Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Багдерина, Эквивалентность обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка уравнениям Пенлеве, *ТМФ*, 2015, том 182, номер 2, 256–276

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8657>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:59:31

© 2015 г.

Ю. Ю. Багдерина*

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯМ ПЕНЛЕВЕ

Все уравнения Пенлеве, кроме первого, принадлежат одному типу уравнений. В терминах инвариантов этих уравнений получены критерии эквивалентности второму уравнению Пенлеве и уравнению XXXIV из списка пятидесяти уравнений, не имеющих подвижных критических точек. Для третьего, четвертого, а также для частных случаев пятого и шестого уравнений Пенлеве найдены новые необходимые условия эквивалентности. Проведено сопоставление используемых инвариантов с инвариантами, введенными ранее другими авторами, и сравнение полученных результатов.

Ключевые слова: уравнение Пенлеве, эквивалентность, инвариант.

DOI: 10.4213/tmf8657

1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимые и достаточные условия эквивалентности обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (1.1)$$

относительно точечных замен переменных

$$z = \varphi(x, y), \quad w = \psi(x, y), \quad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad (1.2)$$

можно найти с помощью инвариантов рассматриваемого класса уравнений [1]–[4], так как эквивалентные уравнения должны иметь совпадающие множества абсолютных инвариантов. Ли показал [5], что уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = S(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3R(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3Q(x, y) \frac{dy}{dx} + P(x, y) \quad (1.3)$$

*Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: yulya@mail.rb.ru

образуют замкнутое относительно преобразований (1.2) семейство внутри класса уравнений (1.1). Проблема эквивалентности уравнений (1.3) привлекает большое внимание [6]–[14], поскольку семейство (1.3) содержит все 50 уравнений (см. монографию [15], гл. 14), полученных при классификации ОДУ второго порядка, которые не имеют подвижных критических точек [16], [17], в том числе шесть уравнений Пенлеве.

Проблема эквивалентности ОДУ второго порядка первому и второму уравнениям Пенлеве исследовалась в работах [2], [18]–[21]. Также найдены некоторые необходимые условия эквивалентности третьему [22] и четвертому [14], [22], [23] уравнениям Пенлеве. В работе [24] доказано, что все уравнения Пенлеве можно привести к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y) \quad (1.4)$$

и показано, что только специальные замены переменных

$$\tilde{x} = k \int \phi^2(x) dx + x_0, \quad \tilde{y} = \phi(x)y + \chi(x), \quad k, x_0 = \text{const}, \quad k, \phi(x) \neq 0, \quad (1.5)$$

не выводят уравнение (1.4) за пределы данного класса.

В общем случае может оказаться, что уравнение (1.3) нельзя привести каким-либо преобразованием (1.2) к виду (1.4). Приводимыми к виду (1.4) являются уравнения, для которых обращаются в нуль относительные инварианты v_5 , w_1 , введенные в работе [6] (см. также [22], [24]). К таким вырожденным уравнениям неприменимы результаты работ [7], [9], [12]. В статье [10] методами дифференциальной геометрии исследованы как вырожденные, так и невырожденные типы уравнений (1.3). При этом оказались пропущенными некоторые базисные инварианты. Сравнение с результатами работы [10] с инвариантами, полученными в [14], проведено в общем (невырожденном) случае в разделе 1 статьи [14], а в вырожденном случае, к которому относятся пять из шести уравнений Пенлеве, – в разделе 7 настоящей работы. В работе [13] с использованием метода Картана [8] проблема эквивалентности уравнений (1.3) решена полностью. Однако, как и в статье [24], результат из работы [13] применим к уравнениям (1.3) вырожденного типа ($v_5 = w_1 = 0$) только после приведения их к виду (1.4).

В работе [14] с использованием инфинитезимального метода Ли проблема эквивалентности уравнений (1.3) также решена полностью. Для шести типов уравнений (1.3) найден базис инвариантов, зависящих от x , y , и операторы инвариантного дифференцирования, с помощью которых можно получить любой инвариант уравнения (1.3). Еще три типа уравнений (1.3) вырождены настолько, что не имеют абсолютных инвариантов. Один из них содержит все линеаризуемые уравнения второго порядка, другой – уравнения, допускающие трехмерную алгебру Ли точечных симметрий. Согласно этой классификации первое уравнение Пенлеве

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = 6w^2 + z \quad (1.6)$$

является уравнением шестого типа, а остальные пять уравнений Пенлеве относятся к четвертому типу уравнений (1.3).

Проблема эквивалентности уравнения (1.6) подробно изучена, поэтому настоящая статья посвящена уравнениям четвертого типа. В разделе 2 описаны инварианты

таких уравнений. Сравнение с инвариантами из работы [6] дано в разделе 3. Необходимые условия эквивалентности третьему и четвертому уравнениям Пенлеве получены в [22] с использованием серии абсолютных инвариантов $j_{2(m+1)}$, основанной на инвариантах, введенных Лиувиллем. В разделе 3 предложена модифицированная серия инвариантов J_m , в терминах которых эти условия принимают более простой вид. Найдены новые необходимые условия эквивалентности для третьего, четвертого и некоторых частных случаев пятого и шестого уравнений Пенлеве, а также для уравнения XXXIV из списка в монографии [15], которое связано дифференциальной подстановкой со вторым уравнением Пенлеве. В разделе 4 получены критерии эквивалентности второму уравнению Пенлеве и уравнению XXXIV. Необходимые условия эквивалентности четвертому уравнению Пенлеве, найденные в работе [14], переформулированы в разделе 5 с использованием универсальных инвариантов J_m . Раздел 6 содержит примеры применения полученных результатов к уравнению (1.4). В разделе 7 они используются, чтобы показать, что в статье [23] получены только необходимые условия эквивалентности, но не достаточные.

2. ИНВАРИАНТЫ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ТИПА

В настоящем разделе воспроизведена часть классификации ОДУ второго порядка из теоремы 2 статьи [14], касающаяся уравнений четвертого типа, к которому, в частности, относятся пять из шести уравнений Пенлеве. Их абсолютные инварианты образованы с помощью относительных инвариантов

$$\begin{aligned}
 J_0 &= \frac{1}{3}(\beta_2\Gamma_0 - \beta_1\Gamma_1), \\
 j_0 &= \frac{3}{\beta_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\delta_{10} - \delta_{11}\right) + \frac{6\gamma_{10}}{\beta_1^2}\left(\gamma_{11} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\gamma_{10}\right), \\
 j_1 &= \frac{5}{6}\left(2\beta_2\delta_{20} - \beta_1\delta_{30} - \frac{\beta_2^2}{\beta_1}\delta_{10}\right) + \\
 &\quad + \left(\gamma_{20} + \gamma_{11} - 2\frac{\beta_2}{\beta_1}\gamma_{10}\right)\left(\gamma_{20} - \frac{2}{3}\gamma_{11} - \frac{\beta_2}{3\beta_1}\gamma_{10}\right), \\
 j_2 &= \frac{1}{\beta_1}\left(\delta_{20} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\delta_{10}\right) + \frac{\gamma_{10}}{5\beta_1^2}\left(7\frac{\beta_2}{\beta_1}\gamma_{10} - 6\gamma_{20} - \gamma_{11}\right), \\
 j_3 &= \frac{3}{5}\left(\frac{\delta_{10}}{\beta_1^3} - \frac{6\gamma_{10}^2}{5\beta_1^4}\right),
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

которые, в свою очередь, вычисляются с помощью величин

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= Q_x - P_y + 2PR - 2Q^2, \\
 \alpha_1 &= R_x - Q_y + PS - QR, \quad \beta_1 = \alpha_{1x} - \alpha_{0y} + R\alpha_0 - 2Q\alpha_1 + P\alpha_2, \\
 \alpha_2 &= S_x - R_y + 2QS - 2R^2, \quad \beta_2 = \alpha_{2x} - \alpha_{1y} + S\alpha_0 - 2R\alpha_1 + Q\alpha_2, \\
 \gamma_{10} &= \beta_{1x} - Q\beta_1 + P\beta_2, \quad \delta_{10} = \gamma_{10x} - 2Q\gamma_{10} + P(\gamma_{20} + \gamma_{11}) - 5\alpha_0\beta_1, \\
 \gamma_{20} &= \beta_{1y} - R\beta_1 + Q\beta_2, \quad \delta_{20} = \gamma_{20x} - R\gamma_{10} + P\gamma_{21} - 4\alpha_1\beta_1 - \alpha_0\beta_2, \\
 \gamma_{11} &= \beta_{2x} - R\beta_1 + Q\beta_2, \quad \delta_{11} = \gamma_{11x} - R\gamma_{10} + P\gamma_{21} - \alpha_1\beta_1 - 4\alpha_0\beta_2, \\
 \gamma_{21} &= \beta_{2y} - S\beta_1 + R\beta_2, \quad \delta_{30} = \gamma_{20y} - S\gamma_{10} + Q\gamma_{21} - 4\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2, \\
 \Gamma_0 &= 3\beta_2\gamma_{10} + \beta_1(\gamma_{20} - 4\gamma_{11}), \quad \Gamma_1 = \beta_2(4\gamma_{20} - \gamma_{11}) - 3\beta_1\gamma_{21}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

ТЕОРЕМА 1. Уравнение (1.3) четвертого типа характеризуется соотношениями

$$J_0 = 0, \quad \beta_1 \neq 0, \quad j_0 = 0, \quad j_1 \neq 0. \quad (2.3)$$

Базис его инвариантов образуют величины

$$I_1 = \frac{\Gamma_0}{\beta_1 \sqrt{j_1}}, \quad I_2 = \frac{5(2j_1 j_3 + j_2^2)}{\sqrt{j_1}}. \quad (2.4)$$

