Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Манько, О. В. Манько, С. С. Сафонов, Описание спиноров с помощью функций распределения вероятностей, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 2, 185–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf866>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:34:03

© 1998 г. В. И. Манько*, О. В. Манько*, С. С. Сафонов*

ОПИСАНИЕ СПИНОРОВ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Для любого значения спина неприводимые представления группы вращений реализованы с помощью семейства положительных распределений вероятностей проекций спина. Это семейство параметризовано точками на сфере. Построено обратимое отображение спиноров на функции распределения вероятностей. Приведены примеры распределений вероятностей для известных состояний со спином $1/2$ и 1 .

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах в [1, 2] предложена схема оптической томографии для измерения квантовых состояний, задаваемых непрерывными наблюдаемыми типа координаты. Эта схема использует преобразование Радона, связывающее положительное маргинальное распределение вероятности координаты с функцией Вигнера [3] квантового состояния. Другая схема, схема симплектической томографии, была предложена для измерения функции Вигнера в работах [4, 5], где преобразование Фурье использовалось вместо преобразования Радона. Обратимое отображение функции Вигнера квантового состояния на положительное маргинальное распределение вероятностей для непрерывных наблюдаемых величин (координаты и импульса) использовалось в [6–8]. В этих работах подход Мойала [9] к квантовой эволюции как к статистическому процессу был усовершенствован в том смысле, что вместо функции квазираспределения Мойала (функции Вигнера), которая может принимать отрицательные значения, вводилось положительное распределение вероятности измеряемых переменных, описывающее произвольное квантовое состояние и его эволюцию.

Положительная функция распределения вероятностей, описывающая произвольное состояние спина, была введена в работах [10–13]. Явный вид для обратимого отображения, которое связывает квантовое состояние спина j , описывающееся матрицей плотности $\rho^{(j)}$, с функцией распределения вероятностей $w(m, \theta, \varphi)$ проекций спина на ось кван-

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

тования, $-j \leq m \leq j$, где углы изменяются в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, определяется координатами вектора, нормального к поверхности сферы единичного радиуса. Этот вектор параллелен оси квантования. Для квантовых состояний волчка, которые описываются с помощью двух угловых моментов, аналогичная конструкция распределения вероятностей дана в статье [14].

Поскольку квантовые состояния спина j связаны с неприводимыми представлениями группы вращений [15–17], отображение, которое было получено в [10–13], дает возможность сформулировать теорию представлений этой группы с помощью положительных распределений вероятностей.

Цель данной работы – ввести новую формулировку построения неприводимых представлений группы вращений, роль спиноров в которой будут играть положительные функции распределения измеримой проекции спина, параметризованные с помощью координат точек на сфере единичного радиуса (семейство функций распределений).

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СПИНОРОВ ФУНКЦИЯМИ МАРГИНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Как известно [18], волновая функция $\psi(m)$ частицы со спином $1/2$ может быть представлена в виде спинора первого ранга

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi(1/2) \\ \psi(-1/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (1)$$

В случае чистого спинового состояния частицы матрица плотности будет иметь вид двумерной матрицы

$$\rho^{(1/2)} = \psi\psi^\dagger = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ ba^* & |b|^2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

причем диагональные матричные элементы удовлетворяют условию нормировки $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Любой поворот в трехмерном пространстве, определяемый углами Эйлера φ , θ , ϕ , изменяющимися в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, задает унитарную матрицу

$$u(\varphi, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\varphi+\phi)}{2}} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i(\varphi-\phi)}{2}} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\varphi-\phi)}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i(\varphi+\phi)}{2}} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Тогда при повороте эрмитова матрица плотности $\rho^{(1/2)}$ преобразуется следующим образом:

$$\rho^{(1/2)} \rightarrow \rho^{(1/2)}(u) = u\rho u^\dagger,$$

где унитарная 2×2 -матрица u задает поворот на углы, определяющие матричные элементы матрицы u . Для диагональных элементов эрмитовой матрицы $\rho^{(1/2)}(u)$ мы получаем, что

$$\rho_{ii}^{(1/2)}(u) = \sum_{s=-1/2}^{1/2} \sum_{m=-1/2}^{1/2} D_{is}^{(1/2)}(u) \rho_{sm} D_{im}^{(1/2)*}(u). \quad (4)$$

