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)\mathbf{M}_{k,j-1}^{a_i}(z).$$

Домножая это равенство слева на $\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)$ и пользуясь формулой (48), получаем уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)\mathbf{M}_{k,j-1}^{a_i}(z) &= \mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z)\mathbf{V}_k^{a_i}(\mathbf{I}_k^{a_i} - \mathbf{X}_{kj}^{a_i}\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)\mathbf{M}_{k,j-1}^{a_i}(z)), \\ (\mathbf{H}_{kj}^{a_i} - z\mathbf{I}_k^{a_i})\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)\mathbf{M}_{k,j-1}^{a_i}(z) + \mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{X}_{kj}^{a_i}\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)\mathbf{M}_{k,j-1}^{a_i}(z) &= \mathbf{V}_k^{a_i}, \end{aligned}$$

которые эквивалентны

$$\mathbf{R}_{k,j-1}^{a_i}(z)\mathbf{V}_k^{a_i} = \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)\mathbf{M}_{k,j-1}^{a_i}(z).$$

Лемма доказана.

Равенство (47) следует теперь из уравнения (48) при $j = k$ и уравнений (40) и (41). Тем самым соотношение (47) доказано.

Заметим, что формула (48) позволяет переписать уравнение (41) в форме

$$\mathbf{R}_k^{a_i}(z) = \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z) - \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)\mathbf{M}_{kk}^{a_i}(z)\mathbf{X}_{kk}^{a_i}\mathbf{R}_k^{a_i}(z).$$

Как отмечалось выше, уравнения (46) представляют собой дифференциальные уравнения для компонент резольвенты. Запишем их в явном виде:

$$\begin{aligned} (H_0 - z)R_{A_k B_k}^{a_i}(z) + V_{a_{N-1}}R_{A_k B_k}^{a_i}(z) + V_{a_{N-1}} \sum_{j=k+1}^{N-1} \sum'_{(C_j \neq A_j) \subset a_{j-1}} R_{A_k^{j-1} C_j B_k}^{a_i}(z) + \\ + V_{a_{N-1}} \sum_{d_k \neq a_k} \sum'_{(D_{k+1} \neq A_{k+1}) \subset a_k} R_{D_k B_k}^{a_i}(z) = I\delta_{A_k B_k}, \end{aligned} \quad (49)$$

где $H_0 = -\Delta_{\mathbf{x}}$ и $V_{a_{N-1}}$ – оператор умножения на потенциал $V_{a_{N-1}}(\mathbf{x}_{a_{N-1}})$. Уравнения (49) являются обобщением на случай N частиц системы дифференциальных уравнений Фаддеева [27], [28] для $N = 3$. Самые сложные уравнения, отвечающие полному гамильтониану H системы N тел, получаются из уравнений (49) при $i = 1$ и $k = 2$.

Обсудим свойства однородной системы уравнений, отвечающей (49):

$$\begin{aligned} (H_0 - z)U_{A_k}^{a_i} + V_{a_{N-1}}U_{A_k}^{a_i} + V_{a_{N-1}} \sum_{j=k+1}^{N-1} \sum'_{(C_j \neq A_j) \subset a_{j-1}} U_{A_k^{j-1} C_j}^{a_i} + \\ + V_{a_{N-1}} \sum_{d_k \neq a_k} \sum'_{(D_{k+1} \neq A_{k+1}) \subset a_k} U_{D_k}^{a_i} = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Покажем, что эта система не имеет нетривиальных решений при $\text{Im } z \neq 0$. Перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} (H_0 - z)U_{A_k}^{a_i} + V_{a_{N-1}}U_{A_k}^{a_i} + V_{a_{N-1}} \sum_{j=k+2}^{N-1} \sum'_{(C_j \neq A_j) \subset a_{j-1}} U_{A_k^{j-1}C_j}^{a_i} + \\ + V_{a_{N-1}} \sum'_{(D_{k+1} \neq A_{k+1}) \subset a_k} U_{D_{k+1}}^{a_i} = 0, \end{aligned} \quad (51)$$