Произвольный инвариант уравнения (1.3) четвертого типа можно получить, применяя к (2.4) функционально-алгебраические операции и операторы инвариантного дифференцирования

$$\mathcal{D}_1 = \frac{1}{\sqrt{j_1}}(\beta_2 \partial_x - \beta_1 \partial_y), \quad \mathcal{D}_2 = j_1^{1/4} \left(\frac{5j_2}{2j_1}(\beta_2 \partial_x - \beta_1 \partial_y) - \frac{3}{\beta_1} \partial_x \right). \quad (2.5)$$

Инварианты всех уравнений четвертого типа удовлетворяют соотношениям

$$5I_1^2 I_{112} + (15I_{11} - 7I_1^2 - 18)I_1 I_{12} - 8I_1 I_{221} - 12I_{21}^2 + 60I_1(5I_{11} - 2I_1^2 - 6) + \\ + \left(5I_1 I_{111} + 5I_{11}^2 - (13I_1^2 + 18)I_{11} + \frac{6}{5}(2I_1^4 + 11I_1^2 + 12) \right) I_2 = 0, \quad (2.6)$$

$$(10I_1 \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 - 10I_1 \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 + 10I_{21} \mathcal{D}_1 + (6 + 4I_1^2 - 5I_{11}) \mathcal{D}_2) I_{j_1 j_2 \dots j_n} = 0; \quad (2.7)$$

здесь $j_1, j_2, \dots, j_n = 1, 2$ и $n \in \mathbb{N}$.

В теореме 1 и далее используются обозначения

$$I_{ij} = \mathcal{D}_i I_j, \quad I_{kij} = \mathcal{D}_k(\mathcal{D}_i I_j), \quad I_{lkij} = \mathcal{D}_l(\mathcal{D}_k(\mathcal{D}_i I_j)), \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

для производных инвариантов, полученных из (2.4) инвариантными дифференцированиями. Далее в статье, если не оговорено иное, под инвариантами подразумеваются инварианты уравнений четвертого типа (для уравнений (1.3) других типов величины (2.4) инвариантами не являются).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Соотношения (2.6), (2.7) и их дифференциальные следствия выполняются для любого уравнения четвертого типа. Такие “тривиальные” соотношения можно исключать из необходимых условий эквивалентности, так как они не отражают существенных свойств исследуемого уравнения, отличающих его от других уравнений того же типа. Однако они бывают полезны при доказательстве достаточности условий эквивалентности, позволяя выразить часть инвариантов через другие инварианты.

3. СОПОСТАВЛЕНИЕ С ИНВАРИАНТАМИ ЛИУВИЛЛЯ

Имеет место следующее соответствие между величинами Π_{ik} ($i, k = 1, 2$), L_1 , L_2 , R_1 и относительными инвариантами v_5 , w_1 , i_2 , i_4 , рассмотренными в [6], [22], [24], с одной стороны, и величинами (2.2) и относительными инвариантами (2.1) – с другой:

$$\Pi_{11} = -\alpha_0, \quad \Pi_{12} = -\alpha_1, \quad \Pi_{22} = -\alpha_2, \quad L_1 = -\beta_1, \quad L_2 = -\beta_2, \\ R_1 = \beta_1 \gamma_{11} - \beta_2 \gamma_{10}, \quad v_5 = J_0, \quad w_1 = \frac{j_0}{3} + P \frac{J_0}{\beta_1^3}.$$

Если $v_5 = 0$, $w_1 = 0$, $L_1 \neq 0$, что соответствует первым трем условиям (2.3), то

$$i_2 \equiv 3 \frac{R_1}{L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} = \frac{\Gamma_0}{\beta_1}, \quad i_4 = \frac{6}{5} j_1 + \frac{4}{5} \frac{\Gamma_0^2}{\beta_1^2}.$$

Серия абсолютных инвариантов $j_{2(m+1)}$ из работы [22] в терминах инварианта I_1 и оператора $\mathcal{D}_1$, определенных формулами (2.4), (2.5), принимает вид

$$j_4 \equiv \frac{i_4}{i_2^2} = \frac{2}{5} \left(2 + \frac{3}{I_1^2} \right), \quad j_{2(m+1)} = m j_4 j_{2m} + \frac{1}{I_1} \mathcal{D}_1 j_{2m}, \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (3.1)$$

Соотношения для инвариантов третьего и четвертого уравнений Пенлеве, найденные в работе [22], становятся более короткими, если вместо (3.1) выразить их в терминах серии абсолютных инвариантов

$$J_1 = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{I_1^2} - 1 \right), \quad J_{m+1} = (m + (m+1)J_1)J_m + \frac{1}{I_1} \mathcal{D}_1 J_m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Если, кроме того, вместо I_{12} рассматривать инвариант

$$I_3 = I_1^2(I_{12} + 30) + I_1 I_2 \left(I_{11} - \frac{3}{5} I_1^2 - \frac{12}{5} \right), \quad (3.3)$$

то тривиальное соотношение (2.6) принимает вид

$$5\mathcal{D}_1 I_3 - 5(J_1 + 2)I_1 I_3 - 8I_1 I_{221} - 12I_{21}^2 - 180I_1 = 0. \quad (3.4)$$

ТЕОРЕМА 2. Если уравнение (1.3) эквивалентно одному из следующих уравнений того же вида, то оно является уравнением четвертого типа и его инварианты (3.2) удовлетворяют следующим соотношениям.

1. В случае уравнения XXXIV из книги [15] с параметром $\alpha \neq 0$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{1}{2w} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + 4\alpha w^2 - zw - \frac{1}{2w}, \quad \alpha = \text{const}, \quad (3.5)$$

– соотношениям

$$5J_2^2 - 35J_1 J_2 + 49J_1^3 = 0, \quad (3.6)$$

$$7J_1 J_3 - 8J_2^2 = 0, \quad 5J_3 - 40J_2 + 56J_1^2 = 0. \quad (3.7)$$

2. В случае второго уравнения Пенлеве

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = 2w^3 + zw + \gamma, \quad \gamma = \text{const}, \quad (3.8)$$

– соотношениям

$$J_m = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

3. В случае третьего уравнения Пенлеве

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{1}{w} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 - \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \frac{\alpha w^2 + \beta}{z} + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{const}, \quad (3.10)$$

где по крайней мере один из четырех параметров отличен от нуля, – соотношениям

$$4(J_3 + J_4)^2 + 25(J_1 + J_2)(J_1J_4 - J_2J_3) = 0, \quad (3.11)$$

$$(J_1 + J_2)J_5 - J_3(J_3 + J_4) + J_1(J_2J_3 - J_1J_4) = 0, \quad (3.12)$$

$$4(J_5 + J_6) + 21(J_1J_4 - J_2J_3) = 0. \quad (3.13)$$

В следующих частных случаях необходимо, чтобы инварианты удовлетворяли дополнительным соотношениям:

3.1) если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то

$$4J_3(J_3 + 2J_2 + J_1^2)^2 + J_1^2J_2(18J_3 - 25J_2) - (4J_3 + J_2^2)^2 - \\ - J_1J_3(4J_3 - 40J_2 - 5J_1^2) - J_1J_2^2(11J_3 + 10J_2 + 20J_1^2) = 0; \quad (3.14)$$

3.2) если $\gamma = 0$ или $\delta = 0$, то

$$4J_3(J_3 + 2J_2 + J_1^2)^2 + J_1^2J_2(18J_3 - 25J_2) - (J_3 + 4J_2^2)^2 + \\ + J_1J_2^2(4J_3 - 40J_2 - 5J_1^2) + J_1J_3(11J_3 + 10J_2 + 20J_1^2) = 0; \quad (3.15)$$

3.3) если $\alpha^2\delta + \beta^2\gamma = 0$, то

$$4(J_3 + 2J_2 + 2J_1 + J_1^2)^3 - (J_1 + J_2)^3(9J_2 + 18J_1 + 8) - \\ - 3(3J_1 + 4)(J_1 + J_2)^2(J_3 + 2J_2 + 2J_1 + J_1^2) = 0, \quad (3.16)$$

$$(J_3 + 3J_2 + 3J_1 + J_1^2)(4(J_3 + J_4) + 5J_1(J_1 + J_2)) - 15(J_1 + J_2)^3 = 0, \quad (3.17)$$

$$4J_5 + 12(J_3 + J_4) + 9J_1J_3 - 15J_2(J_1 + J_2) + 5J_1^3 = 0; \quad (3.18)$$

3.4) если $\alpha^2\delta - \beta^2\gamma = 0$, то

$$(5J_1J_2 + 4J_2^2 - J_3)(5J_1J_2 + J_2^2 - 4J_3)^2 + 12(3J_3 + 5J_2)(J_3 - J_1J_2)^3 + \\ + 12J_3(3J_1 + 7)(J_1 + J_2)(J_3 - J_1J_2)^2 + \\ + 3J_3(8J_2 + 25J_1)(J_1 + J_2)^2(J_3 - J_1J_2) = 0, \quad (3.19)$$

$$(J_3 - J_1J_2)[4(3J_1 + 1)(J_3 + J_4) - 5(J_1 + J_2)(3J_3 + J_2)] + \\ + (J_1 + J_2)(25J_1 + 9J_2)(J_3 + J_4) - 5(J_1 + J_2)^2(5J_3 + J_2^2) = 0; \quad (3.20)$$