Здесь $D_{is}^{(1/2)}$ есть D-функция Вигнера, $i = -1/2, 1/2$. Диагональные элементы матрицы плотности квантового состояния являются неотрицательными числами, и их сумма равна единице. Физический смысл этих элементов состоит в том, что они представляют собой вероятности обнаружить данное значение проекции спина на фиксированную ось в пространстве. Поэтому мы введем обозначение

$$\rho_{ii}^{(1/2)}(u) = w(i, u),$$

где функция $w(i, u)$ есть маргинальное распределение, т.е. вероятность обнаружить проекцию i спина частицы на фиксированную ось в пространстве. Данная вероятность зависит от углов Эйлера φ, θ, ϕ как от параметров. Эта функция распределения нормирована:

$$w(1/2, u) + w(-1/2, u) = 1,$$

для всех значений углов Эйлера. Из формулы (4) следует, что маргинальное распределение $w(i, u)$ зависит только от двух углов Эйлера, а зависимость от поворота на угол ϕ выпадает. Действительно, в соответствии с формулой (4) может быть получено маргинальное распределение $w(i, u)$ частицы со спином $1/2$ в виде

$$w(1/2, u) = \cos^2 \frac{\theta}{2} |a|^2 + \frac{\sin \theta}{2} e^{i\varphi} ab^* + \frac{\sin \theta}{2} e^{-i\varphi} ba^* + \sin^2 \frac{\theta}{2} |b|^2, \quad (5)$$

$$w(-1/2, u) = \sin^2 \frac{\theta}{2} |a|^2 - \frac{\sin \theta}{2} e^{i\varphi} ab^* - \frac{\sin \theta}{2} e^{-i\varphi} ba^* + \cos^2 \frac{\theta}{2} |b|^2. \quad (6)$$

Таким образом, семейство функций распределения вероятностей проекции спина параметризуется координатами θ, φ точек на единичной сфере. Эта параметризация отвечает физическому смыслу положительной функции распределения $w(i, u)$, задающей спиновое состояние частицы. В самом деле, функция $w(i, u)$ есть вероятность обнаружить проекцию спина i на ось квантования, параллельную нормали к поверхности единичной сферы в точке с координатами θ, φ . Если нам известно положительное нормированное маргинальное распределение $w(i, u)$, то (см. [10, 11]) матричные элементы $\rho_{mm}^{(j)}$ могут

быть вычислены через измеримое маргинальное распределение $w(i, u)$ частицы с произвольным спином j и значениями индексов $i = -j, -j + 1, \dots, j$ с помощью соотношения

$$(-1)^{m'} \rho_{mm'}^{(j)} = \sum_{k=0}^{2j} \sum_{l=-k}^k (2k+1)^2 \times \\ \times \sum_{i=-j}^j (-1)^i \otimes \int w(i, u) D_{0l}^k(u) \frac{d\Omega}{8\pi^2} \begin{pmatrix} j & j & k \\ i & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & k \\ m & -m' & l \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $m, m' = -j, -j + 1, \dots, j$ и интегрирование ведется по угловым переменным φ, θ, ϕ , т.е.

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta.$$

Значок $\otimes$ обозначает прямое произведение матриц.