где введено обозначение

$$\sum_{a_k \subset a_i} U_{A_k}^{a_i} = U_{A_{k+1}}^{a_i}.$$

Суммируя уравнения (51) по всем $a_k \subset a_i$, получим более простую систему для компонент $U_{A_{k+1}}^{a_i}$, которая получается из (50) заменой k на $k+1$. Продолжая описанную процедуру суммирования, придем к еще более простой системе для компонент $U_{A_{k+2}}^{a_i}$ и т. д. На последнем шаге останется лишь одна компонента $U^{a_i} = \sum_{A_k} U_{A_k}^{a_i}$, удовлетворяющая уравнению Шредингера

$$(H_{a_i} - z)U^{a_i} = 0.$$

В силу самосопряженности оператора H_{a_i} решение последнего уравнения тривиально при $\text{Im } z \neq 0$, т. е. $U^{a_i} = 0$.

Покажем теперь, что величины

$$U_{a_{N-1}}^{a_i} = \sum_{A_k^{N-2}} U_{A_k}^{a_i}$$

равны нулю. Действительно, $U_{a_{N-1}}^{a_i}$ удовлетворяют уравнениям

$$(H_0 - z)U_{a_{N-1}}^{a_i} = -V_{a_{N-1}} \sum_{b_{N-1}} U_{b_{N-1}}^{a_i},$$

откуда в силу тождества $U^{a_i} = \sum_{b_{N-1}} U_{b_{N-1}}^{a_i} \equiv 0$ и самосопряженности оператора H_0 следует, что $U_{a_{N-1}}^{a_i} = 0$. По этой причине из уравнения (51) при $k = N-2$ мы получаем для компонент $U_{A_{N-2}}^{a_i}$ уравнения

$$(H_{a_i} + V_{a_{N-1}} - z)U_{A_{N-2}}^{a_i} = 0,$$

и, как и раньше, $U_{A_{N-2}}^{a_i} = 0$. Продолжая эти рассуждения, заключаем, что все $U_{A_k}^{a_i}$ равны нулю. Тем самым доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Спектр операторов $\mathbf{H}_k^{a_i}$ является вещественным: уравнения*

$$(\mathbf{H}_k^{a_i} - z\mathbf{I}_k^{a_i})\mathbf{U}_k^{a_i} = 0 \quad (52)$$

при $\text{Im } z \neq 0$ имеют лишь тривиальные решения.

Данная теорема позволяет получить связь между операторами $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ и $\mathbf{M}_k^{a_i}(z)$. Построим оператор $\mathbf{G}_k^{a_i}(z)$ по формуле

$$\mathbf{G}_k^{a_i}(z) = -\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)\mathbf{M}_k^{a_i}(z)\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z).$$

Из уравнений (40) и (48) получаем следующее уравнение для оператора $\mathbf{G}_k^{a_i}(z)$:

$$\mathbf{G}_k^{a_i}(z) = -\mathbf{R}_{kk}^{a_i}(z)\mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z) - \mathbf{R}_{kk}^{a_i}(z)\mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{X}_k^{a_i}\mathbf{G}_k^{a_i}(z)$$

или, в “дифференциальной” форме,

$$(\mathbf{H}_{kk}^{a_i} - z\mathbf{I}_k^{a_i} + \mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{X}_{kk}^{a_i})\mathbf{G}_k^{a_i}(z) = -\mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z). \quad (53)$$

Это уравнение для $\mathbf{G}_k^{a_i}(z)$ и уравнение (46) для $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ отличаются лишь свободным членом. Поэтому естественно предположить, что $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ выражается линейно через $\mathbf{G}_k^{a_i}(z)$. Действительно, справедливо такое утверждение.

ЛЕММА 7. *Для операторов $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ при любом z , $\text{Im } z \neq 0$, верно представление*

$$\mathbf{R}_k^{a_i}(z) = \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z) + \mathbf{G}_k^{a_i}(z)\mathbf{Y}_k^{a_i}, \quad (54)$$

где

$$\mathbf{Y}_k^{a_i} = \mathbf{I}_k^{a_i} + \sum_{m=k}^{N-1} \mathbf{X}_{km}^{a_i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор $\widehat{\mathbf{R}}_k^{a_i}(z) = \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z) + \mathbf{G}_k^{a_i}(z)\mathbf{Y}_k^{a_i}$. Прямое вычисление приводит к уравнению

$$(\mathbf{H}_k^{a_i} - z\mathbf{I}_k^{a_i})\widehat{\mathbf{R}}_k^{a_i}(z) = \mathbf{I}_k^{a_i}.$$

Отсюда, с учетом того что уравнения (52) имеют только тривиальные решения, следует соотношение (54). Лемма доказана.