3.5) если $\alpha = \beta = 0$ или $\gamma = \delta = 0$, то

$$J_1 + J_2 = 0; \quad (3.21)$$

3.6) если $\alpha = \gamma = 0$ или $\beta = \delta = 0$, то

$$2J_2^2 + (13J_1 + 9)J_2 - (9J_1 + 7)J_1^2 = 0, \quad 2J_3 + 9J_2 - 7J_1^2 = 0; \quad (3.22)$$

3.7) если $\alpha = \delta = 0$ или $\beta = \gamma = 0$, то

$$2J_2^2 + (3J_1 - 1)J_2 + (J_1 + 3)J_1^2 = 0, \quad 2J_3 - J_2 + 3J_1^2 = 0; \quad (3.23)$$

3.8) если только один из параметров отличен от нуля, то

$$J_m = (-1)^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.24)$$

4. В случае четвертого уравнения Пенлеве

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{1}{2w} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \frac{3}{2} w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w}, \quad \alpha, \beta = \text{const}, \quad (3.25)$$

необходимо, чтобы инварианты удовлетворяли соотношениям

$$(15J_3^2 - 28J_1^2 J_3 + 49J_1 J_2^2)(15J_1 J_3 + 105(J_1 + J_2)J_2 - 28J_1^3) - \\ - 7(15(J_1 + J_2)J_3 - 7J_1^2 J_2)^2 = 0, \quad (3.26)$$

$$J_4(15J_1 J_3 + 105(J_1 + J_2)J_2 - 28J_1^3) - 9J_3(15(J_1 + J_2)J_3 - 7J_1^2 J_2) = 0, \quad (3.27)$$

$$9J_3 J_5 - 10J_4^2 = 0, \quad 7J_1 J_5 + 70J_2 J_4 - 90J_3^2 = 0, \quad (3.28)$$

$$3(J_6 - 11J_5) + 22(9J_2 J_3 - 4J_1 J_4) = 0; \quad (3.29)$$

если $\beta = 0$ в (3.25), то необходимо, чтобы инварианты удовлетворяли дополнительным соотношениям

$$3J_2^2 + 3J_1 J_2 - J_1^3 = 0, \quad J_3 = 0. \quad (3.30)$$

5. В частных случаях пятого уравнения Пенлеве

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1} \right) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 - \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \frac{(w-1)^2}{z^2} \left(\alpha w + \frac{\beta}{w} \right) + \gamma \frac{w}{z} + \delta \frac{w(w+1)}{w-1}, \quad (3.31)$$

в котором по крайней мере один из четырех параметров отличен от нуля, необходимо, чтобы инварианты удовлетворяли:

5.1) соотношениям (3.11)–(3.13), (3.16)–(3.18), если $\alpha = \beta = 0$;

5.2) если $\gamma = \delta = 0$, то соотношению

$$8(7243135690J_9 + 38548189509J_8 - 1819377159197J_7) + \\ + 46J_1(12993173899635J_2 J_4 - 272198191484J_7) + 117704250439089J_3 J_4 + \\ + 49(1701078247969J_2 J_6 + 3208234325805J_4^2) - 226497872825578J_5 J_3 + \\ + 25J_1(4661605865023J_6 - 8369243120477J_1 J_5) - 431747404655529J_1 J_3^2 + \\ + 22J_2(394220317641J_2 J_3 - 8330998935605J_5) = 0; \quad (3.32)$$

5.3) соотношениям (3.11)–(3.21), если $\alpha = \beta = 0$, $\gamma\delta = 0$;

5.4) если $\gamma = \delta = 0$, $\alpha\beta(\alpha + \beta) = 0$, то соотношениям

$$6125J_2^3(35J_2 + 353J_1) + 648J_2(1775J_2^2 + 8610J_1 J_2 + 5843J_1^2) + \\ + 375J_1^2 J_2^2(14547 - 2107J_1) + 150J_1^4(2048J_1^2 - 22627J_2) - 2001928J_1^4 + \\ + 5J_1^3(134683J_2 - 346593J_1^2) + 374544(3J_2^2 + 3J_1 J_2 - J_1^3) = 0, \quad (3.33)$$

$$5(103J_5 + 6347J_2^2) + 1205(J_4 - 22J_1 J_3) + \\ + 63(1417J_1 J_2 - 513J_3) - 51037J_1^3 = 0. \quad (3.34)$$

6. В каждом из трех частных случаев шестого уравнения Пенлеве

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z} \right) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z} \right) \frac{dw}{dz} + \\ + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2} \left(\alpha - \beta \frac{z}{w^2} + \gamma \frac{z-1}{(w-1)^2} + \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \frac{z(z-1)}{(w-z)^2} \right), \quad (3.35)$$

а именно:

6.1) если только один из параметров отличен от нуля,

6.2) если два параметра равны нулю, а другие два отличны от нуля и равны друг другу,

6.3) если $\alpha = \beta = \gamma = \delta \neq 0$,

необходимо, чтобы инварианты удовлетворяли соотношениям

$$\begin{aligned} & (J_3 + J_2 + J_1^2)(15J_3 + 45J_2 + 11J_1^2)^2 - 210J_1^2 J_2(5J_3 + 24J_2) + \\ & + 675J_1(J_3 + J_2)(2J_3 + 6J_2 + 3J_1) - 30J_2(11J_1 J_2 J_3 + 4J_2^3 + 43J_1^3) + \\ & + 75J_1^3(20J_3 - 9J_1) - 17J_1 J_2^2(90J_2 + 19J_1^2) - 1004J_1^4 J_2 + 205J_1^5 = 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} & J_1 J_5 + 4(5J_2 J_4 - 46J_1^2 J_3) + 15(2J_1 J_4 - 3J_3^2 - 10J_2 J_3) + \\ & + 35(J_1 - 1)(3J_1 J_3 + 3J_2^2 + 3J_1 J_2 - J_1^3) = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инварианты эквивалентных уравнений должны удовлетворять одинаковым соотношениям. Соотношения для инвариантов (3.2) уравнений (3.5), (3.8), (3.10), (3.25), (3.31), (3.35) находятся прямыми вычислениями.

1. Для уравнения (3.5) инварианты (3.2) равны

$$J_m = \frac{(m+5)!(4\alpha w^3 - 1)^m}{24(4\alpha w^3 + 5)^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.38)$$

Исключение величины αw^3 из первых трех равенств (3.38) приводит к соотношениям (3.6), (3.7).

2. Для уравнения (3.8) имеем $I_1 = 1$, и условия (3.9) следуют из (3.2).

3. Для уравнения (3.10) инварианты (3.2) равны

$$\begin{aligned} J_m &= (-1)^m \frac{K_0^m K_{m+1}}{K_1^{m+1}}, \\ K_{m-1} &= 2^{m+1} \gamma z w^4 + \alpha w^3 + (-1)^{m+1} \left(2^{m+1} \delta z + \beta w \right), \end{aligned} \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.39)$$

Поскольку образующие инварианты (3.39) полиномы K_{m-1} однородны по четырём аргументам αw^3 , βw , $\gamma z w^4$, δz , их исключение из первых шести равенств (3.39) даёт три соотношения (3.11)–(3.13). Соотношения (3.14)–(3.24) получаются из (3.39) при соответствующих значениях параметров.

4. Для уравнения (3.25) инварианты (3.2) равны

$$\begin{aligned} J_1 &= -30(w^4 + 2\beta) \frac{K_0}{K_1^2}, \quad J_2 = 30(w^4 - 14\beta) \frac{K_0^2}{K_1^3}, \\ J_m &= -\frac{\beta(m+5)! K_0^m}{12K_1^{m+1}}, \quad m = 3, 4, \dots, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где используются обозначения

$$K_0 = 4zw^3 + 5w^4 + 2\beta, \quad K_1 = 4zw^3 + 15w^4 - 10\beta. \quad (3.41)$$

Инварианты (3.40) образованы полиномами, однородными по трем аргументам zw^3 , w^4 , β . Их исключение из первых шести равенств (3.40) приводит к соотношениям (3.26)–(3.29). Как следует из (3.40), J_3 обращается в нуль при $\beta = 0$. При подстановке $J_3 = 0$ в соотношение (3.26) оно сводится к первому из равенств (3.30).

5. Для уравнения (3.31) первые два инварианта (3.2) равны

$$J_1 = -2 \frac{K_0 K_2}{K_1^2}, \quad J_2 = 2 \frac{K_0^2 K_3}{K_1^3}. \quad (3.42)$$

Образующие их полиномы

$$\begin{aligned} K_0 &= \Gamma + \Delta(w+1) + A(3w-2) + B(3-2w), \\ K_1 &= \Gamma(w+1) + \Delta(w^2+6w+1) - A(15w^2-15w+2) - B(2w^2-15w+15), \\ K_2 &= 2\Gamma w + 8\Delta w(w+1) + Aw(45w^2-60w+17) + B(17w^2-60w+45), \\ K_3 &= 2\Gamma w(w+1) + 8\Delta w(w^2+6w+1) - Aw(315w^3-525w^2+231w-17) + \\ &\quad + B(17w^3-231w^2+525w-315) \end{aligned}$$

однородны по аргументам $A = \alpha w^3(w-1)^3$, $B = \beta(w-1)^3$, $\Gamma = \gamma zw^3(w-1)$, $\Delta = 4\delta z^2 w^3$ и неоднородны по w . Этим свойством обладают и остальные инварианты (3.2) уравнения (3.31). Случаи 5.1, 5.3 следуют из известного результата [24] о редукции ОДУ (3.31) к уравнению (3.10) и проверяются подстановкой инвариантов (3.2) уравнения (3.31) в соотношения (3.11)–(3.21). Если только один из параметров ОДУ (3.31) отличен от нуля, то его инварианты (3.2) зависят только от w , и исключение w из (3.42) приводит к (3.21) (если $\gamma \neq 0$ или $\delta \neq 0$) или (3.33) (если $\alpha \neq 0$ или $\beta \neq 0$). В последнем случае можно получить более простое соотношение (3.34), если использовать первые пять инвариантов (3.2). Если $\gamma = \delta = 0$, а α , β произвольны, то исключение переменных A , B , w дает наиболее короткое соотношение, а именно (3.32), при использовании девяти инвариантов (3.2).