Для случая, когда спин частицы равен $1/2$ (т.е. $j = 1/2$), формула (7) принимает вид

$$\rho_{mm'}^{(1/2)} = (-1)^{-m'} \sum_{k=0}^1 \sum_{l=-k}^k (2k+1)^2 \times \\ \times \sum_{i=-1/2}^{1/2} (-1)^i \int w(i, u) D_{0l}^k(u) \frac{d\Omega}{8\pi^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & k \\ i & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & k \\ m & -m' & l \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $m, m' = -1/2, 1/2$. Вычисляя все ненулевые интегралы с D -функциями и маргинальными распределениями и используя выражения для 3j-символов [18], мы можем переписать формулу (8) в виде

$$\rho_{mm'}^{(1/2)} = (-1)^{-m'} \left[\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ m & -m' & 0 \end{pmatrix} (|a|^2 + |b|^2) + \right. \\ \left. + \frac{3i}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ m & -m' & 0 \end{pmatrix} (|a|^2 - |b|^2) + \right. \\ \left. + i\sqrt{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ m & -m' & -1 \end{pmatrix} ab^* - i\sqrt{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ m & -m' & 1 \end{pmatrix} ba^* \right], \quad (9)$$

где i – мнимая единица. Подстановка значений $m, m' = -1/2, 1/2$ в формулу (9) дает следующий результат:

$$\rho_{mm'}^{(1/2)} = |a|^2, \quad m = m' = 1/2; \quad \rho_{mm'}^{(1/2)} = |b|^2, \quad m = m' = -1/2; \\ \rho_{mm'}^{(1/2)} = ab^*, \quad m = -m' = 1/2; \quad \rho_{mm'}^{(1/2)} = ba^*, \quad -m = m' = 1/2.$$

Таким образом, прямым вычислением установлено, что правая часть формулы (8) равна матрице плотности (2). В разделе 4 с использованием формул (2), (5) и (6) приведены примеры маргинальных распределений $w(i, u)$ для хорошо известных состояний со спином $1/2$ и 1 . Можно заключить, что если дано измеримое маргинальное распределение частицы, состояние которой описывается с помощью спинора, то можно восстановить матрицу плотности данного состояния при помощи формулы (8).

3. ПРИМЕРЫ МАРГИНАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДЛЯ СПИНА $1/2$ И 1

Известно [18], что оператор спина для частицы со спином $1/2$ имеет вид

$$\hat{s} = \frac{1}{2}\hat{\sigma},$$

где матрицы Паули определены равенствами

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Волновая функция (1), если спин частицы направлен в положительную сторону координатной оси x , имеет вид

$$\psi_x^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

а в случае противоположного направления по оси x –

$$\psi_x^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Соответственно для случаев, когда спин частицы направлен в положительные и отрицательные стороны осей y и z , мы имеем

$$\psi_y^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\psi_y^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\psi_z^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\psi_z^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Матрицы плотности, которые взаимнооднозначно связаны с волновыми функциями (с точностью до общего фазового множителя у спинора), для всех разобранных случаев направления спина частицы по осям x , y и z имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_x^{(+)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \rho_x^{(-)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \rho_y^{(+)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, & \rho_y^{(-)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \\ \rho_z^{(+)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \rho_z^{(-)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Применяя формулы (5) и (6) для случая, когда спин частицы направлен в положительную сторону оси x , мы получаем маргинальное распределение в виде

$$\begin{aligned}w_x^{(+)}\left(+\frac{1}{2}, u\right) &= \frac{1}{2}(1 + \sin \theta \cos \varphi), \\ w_x^{(+)}\left(-\frac{1}{2}, u\right) &= \frac{1}{2}(1 - \sin \theta \cos \varphi),\end{aligned}\tag{16}$$

а в случае отрицательного направления спина по оси x – в виде

$$\begin{aligned}w_x^{(-)}\left(+\frac{1}{2}, u\right) &= \frac{1}{2}(1 - \sin \theta \cos \varphi), \\ w_x^{(-)}\left(-\frac{1}{2}, u\right) &= \frac{1}{2}(1 + \sin \theta \cos \varphi).\end{aligned}\tag{17}$$