Запишем формулу (54) в терминах операторов $\mathbf{M}_k^{a_i}$:

$$\mathbf{R}_k^{a_i}(z) = \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z) - \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)\mathbf{M}_k^{a_i}(z)\mathbf{Y}_k^{a_i}\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z). \quad (55)$$

Это равенство является обобщением на случай матричных операторов $\mathbf{H}_k^{a_i}$ стандартного соотношения $R(z) = R_0(z) - R_0(z)T(z)R_0(z)$ между резольвентой и T -матрицей для операторов вида $H = H_0 + V$. По этой причине оператор

$$\mathbf{T}_k^{a_i}(z) = \mathbf{M}_k^{a_i}(z)\mathbf{Y}_k^{a_i} \quad (56)$$

естественно назвать T -матрицей для матричного оператора $\mathbf{H}_k^{a_i}$. Равенства (55) допускают естественное обращение

$$\mathbf{T}_k^{a_i}(z) = \mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{Y}_k^{a_i} - \mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{Y}_k^{a_i}\mathbf{R}_k^{a_i}(z)\mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{Y}_k^{a_i},$$

и это соотношение вновь является обобщением на матричный случай стандартной формулы $T(z) = V - VR(z)V$.

5.2. Дифференциальные уравнения для компонент волновых функций.

Операторы $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ позволяют построить собственные функции непрерывного спектра операторов $\mathbf{H}_k^{a_i}$ аналогично тому, как это было сделано в разделе 3. Будем рассматривать полную систему N частиц, которой отвечает случай $i = 1$, $k = 2$ и опускать в обозначениях индекс a_1 . Как и в разделе 3, собственные функции оператора $\mathbf{H}_2$ определяются с помощью подходящих пределов функции $\mathbf{R}_2(z)$ на

вещественной оси плоскости переменной z . Будем рассматривать пределы функции $\mathbf{R}_2(z)$ на верхнем берегу разреза по вещественной оси. Соответствующие функции при этом следует снабдить значком плюс, но мы не будем его указывать, чтобы не перегружать обозначения.

В выбранном нами случае собственные функции непрерывного спектра классифицируются начальными состояниями системы N тел. Вновь будем использовать функции $\chi_{a_l}(\mathbf{p}_{a_l})$, соответствующие l свободным кластерам, $2 \leq l < N$, и функцию $\chi_0(\mathbf{P})$, соответствующую N свободным частицам (см. раздел 3). Введем вектор-функции $\Psi^{B_2^l}(\mathbf{p}_{b_l})$ с компонентами

$$\psi_{A_2}^{B_2^l}(\mathbf{p}_{b_l}) = \chi_{A_{l+1}}^{a_l}(\mathbf{p}_{a_l}) \delta_{a_l b_l} \dots \delta_{a_2 b_2}$$

и вектор-функции $\Psi_0^{B_2}(\mathbf{P})$ с компонентами

$$\psi_{A_2}^{B_2}(\mathbf{P}) = \chi_0(\mathbf{P}) \delta_{a_{N-1} b_{N-1}} \dots \delta_{a_2 b_2}.$$

Здесь $\chi_{A_{l+1}}^{a_l}$ — компоненты функции χ_{a_l} , построенные по формулам (16).