6. Для уравнения (3.35) инварианты (3.2) представляют собой отношение полиномов, однородных по α , β , γ , δ и неоднородных по z , w . Если параметры уравнения удовлетворяют условиям п. 6.1, 6.2 или 6.3 теоремы, то эти инварианты зависят только от z , w . Тогда исключение переменных z , w из выражений для первых трех инвариантов (3.2) приводит к (3.36). Более простое соотношение (3.37) можно получить, если использовать пять инвариантов (3.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Приведенным в теореме 2 условиям удовлетворяют не только уравнения (3.5), (3.8), (3.10), (3.25), (3.31), (3.35), но и соответствующие автономные уравнения XXXIII, VIII, XII, XXX, XXXVIII, XLIX из книги [15]. Для уравнений (3.5), (3.10) и (3.25) в случае произвольных значений их параметров существенными являются условия (3.6), (3.11) и (3.26) соответственно. Остальные соотношения в случаях 1, 3 и 4 являются их дифференциальными следствиями. Условия (3.9), (3.13), (3.18), (3.21), (3.24), (3.29) и вторые условия в (3.22), (3.23), (3.30) были ранее получены в статье [22] в терминах инвариантов (3.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для общего случая пятого и шестого уравнений Пенлеве возможности пакетов символьных вычислений в настоящее время не позволяют получить необходимые условия эквивалентности прямым исключением величин α , β , γ , δ , z и w из выражений для инвариантов (3.2) этих уравнений.

4. КРИТЕРИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВТОРОМУ УРАВНЕНИЮ ПЕНЛЕВЕ И УРАВНЕНИЮ XXXIV

Инвариантная характеристика (необходимые условия эквивалентности) для первого, второго, четвертого уравнений Пенлеве и уравнения XXXIV получена в работе [14]. В настоящей работе мы установим достаточность этих условий для уравнений (3.5), (3.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Базисные инварианты (2.4) всех уравнений Пенлеве, кроме первого и второго, удовлетворяют условию $\partial(I_1, I_2)/\partial(z, w) \neq 0$. В этом случае, если рассматривать шесть инвариантов

$$I_1, \quad I_2, \quad I_{11}, \quad I_{21}, \quad I_{12}, \quad I_{22}, \quad (4.1)$$

то инвариантная характеристика уравнения представляет собой четыре соотношения на инварианты (4.1) (и, быть может, параметры уравнения) и два соотношения, содержащие z, w , из которых можно найти замену переменных (1.2), связывающую два эквивалентных уравнения. Применяя операторы (2.5) к четырем соотношениям для инвариантов (4.1), можно получить еще восемь соотношений на инварианты (4.1) и восемь инвариантов $I_{11j}, I_{21j}, I_{12j}, I_{22j}, j = 1, 2$. Нетрудно видеть, что при нахождении критериев эквивалентности не имеет смысла вовлекать в рассмотрение инварианты $\mathcal{D}_k \mathcal{D}_i I_j$ и производные инварианты более высокого порядка, так как соотношения с ними будут следствиями соотношений для инвариантов $I_j, \mathcal{D}_i I_j, i, j = 1, 2$. При этом вместо I_{11}, I_{12} целесообразно применять инварианты J_2, J_3 , определяющиеся формулами (3.2), (3.3), а наряду с I_1 использовать инвариант J_1 (как это сделано в (3.4)). Также применение других инвариантов (3.2) в дополнение к (4.1) позволяет выразить результаты в более простой форме.

ТЕОРЕМА 3. Уравнение (1.3) эквивалентно второму уравнению Пенлеве тогда и только тогда, когда оно является уравнением четвертого типа и его инварианты удовлетворяют условиям

$$I_1 = 1, \quad I_{122} - 3I_{22} = 0, \quad I_{222} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{I_{22}}(2I_2 - I_{12} - 32) = \gamma = \text{const}, \quad \frac{\partial(I_{12} - 3I_2, I_{22})}{\partial(x, y)} \neq 0. \quad (4.3)$$

Замена переменных (1.2), преобразующая такое уравнение (1.3) в уравнение (3.8), находится из соотношений

$$w^3 = -\frac{3\sqrt{3}}{2I_{22}}, \quad \frac{z}{w^2} = I_2 - 16 - \frac{I_{12}}{3}. \quad (4.4)$$

ТЕОРЕМА 4. Уравнение (1.3) эквивалентно уравнению XXXIV с $\alpha \neq 0$ тогда и только тогда, когда оно является уравнением четвертого типа и его инварианты удовлетворяют условиям

$$5J_2^2 - 35J_1J_2 + 49J_1^3 = 0, \quad I_{21} = 0, \quad \frac{\partial(I_1, I_2)}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad (4.5)$$

$$(7J_1 + 5J_2)J_2J_3 + 6J_2^2I_1I_2 + 28(14J_1^2 + 35J_1 - 5J_2) = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{7^9 J_1^{10} (6J_2 - 7J_1^2)^2}{160I_1^7 I_{22}^2 J_2^9 (J_2 + 7J_1^2)^2} = \alpha^2 = \text{const} \neq 0. \quad (4.7)$$

Замена переменных (1.2), преобразующая такое уравнение (1.3) в уравнение (3.5), находится из соотношений

$$w^6 = \frac{250I_1^7 I_{22}^2 J_2^9}{7^{11} J_1^{14}} (J_2 + 7J_1^2)^2, \quad zw^2 = \frac{5J_2^3 I_3}{343J_1^4} + \frac{90J_2}{7J_1^2} - \frac{27}{2}. \quad (4.8)$$

Доказательство этих двух утверждений приводится в приложении.

5. ИНВАРИАНТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЧЕТВЕРТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

В настоящем разделе получены необходимые условия эквивалентности уравнению (3.25) с использованием шести инвариантов (4.1) и инварианта J_3 , который зависит от I_1, I_{11}, I_{111} . Применяются обозначения (3.2), (3.3), а также

$$I_4 = (5I_{11} + 6I_1^2 - 6) \frac{I_{22}}{I_{21}} + 6I_1 I_2 - 5I_{12}, \quad I_5 = (2I_{11} + I_1^2 - 1) \frac{I_{22}}{I_{21}} + (10I_{11} - I_1^2 + 1) \frac{I_2}{5I_1} \quad (5.1)$$

и

$$\nu_0 = 245(3J_2 - J_1^2)J_2^2 + 7(15J_2^2 - 30J_1 J_2 + 16J_1^3)J_3 - 15(4J_1 + 15)J_3^2,$$

$$\nu_1 = \nu_0 + 7J_1 J_2 (35J_2^2 - 16J_1 J_3) + 15(J_2 - 4J_1)J_3^2,$$

$$\nu_2 = J_2 \nu_0 - 7J_1 \nu_1$$

$$\nu_3 = 7J_1 \nu_0^2 + 18\nu_0 \nu_1 - 15\nu_1^2,$$

$$N_0 = 6(5J_2 + 5J_1^2 + 13J_1)\nu_0^2 + (120J_1 - 25J_2 + 186)\nu_0 \nu_1 - 15(5J_1 + 6)\nu_1^2,$$

$$N_1 = (5J_1 + 6)\nu_0(J_1^2 \nu_0^2 - 30J_2 \nu_0 \nu_1 + 90J_1 \nu_1^2) - 450J_2 \nu_0 \nu_1^2 + 450(17J_1 + 12)\nu_1^3,$$

$$N_2 = (2J_2 + 15J_1^2)\nu_0^2 + 58J_1 \nu_0 \nu_1 + 3(7 - 10J_1)\nu_1^2,$$

$$N_3 = (J_2 + J_1^2)(6\nu_0 - 5\nu_1)^2 - 6J_1^2(5J_1 + 19)\nu_0^2 - 156J_1 \nu_0 \nu_1 + 6(5J_1 - 7)\nu_1^2,$$

$$N_4 = -(99J_2 + 17J_1^2)\nu_0^2 + 3(J_2 + 166J_1)\nu_0 \nu_1 + 18(80 - 17J_1)\nu_1^2.$$