Аналогично маргинальное распределение для положительных и отрицательных направлений по осям y и z представимо в виде

$$\begin{aligned}w_y^{(+)}\left(+\frac{1}{2}, u\right) &= \frac{1}{2}(1 + \sin \theta \sin \varphi), \\ w_y^{(+)}\left(-\frac{1}{2}, u\right) &= \frac{1}{2}(1 - \sin \theta \sin \varphi);\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}w_y^{(-)}\left(+\frac{1}{2}, u\right) &= \frac{1}{2}(1 - \sin \theta \sin \varphi), \\ w_y^{(-)}\left(-\frac{1}{2}, u\right) &= \frac{1}{2}(1 + \sin \theta \sin \varphi);\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}w_z^{(+)}\left(+\frac{1}{2}, u\right) &= \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\ w_z^{(+)}\left(-\frac{1}{2}, u\right) &= \sin^2 \frac{\theta}{2};\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}w_z^{(-)}\left(+\frac{1}{2}, u\right) &= \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ w_z^{(-)}\left(-\frac{1}{2}, u\right) &= \cos^2 \frac{\theta}{2}.\end{aligned}\tag{21}$$

Существуют смешанные состояния частицы со спином $1/2$, называемые *частично поляризованными* [18]. Эти состояния описываются не волновыми функциями, а матрицами плотности

$$\rho_{\text{m}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \bar{s}_z & \bar{s}_- \\ \bar{s}_+ & \frac{1}{2} - \bar{s}_z \end{pmatrix}. \quad (22)$$

В формуле (22) величины $\bar{s}_{\pm}$ определены равенством

$$\bar{s}_{\pm} = \bar{s}_x \pm i\bar{s}_y,$$

а величины $\bar{s}_x$, $\bar{s}_y$ и $\bar{s}_z$ являются средними значениями проекций спина $1/2$ соответственно на оси x , y и z . Имеет место неравенство

$$\bar{s}_x^2 + \bar{s}_y^2 + \bar{s}_z^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Степень чистоты состояния, определяемая параметром $\mu = \text{Tr } \rho_{\text{m}}^2$, зависит от средних значений проекций спина,

$$\mu = \frac{1}{2} + 2(\bar{s}_x^2 + \bar{s}_y^2 + \bar{s}_z^2).$$

Как и в случае чистого состояния, используя формулу (4), мы вычисляем маргинальное распределение для смешанного состояния частицы со спином $1/2$:

$$w_{\text{m}}\left(\frac{1}{2}, u\right) = \frac{1}{2} + \bar{s}_z \cos \theta + \bar{s}_x \sin \theta \cos \varphi + \bar{s}_y \sin \theta \sin \varphi, \quad (23)$$

$$w_{\text{m}}\left(-\frac{1}{2}, u\right) = \frac{1}{2} - \bar{s}_z \cos \theta - \bar{s}_x \sin \theta \cos \varphi - \bar{s}_y \sin \theta \sin \varphi. \quad (24)$$

Легко проверить, что примеры маргинальных распределений чистых состояний (16)–(21) получаются из формул (23) и (24) при соответствующем выборе параметров.

Рассмотрим теперь важный пример частицы со спином 1, который направлен вдоль оси z в положительную сторону. Волновая функция такого состояния есть

$$\psi_z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а матрица плотности имеет вид

$$\rho^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Маргинальное распределение данного состояния частицы со спином 1 может быть вычислено с помощью формулы

$$w^{(1)}(i, u) = \sum_{s, m=-1}^1 D_{is}^{(1)}(u) \rho_{sm}^{(1)} D_{im}^{(1)*}(u).$$