Собственные функции непрерывного спектра оператора $\mathbf{H}_2$ определяются как пределы

$$\begin{aligned} \Phi^{B_2^l}(\mathbf{p}_{b_l}) &= - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} i\epsilon \mathbf{R}_2(E_{b_l} + i\epsilon) \Psi^{B_2^l}(\mathbf{p}_{b_l}), \\ \Phi^{B_2}(\mathbf{P}) &= - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} i\epsilon \mathbf{R}_2(E_0 + i\epsilon) \Psi_0^{B_2}(\mathbf{P}), \end{aligned} \quad (57)$$

где $E_{b_l} = \mathbf{p}_{b_l}^2 - \varepsilon_{b_l}$, $E_0 = \mathbf{P}^2$. Используя формулу (46) при $k = 2$, $i = 1$, получаем из соотношений (57) уравнения

$$(\mathbf{H}_2 - E_{b_l} \mathbf{I}_2) \Phi^{B_2^l}(\mathbf{p}_{b_l}) = 0, \quad (58)$$

$$(\mathbf{H}_2 - E_0 \mathbf{I}_2) \Phi^{B_2}(\mathbf{P}) = 0, \quad (59)$$

которые являются обобщением трехчастичных дифференциальных уравнений Фаддеева [14] на случай системы N частиц. Явная форма уравнений (58) и (59) имеет вид (50) при $z = E_{b_l}$ и $z = E_0$ соответственно. Собственные функции $\Psi_{b_l}^{(+)}$ и $\Psi_0^{(+)}$ оператора H (см. формулы (24) и (27)) можно восстановить по компонентам функций $\Phi^{B_2^l}$ и Φ^{B_2} с помощью суммирования:

$$\Psi_{b_l}^{(+)} = \sum_{A_2} \varphi_{A_2}^{B_2^l}, \quad \Psi_0^{(+)} = \sum_{A_2} \varphi_{A_2}^{B_2}.$$

Для однозначного определения компонент волновых функций в конфигурационном пространстве уравнения (58) и (59) необходимо дополнить асимптотическими граничными условиями. Эти условия, как и в разделе 4, можно получить с помощью исследования преобразований Фурье соответствующих объектов в импульсном пространстве. Аналогично разделу 4 приведем окончательный результат для компонент функций $\Phi^{B_2^l}$ при $l = 2$. В этом случае цепочка B_2^l вырождается в одно разбиение b_2 , фиксирующее начальное состояние системы. Асимптотический вид компонент функций $\Phi^{b_2}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2})$ повторяет (38) и дается выражением

$$\varphi_{A_2}^{b_2}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2}) = \psi_{A_3}^{a_2}(\mathbf{x}_{a_2}) e^{i(\mathbf{p}_{a_2}, \mathbf{y}_{a_2})} \delta_{a_2 b_2} + \sum_{i=2}^n \psi_{A_{i+1}}^{a_i}(\mathbf{x}_{a_i}) U_{a_i b_2}^{A_{i-1}}(\mathbf{y}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2}),$$

где $\psi_{A_{i+1}}^{a_i}$ – компоненты собственной функции ψ^{a_i} оператора h_{a_i} , построенные по формулам (16). Функции $U_{a_i b_2}^{A^{i-1}}(\mathbf{y}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2})$ при $|\mathbf{y}_{a_i}| \rightarrow \infty$ переходят в сферические волны:

$$U_{a_i b_2}^{A^{i-1}}(\mathbf{y}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2}) \sim C_{3(i-1)}(E_{a_i b_2}) \mathcal{H}_{a_i b_2}^{A^{i-1}}(\sqrt{E_{a_i b_2}} \hat{\mathbf{y}}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2}, E_{b_2} + i0) \times \\ \times |\mathbf{y}_{a_i}|^{-(3i-4)/2} e^{i\sqrt{E_{a_i b_2}} |\mathbf{y}_{a_i}|},$$

где

$$E_{a_i b_2} = E_{b_2} + \varepsilon_{a_i} = \mathbf{p}_{b_2}^2 - \varepsilon_{b_2} + \varepsilon_{a_i}, \quad C_n(E) = -2\pi^2 E^{(n-3)/4} e^{-i\pi(n-3)/4}.$$