ТЕОРЕМА 5. *Чтобы уравнение (1.3) было эквивалентно четвертому уравнению Пенлеве, необходимо, чтобы оно являлось уравнением четвертого типа и его инварианты удовлетворяли условиям*

$$J_3 \nu_0^2 - 7J_2 \nu_0 \nu_1 - 7J_1 \nu_1^2 = 0, \quad (5.2)$$

$$5I_1^3 \nu_2 \nu_3^2 (5I_3 \nu_1^3 (\nu_0 + 5\nu_1) + 30I_1 I_2 \nu_1^4 + 4\nu_0^2 (J_1 \nu_0^2 + 15\nu_1^2)) + 288I_{21}^2 \nu_0^3 \nu_1^4 N_0 = 0, \quad (5.3)$$

$$5I_1^5 \nu_2 \nu_3^2 (5(I_4 \nu_1 - 3I_5 \nu_0) \nu_1^2 \nu_2 + 2\nu_0 N_1) + 12^3 I_{21}^2 \nu_0^3 \nu_1^4 ((5J_1 + 6)N_2 - 3N_3) = 0, \quad (5.4)$$

$$-\frac{I_1^9 \nu_0^3 \nu_2^4 \nu_3^2 (J_2 \nu_0 + J_1 \nu_1)}{5 \cdot 3^8 \cdot 2^{15} I_{21}^2 \nu_1^{12}} = \beta = \text{const}, \quad (5.5)$$

$$\frac{5I_1^9 \nu_2 \nu_3^2}{12^8 I_{21}^2 \nu_0^3 \nu_1^8} \left(8I_3 \nu_1^2 \nu_2 + \nu_0 N_4 + \frac{3^3 \cdot 2^8 I_{21}^2 \nu_0^2 \nu_1^4}{25 I_1^3 \nu_2 \nu_3^2} N_3 \right)^2 = \alpha^2 = \text{const}, \quad (5.6)$$

$$I_{21} \neq 0, \quad \nu_i \neq 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad \frac{\partial(I_1, I_2)}{\partial(x, y)} \neq 0. \quad (5.7)$$

Если уравнения (1.3), (3.25) эквивалентны, то связывающая их замена переменных (1.2) находится из соотношений

$$w^4 = \frac{I_1^9 \nu_0^3 \nu_2^5 \nu_3^2}{5 \cdot 3^8 \cdot 2^{14} I_{21}^2 \nu_1^{12}}, \quad \frac{z}{w} = \frac{5}{\nu_0 \nu_2} (12\nu_1^2 + 5J_1 \nu_0 \nu_1 - J_2 \nu_0^2). \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если уравнения (1.3) и (3.25) эквивалентны, то их инварианты совпадают и, следовательно, удовлетворяют одним и тем же соотношениям. Найдем соотношения для инвариантов (4.1) и J_3 уравнения (3.25). Инвариант I_1 , его производные J_2 , J_3 , I_{21} , а также J_1 зависят от zw^3 , w^4 , β следующим образом:

$$J_1 = -30 \frac{K_0 K_2}{K_1^2}, \quad J_2 = 15(K_1 - K_0 - 8K_2) \frac{K_0^2}{K_1^3}, \quad J_3 = 105(K_1 - K_0 - 10K_2) \frac{K_0^3}{K_1^4}, \quad (5.9)$$

$$I_1 = \frac{K_1}{\sqrt{K_1^2 - 25K_0 K_2}}, \quad \frac{I_{21}^2}{I_1^9} = \frac{625}{3072 K_1^7} (K_1 - K_0 + 6K_2)^4 (6K_1 - 5K_0 - 70K_2)^2. \quad (5.10)$$

Здесь используются обозначения (3.41) и $K_2 = w^4 + 2\beta$. Инварианты I_2 , I_{12} , I_{22} , помимо zw^3 , w^4 , β , зависят также от αw^2 . Вместо I_2 , I_{12} рассмотрим инвариант (3.3),

$$I_3 = \frac{3K_1}{8K_0^2} \left(32\alpha w^2 + \frac{32(K_2 - K_0)(K_1 + 5K_2)}{K_1 - K_0 + 6K_2} + \frac{(K_1 - K_0 + 6K_2)^2 K_3}{36(K_1^2 - 25K_0 K_2)^3} + K_1 - K_0 + 30K_2 \right), \quad (5.11)$$

где

$$K_3 = 5K_1(K_1 - K_0 + 6K_2)(5K_0 - 6K_1)(6K_1 - 5K_0 - 70K_2) + 2(K_1^2 - 25K_0 K_2)(7K_1^2 - 570K_1 K_2 + 150K_0 K_2 + 5400K_2^2),$$

и инвариант $5I_3 + 6I_1 I_2 = -12\alpha w^2 K_1^2 K_0^{-3} + \dots$, в котором слагаемые, не содержащие α , для краткости заменены многоточием. Комбинация этих инвариантов

$$5I_3 + 6I_1 I_2 + \frac{K_1}{K_0} I_3 = \frac{K_1^2}{K_0^3} \left[\frac{5(K_1 - K_0 + 6K_2)^3 (15K_0 + 390K_2 - 31K_1)}{48(K_1^2 - 25K_0 K_2)^2} + 24K_2 - 12K_0 - \frac{125K_0(K_1 - K_0 + 6K_2)^4 (6K_1 - 5K_0 - 70K_2)}{96(K_1^2 - 25K_0 K_2)^3} \right] \quad (5.12)$$

не зависит от α . Аналогично вместо I_{22} вводятся инварианты (5.1), выбранные так, чтобы их комбинация не зависела от α :

$$I_4 - 3 \frac{K_1}{K_0} I_5 = - \frac{72(K_1^2 - 25K_0 K_2)(K_0^2 + K_0 K_1 + 2K_0 K_2 + 2K_2^2)}{K_0^3 (K_1 - K_0 + 6K_2)} + \frac{180K_1}{K_0} + \frac{(K_1 - K_0 + 6K_2)^2 K_4}{16K_0^3 (K_1^2 - 25K_0 K_2)^2}, \quad (5.13)$$

где

$$K_4 = 2(K_1^2 - 25K_0 K_2)(K_1 - 30K_2)(10K_0 + 150K_2 - 17K_1) - K_3.$$

Исключая K_1 , K_2 из (5.9), можно получить выражения

$$K_1 = \frac{\nu_0}{\nu_1} K_0, \quad K_2 = - \frac{J_1 \nu_0^2}{30 \nu_1^2} K_0 \quad (5.14)$$

и соотношение (3.26), которое в терминах ν_0, ν_1 представимо в виде (5.2), или

$$J_2\nu_0^3 - 4J_1\nu_0^2\nu_1 - 15\nu_0\nu_1^2 + 15\nu_1^3 = 0. \quad (5.15)$$

Подставив (5.14) во второе соотношение (5.10), можно найти

$$K_0 = \frac{I_1^9\nu_0\nu_2^4\nu_3^2}{3^7 \cdot 2^{10}I_{21}^2\nu_1^9}. \quad (5.16)$$

Подстановка формул (5.14), а затем (5.16) в соотношения (5.12), (5.13) и равенства

$$\beta = \frac{1}{32}(K_0 - K_1 + 10K_2), \quad w^4 = \frac{1}{16}(K_1 - K_0 + 6K_2), \quad zw^3 = \frac{1}{16}(5K_0 - K_1 - 10K_2)$$

в силу (5.15) приводит к соотношениям (5.3)–(5.5), (5.8). Если из (5.11) выразить αw^2 , возвести в квадрат, сделать подстановки (5.14), (5.16) и заменить w^4 с учетом (5.8), то получаем соотношение (5.6). Теорема доказана.

6. ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР 1. Применяя теоремы 2 и 4, нетрудно показать, что ОДУ

$$\frac{d^2\tilde{y}}{d\tilde{x}^2} = 2\alpha\tilde{y}^3 - \frac{\tilde{x}}{2}\tilde{y} - \frac{1}{4\tilde{y}^3}, \quad \alpha = \text{const} \neq 0, \quad (6.1)$$

с точностью до преобразований вида (1.5) представляет собой наиболее общее уравнение вида (1.4), эквивалентное уравнению XXXIV. Подобное уравнение часто возникает в приложениях, например в теории струн [25] или при редукции нелинейного уравнения Шредингера с линейным потенциалом [11].

Действительно, для уравнения (1.4) имеем

$$J_m = (-1)^m f_{yy}^m f_{yy}^{-m-1} \frac{\partial^{m+3} f}{\partial y^{m+3}}$$

и, интегрируя (3.6), (3.7), получаем

$$f(x, y) = b_0 + b_1y + 3b_2b_3y^2 + b_3y^3 + b_4(y + b_2)^{-3}, \quad b_i = b_i(x), \quad i = 0, \dots, 4. \quad (6.2)$$

Для ОДУ (1.4) с правой частью (6.2) второе из условий (4.5), $I_{21} = 0$, превращается в $b'_4 = 0$. Тогда при условии, что $b_4 = \text{const}$, равенство (4.6) сводится к

$$b_0 = b_1b_2 - 2b_2^3b_3 - b_2'', \quad (6.3)$$

а из (4.7) следует, что $b_3 \neq 0$, $b_4 \neq 0$ и

$$b_1 = 3b_2^2b_3 - \frac{b_3''}{6b_3} + \frac{7b_3'^2}{36b_3^2} + c_1b_3^{2/3} \left(c_2 + \int b_3^{1/3} dx \right), \quad (6.4)$$

$$-\frac{b_4}{4c_1^2} = \alpha^2, \quad c_1, c_2 = \text{const}.$$

Уравнение (1.4) с правой частью, заданной соотношениями (6.2)–(6.4), преобразованием вида (1.5)

$$\tilde{x} = -(2c_1)^{1/3} \left(c_2 + \int b_3^{1/3} dx \right), \quad \tilde{y} = \frac{(2b_3)^{1/6}}{2c_1^{1/3} \sqrt{\alpha}} (y + b_2)$$

сводится к ОДУ (6.1). Для этого уравнения соотношения (4.8) имеют вид $w^6 = \tilde{y}^{12}$, $zw^2 = \tilde{x}\tilde{y}^4$. Отсюда нетрудно найти замену переменных

$$z = \tilde{x}, \quad w = \tilde{y}^2, \quad (6.5)$$

которая преобразует ОДУ (6.1) в уравнение (3.5).