Произведя соответствующие вычисления для разных индексов $i = -1, 0, 1$, мы получаем следующие выражения для значений маргинального распределения состояния с проекцией спина на ось z , равной $+1$:

$$\begin{aligned} w^{(1)}(+1, u) &= \frac{(1 + \cos \theta)^2}{4}, \\ w^{(1)}(0, u) &= \frac{\sin^2 \theta}{2}, \\ w^{(1)}(-1, u) &= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{4}. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить значения маргинальных распределений и для других состояний частицы спина 1.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАРГИНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ ПОВОРОТЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть волновая функция $\psi^{(j)}$ описывает в основной координатной системе (x, y, z) состояние с определенным значением спина j , а волновая функция $\tilde{\psi}^{(j)}$ – то же самое состояние по отношению к осям (x', y', z') (здесь и далее предполагается, что волновая функция $\psi^{(j)}$ может быть представлена в виде спинора, т.е. в случае $j = 1/2$ имеет вид (1)). Координатные оси (x', y', z') повернуты на углы Эйлера φ', θ', ϕ' относительно координатных осей (x, y, z) . Волновые функции $\psi^{(j)}$ и $\tilde{\psi}^{(j)}$ связаны друг с другом линейным соотношением, которое можно записать в виде

$$\tilde{\psi}_k^{(j)} = \sum_{s=-j}^j D_{ks}^{(j)}(u') \psi_s^{(j)},$$

где $D_{ks}^{(j)}(u')$ – упомянутая выше D-функция Вигнера и u' имеет форму (3), где углы Эйлера φ, θ, ϕ заменены на φ', θ', ϕ' . Матрица плотности для состояния частицы со спином j в системе координат (x', y', z') имеет вид

$$\tilde{\rho}_{kk'}^{(j)} = \tilde{\psi}_k^{(j)} \tilde{\psi}_{k'}^{(j)*} = \sum_{s, s'=-j}^j D_{ks}^{(j)*}(u') \psi_s^{(j)} \psi_{s'}^{(j)} D_{k's'}^{(j)*}(u'),$$

а в координатной системе (x, y, z) –

$$\rho_{ss'}^{(j)} = \psi_s^{(j)} \psi_{s'}^{(j)*}.$$

Как было уже сказано выше, диагональные элементы матрицы плотности квантового состояния являются неотрицательными числами и их сумма равна единице. Эти диагональные элементы суть маргинальные распределения $\rho_{ii}^{(j)} = w^{(j)}(i, u)$, т.е. вероятности обнаружить проекцию i спина j на фиксированную ось в пространстве.

Так же, как и в разделе 2, мы получаем следующее маргинальное распределение для частицы со спином j в системе координат (x', y', z') :

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(j)}(i, u) &= \tilde{\rho}_{ii}^{(j)}(u) = \sum_{k, k'=-j}^j D_{ik}^{(j)}(u) \tilde{\rho}_{kk'}^{(j)} D_{ik'}^{(j)*}(u) = \\ &= \sum_{k, k', s, s'=-j}^j D_{ik}^{(j)}(u) D_{ks}^{(j)}(u') \rho_{ss'}^{(j)} D_{k's'}^{(j)*}(u') D_{ik'}^{(j)*}(u). \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть $D_{is}^{(j)}(uu')$ – D-функция Вигнера, элементы которой представляют собой произведение двух D-функций с разными углами u и u' ,

$$D_{is}^{(j)}(uu') = \sum_{k=-j}^j D_{ik}^{(j)}(u) D_{ks}^{(j)}(u').$$

Тогда маргинальное распределение $\tilde{w}^{(j)}(i, u)$ можно записать в виде

$$\tilde{w}^{(j)}(i, u) = \sum_{s, s'=-j}^j D_{is}^{(j)}(uu') \rho_{ss'}^{(j)} D_{is'}^{(j)*}(uu').$$

Маргинальное распределение для состояния частицы со спином j в координатной системе (x, y, z) можно записать как

$$w^{(j)}(i, u) = \sum_{s, s'=-j}^j D_{is}^{(j)}(u) \rho_{ss'}^{(j)} D_{is'}^{(j)*}(u).$$