Амплитуды $U_{a_i b_2}^{A^{i-1}}$ и $\mathcal{H}_{a_i b_2}^{A^{i-1}}$ связаны с соответствующими амплитудами $U_{a_i b_2}^+$ и $\mathcal{H}_{a_i b_2}$ из (38) и (39) формулами

$$U_{a_i b_2}^+ = \sum_{A^{i-1}} U_{a_i b_2}^{A^{i-1}}, \quad \mathcal{H}_{a_i b_2} = \sum_{A^{i-1}} \mathcal{H}_{a_i b_2}^{A^{i-1}}.$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дано обобщение формализма уравнений Фаддеева в интегральной и дифференциальной формах на случай N частиц. Построены N -частичные матричные операторы, обобщающие операторы матричных дифференциальных уравнений Фаддеева для трех частиц. Для этих операторов построены резольвенты и T -матрицы, представляющие собой обобщение трехчастичных компонент Фаддеева для резольвенты и T -матрицы трехчастичного гамильтониана.

Благодарности. Работа поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1292.2014.1) и РФФИ (грант № 14-02-00326).

Список литературы

- [1] Л. Д. Фаддеев, *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц*, Тр. МИАН СССР, **69**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1963.
- [2] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985.
- [3] S. Weinberg, *Phys. Rev. B*, **133**:1 (1964), 232–256.
- [4] L. Rosenberg, *Phys. Rev. B*, **140**:1 (1965), 217–226.
- [5] A. N. Mitra, J. Gillespie, B. Sugar, N. Panchapakesan, *Phys. Rev. B*, **140**:5 (1965), 1336–1338.
- [6] V. A. Alessandrini, *J. Math. Phys.*, **7**:2 (1966), 213–220.
- [7] J. Weyers, *Phys. Rev.*, **145**:4 (1966), 1236–1242.
- [8] N. Mishima, J. Takahashi, *Prog. Theor. Phys.*, **35**:3 (1966), 440–451.
- [9] R. Omnes, *Phys. Rev.*, **165**:4 (1968), 1265–1272.
- [10] О. А. Якубовский, *ЯФ*, **5**:6 (1967), 1312–1320.
- [11] О. А. Якубовский, *Тр. МИАН СССР*, **110** (1970), 146–177.
- [12] К. Нерп, *Helv. Phys. Acta*, **42** (1969), 425–458.
- [13] С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев, *Докл. АН СССР*, **262**:3 (1982), 591–594.
- [14] С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев, *ТМФ*, **56**:1 (1983), 60–73.
- [15] С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев, *ЯФ*, **39**:6 (1984), 1580–1587.
- [16] S. P. Merkuriev, S. L. Yakovlev, C. Gignoux, *Nucl. Phys. A*, **431**:1 (1984), 125–138.

- [17] А. А. Квицинский, Ю. А. Куперин, С. П. Меркурьев, А. К. Мотовилов, С. Л. Яковлев, *ЭЧАЯ*, **17**:2 (1986), 267–317.
- [18] С. Л. Яковлев, *ТМФ*, **82**:2 (1990), 224–241.
- [19] С. П. Меркурьев, А. К. Мотовилов, С. Л. Яковлев, *ТМФ*, **94**:3 (1993), 435–447.
- [20] В. А. Руднев, С. Л. Яковлев, *ЯФ*, **58**:10 (1995), 1762–1771.
- [21] С. Л. Яковлев, *ТМФ*, **102**:3 (1995), 323–336.
- [22] С. Л. Яковлев, *ТМФ*, **107**:3 (1996), 513–528.
- [23] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [24] С. Л. Яковлев, З. Папп, *ТМФ*, **163**:2 (2010), 314–327.
- [25] И. М. Народецкий, О. А. Якубовский, “Интегральные уравнения теории рассеяния для N частиц”, *Проблема нескольких тел в ядерной физике*, ОИЯИ, Дубна, 1980, 183–226.
- [26] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 3: *Теория рассеяния*, Мир, М., 1982.
- [27] Н. Р. Noyes, Н. Fiedeldey, “Calculations of three-nucleon low-energy parameters”, *Three-Particle Scattering in Quantum Mechanics*, eds. J. Gillespie, J. Nuttall, W. A. Benjamin, New York, Amsterdam, 1968, 195–293.
- [28] S. P. Merkuriev, C. Gignoux, A. Laverne, *Ann. Phys.*, **99**:1 (1976), 30–71.

Поступила в редакцию 16.02.2014