ПРИМЕР 2. В качестве другого примера найдем наиболее общее (с точностью до преобразований (1.5)) уравнение (1.4), удовлетворяющее необходимым условиям эквивалентности четвертому уравнению Пенлеве, сформулированным в теоремах 2 и 5. Интегрируя равенства (3.26), (3.28) или, что то же самое, соотношение (5.2), получим

$$f(x, y) = b_0 + b_1 y + (3b_2 b_3 - 20b_2^3 b_5) y^2 + b_3 y^3 + 5b_2 b_5 y^4 + b_5 y^5 + b_4 (y + b_2)^{-3}, \quad (6.6)$$

где $b_i = b_i(x)$, $i = 0, \dots, 5$. Из соотношений (5.5)–(5.7) следует, что

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{3b_3^2}{16b_5} - \frac{3}{4}b_2^2 b_3 - \frac{25}{4}b_2^4 b_5 - \frac{b_5''}{8b_5} + \frac{9b_5'^2}{64b_5^2} + c_1 \sqrt{b_5}, \\ b_3 &= 10b_2^2 b_5 + c_3 b_5^{3/4} \left(c_2 + \int b_5^{1/4} dx \right), \quad c_1, c_2, c_3 = \text{const}, \\ b_5 &\neq 0, \quad c_3 \neq 0, \quad \frac{128b_4}{9c_3^2} = \beta, \quad \frac{16c_1^2}{3c_3^2} = \alpha^2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из последних двух соотношений в (6.7) можно выразить b_4 и c_1 :

$$b_4 = \frac{9c_3^2}{128}\beta, \quad c_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\kappa c_3 \alpha, \quad \kappa = \pm 1. \quad (6.8)$$

Уравнение (1.4) с правой частью, определяющейся формулами (6.6)–(6.8), заменой переменных вида (1.5)

$$\tilde{x} = \frac{3^{1/4}}{2} \sqrt{\kappa c_3} \left(c_2 + \int b_5^{1/4} dx \right), \quad \tilde{y} = \frac{2}{3^{3/8}} (\kappa c_3)^{-1/4} b_5^{1/8} (y + b_2)$$

преобразуется в ОДУ

$$\frac{d^2 \tilde{y}}{d\tilde{x}^2} = \frac{3}{4} \tilde{y}^5 + 2\tilde{x} \tilde{y}^3 + (\tilde{x}^2 - \alpha) \tilde{y} + \frac{\beta}{2\tilde{y}^3} + a(\tilde{x}) \quad (6.9)$$

с некоторой функцией $a(\tilde{x})$. Для этого ОДУ условие (5.3) сводится к

$$a(\tilde{x}) = 0. \quad (6.10)$$

Оставшееся условие (5.4) в силу (6.10) превращается в тождество, а соотношения (5.8) имеют вид $w^4 = \tilde{y}^8$, $zw^{-1} = \tilde{x}\tilde{y}^{-2}$. Из них находится замена переменных (6.5), которая преобразует ОДУ (6.9) в уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2w} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w} + 2a(z)\sqrt{w}.$$

Таким образом, ОДУ (6.9) эквивалентно четвертому уравнению Пенлеве, только если для него выполнено условие (6.10).

ОДУ (6.9) с $a(\tilde{x}) = 0$ и преобразование (6.5), связывающее его с четвертым уравнением Пенлеве, полностью совпадают с результатом из работы [24], что свидетельствует о достаточности условий (5.2), (5.3), (5.5)–(5.7), сформулированных в теореме 5.

7. СОПОСТАВЛЕНИЕ С ИНВАРИАНТАМИ ШАРИПОВА

Имеет место следующее соответствие между псевдоинвариантами A, B, F, G, H , рассмотренными в работах [10], [23], [26], и величинами (2.1), (2.2):

$$A = \beta_1, \quad B = \beta_2, \quad F^5 = -J_0, \quad G = \Gamma_1, \quad H = -\Gamma_0.$$

Если $F = 0$, $A \neq 0$, что соответствует первым двум условиям (2.3) (условие $B \neq 0$ превращается в $A \neq 0$ после применения к уравнению преобразования годографа), то псевдоскалярные поля N, Ω, M из раздела 4 работы [10] равны

$$N = \frac{\Gamma_0}{3\beta_1}, \quad \Omega = -\frac{j_0}{3}, \quad M = \frac{2}{5}j_1.$$

ОДУ четвертого типа, изучающиеся в настоящей работе, соответствуют первому случаю промежуточного вырождения из раздела 5 работы [10] и характеризуются соотношениями

$$F = 0, \quad A \neq 0, \quad \Omega = 0, \quad M \neq 0. \quad (7.1)$$

В дальнейшем инварианты I_j из работ [10], [23], [26] мы будем обозначать через i_j . Для уравнений четвертого типа компоненты псевдовекторного поля γ из статьи [10] имеют вид

$$\gamma^1 = \frac{2j_1}{5\beta_1} - \frac{\beta_2 j_2}{3}, \quad \gamma^2 = \frac{\beta_1 j_2}{3},$$

а базисные инварианты в терминах инвариантов (2.4), (3.2), (3.3) равны

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{18}{5I_1^2} = 3J_1 + \frac{18}{5}, & i_2 &= 0, \\ i_3 &= \frac{I_{12}}{18} + \frac{I_2}{90I_1}(5I_{11} - 3I_1^2 - 6) + \frac{5}{3} = \frac{I_3}{18I_1^2} + \frac{I_2}{15I_1}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Производные инварианты, вычисляющиеся по формулам

$$i_{j+3} = \frac{Bi_{jx} - Ai_{jy}}{N}, \quad j = 1, 3, \quad i_7 = \frac{(\gamma^1 i_{1x} + \gamma^2 i_{1y})^2}{N^3}, \quad i_{10} = \frac{Bi_{4x} - Ai_{4y}}{N},$$

принимают вид

$$i_4 = -\frac{108I_{11}}{5I_1^4} = 9(J_2 - J_1 - 2J_1^2), \quad i_6 = \frac{3}{I_1}\mathcal{D}_1 i_3, \quad i_7 = \frac{2^6 \cdot 3^5 I_{21}^2}{625I_1^9},$$

$$i_{10} = \frac{324}{5I_1^6}(4I_{11}^2 - I_1 I_{111}) = 27(J_3 - (7J_1 + 3)J_2 + J_1(2J_1 + 1)(4J_1 + 1)).$$

Нетрудно видеть, что среди базисных инвариантов (7.2) отсутствует инвариант I_2 , имеется только его комбинация с производным инвариантом I_{12} (как и в невырожденном случае, рассмотренном в разделе 1 работы [14]). Это затрудняет получение достоверных результатов по проблеме эквивалентности с использованием инвариантов, введенных Шариповым. Характерный пример представляет собой работа [23], где формулируются критерии эквивалентности для четвертого уравнения Пенлеве и при этом отсутствует доказательство достаточности полученных условий. Несложно показать, что соответствующие утверждения из статьи [23] критериями не являются, а представляют собой только некоторые необходимые условия эквивалентности.

В частности, в теоремах 1, 2 из работы [23] в качестве необходимых и достаточных условий эквивалентности ОДУ (1.3) уравнению (3.25) указаны условия (7.1), а также $K = 0$ и аналог условия (5.6) с параметром α уравнения (3.25). В теореме 3 из работы [23] к ним добавляется аналог условия (5.5) с параметром β . После устранения опечаток в формуле (23) для K из [23] соотношение $K = 0$ с точностью до множителя совпадает с условием (5.2). Соотношение $K = 0$, задающееся формулой (15) из [23], совпадает с тем же условием, если в нем положить $J_3 = 0$ (что, как следует из (3.40), соответствует случаю $\beta = 0$). В статье [23] предьявляется замена переменных, которая должна преобразовывать ОДУ (1.3), удовлетворяющее вышеперечисленным условиям, в четвертое уравнение Пенлеве. При этом во всех трех утверждениях работы [23] отсутствует аналог условий (5.3), (5.4). Поэтому пример уравнения, которое может удовлетворять всем условиям теорем 1–3 из [23], но не быть эквивалентным четвертому уравнению Пенлеве, является ОДУ (6.9), в котором функция $a(\tilde{x})$ отлична от нуля.

В работе [26] сформулирован критерий эквивалентности уравнению XXXIV из книги [15] и снова доказана только необходимость полученных условий. Доказательство достаточности не приводится. Ранее необходимые условия эквивалентности этому уравнению были получены в работе [14].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство критериев эквивалентности для второго уравнения Пенлеве и уравнения XXXIV.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Для доказательства необходимости найдем соотношения, которым удовлетворяют инварианты уравнения (3.8) и, следовательно, должны удовлетворять инварианты уравнения (1.3), эквивалентного ОДУ (3.8). Базисные инварианты (2.4) и операторы (2.5) для ОДУ (3.8) равны

$$I_1 = 1, \quad I_2 = 16 + \frac{3z}{w^2} + \frac{\gamma}{2w^3}, \quad \mathcal{D}_1 = -w\partial_w, \quad \mathcal{D}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{w}\partial_z. \quad (\text{П.1})$$

Следовательно, производные инварианта I_1 равны нулю, а для инварианта I_2 , приведенного в (П.1), имеем

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{6z}{w^2} + \frac{3\gamma}{2w^3}, & I_{22} &= -\frac{3\sqrt{3}}{w^3}, & I_{112} &= \frac{12z}{w^2} + \frac{9\gamma}{2w^3}, \\ I_{212} &= -\frac{6\sqrt{3}}{w^3}, & I_{122} &= -\frac{9\sqrt{3}}{w^3}, & I_{222} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Выражения для I_2 , I_{12} , I_{22} можно разрешить относительно γ , w^3 , zw^{-2} , что дает равенства (4.4) и первое условие в (4.3). Оставшиеся инварианты (П.2) удовлетворяют соотношениям

$$I_{222} = 0, \quad I_{122} - 3I_{22} = 0, \quad I_{212} - I_{122} + I_{22} = 0, \quad I_{112} - 5I_{12} + 6I_2 - 96 = 0.$$

Первые два из них входят в (4.2), а другие два являются для уравнения (3.8) тривиальными: именно такой вид приобретают соотношения (2.6) и (2.7) с $n = 1$, $j_1 = 2$, если $I_1 = 1$, а I_{11} , I_{21} , I_{111} , I_{221} равны нулю.

Для доказательства достаточности покажем, что при выполнении для уравнения (1.3) условий (4.2), (4.3) замена переменных, определяемая формулами (4.4), преобразует его в уравнение (3.8). Такая замена в общем случае имеет вид

$$z = \varphi(I_1, \dots, I_m), \quad w = \psi(I_1, \dots, I_m),$$

где $I_1, \dots, I_m$ – некоторые инварианты уравнения (1.3), являющиеся функциями от x, y . Производная w по z равна

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\psi_x + y'\psi_y}{\varphi_x + y'\varphi_y} \equiv \theta, \quad y' = \frac{dy}{dx},$$

где $\psi_x = \sum_{j=1}^m I_{jx} \partial\psi/\partial I_j$ и т. п. Из формул для $\mathcal{D}_1 I_j$, $\mathcal{D}_2 I_j$ можно выразить производные:

$$\frac{\partial I_j}{\partial x} = \frac{1}{3}(M_2 I_{1j} - M_1 I_{2j}), \quad \frac{\partial I_j}{\partial y} = \frac{1}{3}(M_4 I_{1j} - M_3 I_{2j}), \quad (\text{П.3})$$

где

$$M_1 = \frac{\beta_1}{j_1^{1/4}}, \quad M_2 = \frac{5\beta_2 j_2}{2\sqrt{j_1}}, \quad M_3 = \frac{\beta_2}{\beta_1} M_1, \quad M_4 = \frac{\beta_2}{\beta_1} M_2 - \frac{3\beta_1}{M_1^2}. \quad (\text{П.4})$$

Вторая производная w по z , равная

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\theta_x + y'\theta_y + y''\theta_{y'}}{\varphi_x + y'\varphi_y}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2},$$

зависит не только от производных (П.3), но и от производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_j}{\partial x^2} &= \frac{1}{9}(M_2^2 I_{11j} - M_1 M_2 (I_{12j} + I_{21j}) + M_1^2 I_{22j}) + \frac{1}{3}(M_{2x} I_{1j} - M_{1x} I_{2j}), \\ \frac{\partial^2 I_j}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{9}(M_2(M_4 I_{11j} - M_3 I_{21j}) + M_1(M_3 I_{22j} - M_4 I_{12j})) + \\ &\quad + \frac{1}{3}(M_{2y} I_{1j} - M_{1y} I_{2j}), \\ \frac{\partial^2 I_j}{\partial y^2} &= \frac{1}{9}(M_4^2 I_{11j} - M_3 M_4 (I_{12j} + I_{21j}) + M_3^2 I_{22j}) + \frac{1}{3}(M_{4y} I_{1j} - M_{3y} I_{2j}). \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Для M_1 , M_2 , задающихся формулами (П.4), производные равны

$$\begin{aligned}
 M_{1x} &= \frac{5I_{11} - 6}{30I_1} M_1 M_2 - \frac{I_{21}}{6I_1} M_1^2 + \left(\frac{2\gamma_{10}}{5\beta_1} + Q \right) M_1 - P M_3, \\
 M_{1y} &= \frac{5I_{11} - 6}{30I_1} M_1 M_4 - \frac{I_{21}}{6I_1} M_1 M_3 + \frac{2\beta_1}{5M_1} I_1 + \\
 &\quad + \left(\frac{\gamma_{11}}{\beta_1} - \frac{3\beta_2\gamma_{10}}{5\beta_1^2} + R \right) M_1 - Q M_3, \\
 M_{2x} &= \frac{I_1^2 + 6 - 5I_{11}}{15I_1} M_2^2 - \frac{5I_3 + 6I_1 I_2}{12I_1^2} M_1^2 + \frac{I_{21}}{I_1} M_1 M_2 + \\
 &\quad + \left(\frac{2\gamma_{10}}{5\beta_1} + Q \right) M_2 - P M_4, \\
 M_{2y} &= \frac{I_1^2 + 6 - 5I_{11}}{15I_1} M_2 M_4 - \frac{5I_3 + 6I_1 I_2}{12I_1^2} M_1 M_3 + \frac{I_{21}}{3I_1} (2M_1 M_4 + M_2 M_3) + \\
 &\quad + \left(\frac{\beta_1 I_1}{5M_1^2} + \frac{\gamma_{11}}{\beta_1} - \frac{4\beta_2\gamma_{10}}{5\beta_1^2} + R \right) M_2 + \left(\frac{\gamma_{10}}{5\beta_1} - Q \right) M_4,
 \end{aligned} \tag{П.6}$$

а M_{3y} , M_{4y} вычисляются с помощью соотношений (П.6) и $\beta_{1y} = \gamma_{20} + R\beta_1 - Q\beta_2$, $\beta_{2y} = \gamma_{21} + S\beta_1 - R\beta_2$.

Положив $\Phi = I_{12} - 3I_2$, $\Psi = I_{22}$, $\Omega = d\Psi/d\Phi$, из (4.4) можно найти

$$w \frac{dw}{dz} = \frac{3\Omega}{3\Psi - 2(\Phi + 48)\Omega}, \quad \frac{d^2 w}{dz^2} = 2\sqrt{3}\Psi \frac{9\Psi^2 d\Omega/d\Phi - 2(\Phi + 48)\Omega^3}{(3\Psi - 2(\Phi + 48)\Omega)^3}. \tag{П.7}$$

Подстановка формул (4.4), (П.7) и выражения для γ из (4.3) в ОДУ (3.8) превращает его в уравнение

$$4I_{22}^2 \left(9I_{22}^2 \frac{d\Omega}{d\Phi} - 2K_0\Omega^3 \right) + K_1(3I_{22} - 2K_0\Omega)^3 = 0, \tag{П.8}$$

где $K_0 = I_{12} - 3I_2 + 48$, $K_1 = 5I_{12} - 9I_2 + 150$. Вычислив Ω и $d\Omega/d\Phi$ с помощью формул (П.3)–(П.6) и заменив y'' с учетом (1.3), из (П.8) получим равенство

$$\begin{aligned}
 \Lambda_0(M_2 + y'M_4)^3 + 3\Lambda_1(M_1 + y'M_3)(M_2 + y'M_4)^2 + \\
 + 3\Lambda_2(M_1 + y'M_3)^2(M_2 + y'M_4) + \Lambda_3(M_1 + y'M_3)^3 = 0,
 \end{aligned} \tag{П.9}$$

в котором коэффициенты Λ_i , $i = 0, 1, 2, 3$, являются функциями инвариантов уравнения (1.3). Равенство (П.9) является условием того, что уравнения (1.3) и (3.8) связаны преобразованием, определяющимся из формул (4.4). Остается показать, что Λ_i обращаются в нуль, если для инвариантов уравнений (1.3) выполнены соотношения (4.2). Если $I_1 = 1$, то из тривиальных соотношений (2.6), (2.7) и их следствий можно выразить инварианты

$$\begin{aligned}
 I_{112} &= 5I_{12} - 6I_2 + 96, & I_{212} &= I_{122} - I_{22}, & I_{1112} &= 19I_{12} - 30I_2 + 480, \\
 I_{2112} &= 5I_{122} - 11I_{22}, & I_{1212} &= 6I_{122} - 12I_{22}, & I_{1122} &= 7I_{122} - 12I_{22}, \\
 I_{2122} &= I_{1222} - I_{222}, & I_{2212} &= I_{1222} - 2I_{222}.
 \end{aligned}$$

Подставив эти выражения и равенства $I_1 = 1$, $I_{11} = I_{21} = 0$ в Λ_i , получим

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= 8K_0^3 K_1 K_2^3 + 8K_0 K_2 I_{22}^2 (I_{122}^2 + 3I_{22} I_{122} - 36I_{22}^2), \\ \Lambda_1 &= 48K_0 I_{22}^4 I_{1222} - 8K_0 I_{222} (K_0^2 K_1 K_2^2 + I_{22}^2 (I_{122}^2 + 15I_{22}^2)) + \\ &\quad + 12K_2 I_{22} (K_2 - I_{22}) (K_0^2 K_1 K_2 + 4I_{22}^3), \\ \Lambda_2 &= 12I_{22}^4 (7I_{122} + 8I_{22}) I_{1222} - 216K_0 I_{22}^4 I_{2222} - 36I_{22}^4 I_{222} (13I_{122} + 8I_{22}) + \\ &\quad + 8K_0 I_{22}^2 I_{122} I_{222}^2 + 2K_0 K_1 K_2 (2K_0 I_{222} - 3I_{22} (I_{122} - 4I_{22}))^2, \\ \Lambda_3 &= 324I_{22}^4 ((I_{122} - 4I_{22}) I_{2222} - I_{222} I_{1222}) + 4I_{22}^2 I_{222}^2 (405I_{22}^2 - 2K_0 I_{222}) + \\ &\quad + K_1 (3I_{22} K_2 - 2K_0 I_{222}) (2K_0 I_{222} - 3I_{22} K_2 + 3I_{22}^2) (2K_0 I_{222} - 3I_{22} K_2 + 7I_{22}^2) + \\ &\quad + 2K_0 K_1 I_{22}^2 I_{222} (3I_{22} (7I_{22} - 2I_{122}) + 2K_0 I_{222}),\end{aligned}$$

где $K_2 = I_{122} - 3I_{22}$. Нетрудно видеть, что эти величины обращаются в нуль, если $K_2 = 0$ и $I_{222} = 0$, что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Для доказательства необходимости найдем соотношения, которым удовлетворяют инварианты (4.1) уравнения (3.5). Базисные инварианты (2.4) и операторы (2.5) для него равны

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{4\alpha w^3 + 5}{2\sqrt{W}}, & I_2 &= \frac{4\sqrt{W}}{(4\alpha w^3 - 1)^3} (128\alpha^2 w^6 - 6\alpha w^3 - 5 - 12\alpha z w^5), \\ \mathcal{D}_1 &= -\frac{w(4\alpha w^3 - 1)}{\sqrt{W}} \partial_w, & \mathcal{D}_2 &= -\frac{6wW^{1/4}}{4\alpha w^3 - 1} \partial_z, & W &= \alpha w^3 (4\alpha w^3 + 35).\end{aligned}$$

Действуя оператором $\mathcal{D}_2$ на I_1 , I_2 , получим

$$I_{21} = 0, \quad I_1^7 I_{22}^2 = \frac{108w^6 (4\alpha w^3 + 5)^7}{(4\alpha w^3 - 1)^8 (4\alpha w^3 + 35)^2}, \quad (\text{П.10})$$

что дает второе условие в (4.5). Вместо I_1 , I_{11} рассмотрим первые два инварианта (3.2), которые для ОДУ (3.5) задаются формулами (3.38). Исключение из них величины

$$\alpha w^3 = \frac{5(6J_2 - 7J_1^2)}{28J_1^2} \quad (\text{П.11})$$

приводит к первому из условий (4.5). Подставив (П.11) во второе соотношение в (П.10), можно разрешить его относительно w^6 , что дает первое из равенств (4.8). Это выражение для w^6 затем используется, чтобы получить условие (4.7) из соотношения (П.11), возведенного в квадрат. Вместо I_2 , I_{12} рассмотрим инвариант (3.3) и его комбинацию с I_2 ,

$$I_3 = \frac{3(4\alpha w^3 + 5)}{(4\alpha w^3 - 1)^2} (2zw^2 - 24\alpha w^3 - 3), \quad 5I_3 + 6I_1 I_2 = \frac{3(4\alpha w^3 + 5)^2}{(4\alpha w^3 - 1)^3} (8\alpha w^3 - 1 - 2zw^2).$$

Исключая zw^2 и используя (П.11), откуда можно получить второе соотношение в (4.8) и условие (4.6).

Для доказательства достаточности из (4.8) найдем

$$\begin{aligned}\frac{1}{w^3} \frac{dw}{dz} &= \frac{7^3 \Omega}{30\Psi + (21^3 - 10\Phi)\Omega}, \\ w \frac{d^2 w}{dz^2} &= \frac{750\Psi(60\Psi^2 d\Omega/d\Phi - 10\Psi\Omega^2 + (21^3 - 10\Phi)\Omega^3)}{7^5(30\Psi + (21^3 - 10\Phi)\Omega)^3}, \\ \Omega &= \frac{d\Psi}{d\Phi}, \quad \Psi = \frac{I_1^7 I_{22}^2 J_2^9}{J_1^{14}} (J_2 + 7J_1^2)^2, \quad \Phi = \frac{J_2^3 I_3}{J_1^4} + 882 \frac{J_2}{J_1^2}.\end{aligned}\quad (\text{П.12})$$

Подстановка формул (4.8), (П.11), (П.12) в ОДУ (3.5) приводит к уравнению

$$\begin{aligned}125\Psi \left(72\Psi^2 \frac{d\Omega}{d\Phi} - 18\Psi\Omega^2 + (21^3 - 10\Phi)\Omega^3 \right) + \\ + 49 \left(\Phi - 7^3 \cdot \frac{13}{5} + \frac{49}{J_1^2} (7J_1^2 - 6J_2) \right) (30\Psi + (21^3 - 10\Phi)\Omega)^3 = 0.\end{aligned}\quad (\text{П.13})$$

Вычислив Ω и $d\Omega/d\Phi$ с помощью (П.3)–(П.6) и заменив y'' с использованием (1.3), из (П.13) получим равенство вида (П.9). Из (4.7) с учетом $I_{21} = 0$ и условия $I_{211} = 0$, следующего из тривиального соотношения (2.7) с $n = 1$, $j_1 = 1$, имеем $I_{222} = 0$. Используя эти условия, из тривиальных соотношений (2.6), (2.7), (3.4) и их следствий можно найти выражения для инвариантов I_{2111} , I_{2212} , I_{j122} , $\mathcal{D}_j I_3$, $\mathcal{D}_i \mathcal{D}_j I_3$, $i, j = 1, 2$. Их подстановка в равенства (П.9) превращает коэффициенты Λ_i в функции инвариантов I_1 , I_{11} , I_{111} , I_{1111} , I_2 , I_3 , I_{22} , I_{122} , которые обращаются в нуль в силу соотношений (4.5)–(4.7) и их следствий, полученных действием на них оператора $\mathcal{D}_1$. Это означает, что уравнения (1.3) и (3.5) связаны преобразованием, определяющимся из (4.8), если инварианты уравнения (1.3) удовлетворяют условиям (4.5)–(4.7), что и требовалось доказать.

Благодарности. Настоящее исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00078).

Список литературы

- [1] A. Tresse, “Détermination des invariants ponctuels de l’équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$ ”, *Preisschriften der fürstlichen Jablonowski’schen Gesellschaft XXXII*, Hirzel, Leipzig, 1896.
- [2] L. Hsu, N. Kamran, *Proc. London Math. Soc.* (3), **58**:3 (1989), 387–416.
- [3] B. Kruglikov, “Point classification of second order ODEs: Tresse classification revisited and beyond”, *Differential Equations – Geometry, Symmetries and Integrability. The Abel Symposium 2008* (June 18–21, 2008, Tromsø, Norway), *Abel Symposia*, **5**, eds. B. Kruglikov, V. Lychagin, E. Straume, Springer, Berlin, 2009, 199–221, arXiv:0809.4653.
- [4] О. И. Морозов, *Научный вестник МГТУ ГА*, 2010, № 7(157), 92–99.
- [5] S. Lie, *Arch. Mat. Nat.*, **8** (1883), 371–458.
- [6] R. Liouville, *J. École Polytechnique*, **59** (1889), 7–76.
- [7] A. Tresse, *Acta Math.*, **18**:1 (1894), 1–88.
- [8] É. Cartan, *Bull. Soc. Math. France*, **52** (1924), 205–241.
- [9] G. Thomsen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **7**:1 (1930), 301–328.
- [10] R. A. Sharipov, *Effective procedure of point classification for the equations $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$* , arXiv:math.DG/9802027.

- [11] Ю. Ю. Багдерина, *Дифференц. уравнения*, **43**:5 (2007), 581–589.
- [12] V. A. Yumaguzhin, *Acta Appl. Math.*, **109**:1 (2010), 283–313.
- [13] О. И. Морозов, *Научный вестник МГТУ ГА*, 2010, № 7(157), 100–106.
- [14] Yu. Yu. Bagderina, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:20 (2013), 295201, 36 pp.
- [15] Э. Л. Айнс, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, ОНТИ, ГНТИ Украины, Харьков, 1939.
- [16] P. Painlevé, *Acta Math.*, **25**:1 (1902), 1–85.
- [17] B. Gambier, *Acta Math.*, **33** (1910), 1–55.
- [18] N. Kamran, K. G. Lamb, W. F. Shadwick, *J. Differential Geom.*, **22**:2 (1985), 139–150.
- [19] N. Kamran, W. F. Shadwick, *Math. Ann.*, **279**:1–2 (1987), 117–123.
- [20] N. Kamran, *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect. 8°* (2), **45**:7 (1989).
- [21] A. V. Bocharov, V. V. Sokolov, S. I. Svinolupov, *On some equivalence problems for differential equations*, Preprint ESI 54, International Erwin Schrödinger Institute for Mathematical Physics, Vienna, 1993.
- [22] J. Hietarinta, V. Dryuma, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **9**, suppl. 1 (2002), 67–74.
- [23] В. В. Капрак, *ТМФ*, **173**:2 (2012), 245–267.
- [24] M. V. Babich, L. A. Bordag, *J. Differ. Equ.*, **157**:2 (1999), 452–485.
- [25] R. Iyer, C. V. Johnson, J. S. Pennington, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:1 (2011), 015403, 35 pp.
- [26] V. V. Kartak, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **19**:9 (2014), 2993–3000.

Поступила в редакцию 17.02.2014,
после доработки 11.08.2014