Сравнивая два маргинальных распределения в координатных системах, отличающихся друг от друга поворотом на углы Эйлера φ', θ', ϕ' , можно заключить, что преобразование маргинального распределения с помощью поворота в пространстве имеет вид

$$w^{(j)}(i, u) \xrightarrow{R(u')} \tilde{w}^{(j)}(i, u). \quad (26)$$

Имеет место также равенство

$$\tilde{w}^{(j)}(i, u) = w^{(j)}(i, uu'). \quad (27)$$

В качестве примера рассмотрим частицу со спином $1/2$, направленным в положительную сторону оси z (14). С помощью преобразования поворота $\tilde{\psi}_x^{(-)} = \hat{D}_1(u')\psi_z^{(+)}$, где матрица преобразования имеет вид

$$\hat{D}_1(u') = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

можно получить другое состояние этой частицы со спином, который уже направлен по оси x в отрицательную сторону (11). Производя вычисление маргинальных распределений для рассмотренных состояний частицы, заключаем, что маргинальное распределение (20) преобразуется в маргинальное распределение (17) при определенном повороте системы координат (поворот системы координат задан матрицей преобразования (28)). Иначе говоря, если известно маргинальное распределение какого-либо состояния частицы со спином $1/2$, то с помощью поворота системы координат на определенные углы Эйлера может быть найдено маргинальное распределение любого состояния частицы. Данное утверждение верно для любого спина.

Аналогичное утверждение можно сделать для случая, когда состояние частицы со спином $1/2$ является смешанным. Поскольку матрица плотности смешанного состояния (22) зависит только от параметров $\bar{s}_x$, $\bar{s}_y$ и $\bar{s}_z$, то при повороте системы координат на углы u' матрица плотности будет уже определяться параметрами $\bar{s}_x(u')$, $\bar{s}_y(u')$ и $\bar{s}_z(u')$, которые зависят от углов поворота u' . Поскольку матрица плотности определяет маргинальное распределение, то по аналогии с выражениями для чистого состояния частицы со спином $1/2$ можно сказать, что преобразование маргинального распределения смешанного состояния при повороте системы координат имеет вид

$$w_m(i, \overrightarrow{s}, u) \xrightarrow{R(u')} \tilde{w}_m(i, \overrightarrow{s}, u),$$

где выражение

$$\tilde{w}_m(i, \overrightarrow{s}, u) = w_m(i, \overrightarrow{s}, uu') = w_m(i, \hat{D}'(u')\overrightarrow{s}, u) \quad (29)$$

связывает маргинальные распределения до и после поворота. В формуле (29) матрица $\hat{D}'(u')$ определяет поворот действительного вектора $\overrightarrow{s}$ в пространстве на углы Эйлера φ' , θ' , ϕ' :

$$\hat{D}'(u') = \begin{pmatrix} \cos \varphi' \cos \theta' \cos \phi' - \sin \varphi' \sin \phi' & \sin \varphi' \cos \theta' \cos \phi' - \cos \varphi' \sin \phi' & -\sin \theta' \cos \phi' \\ -\cos \varphi' \cos \theta' \sin \phi' - \sin \varphi' \cos \phi' & -\sin \varphi' \cos \theta' \sin \phi' + \cos \varphi' \cos \phi' & \sin \theta' \sin \phi' \\ \cos \varphi' \sin \theta' & \sin \varphi' \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix}$$

(углы Эйлера φ' , θ' , ϕ' соответствуют углам Эйлера, введенным в разделе 2).

5. РАЗЛОЖЕНИЕ МАРГИНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Известно, что любая функция, определенная на сфере, может быть разложена по сферическим функциям. Маргинальное распределение в том виде, в котором мы его определили в разделе 2, может быть тоже разложено по сферическим функциям с некоторыми коэффициентами, которые не зависят от углов Эйлера, но зависят от проекции i спина j на фиксированную ось z в пространстве. Поэтому для маргинального распределения квантового состояния частицы со спином j справедливо разложение

$$w^{(j)}(i, u) = \sum_{l, m} Y_{lm}(\theta, \varphi) C_{lm}^i,$$

где коэффициенты C_{lm}^i определяются соотношением

$$C_{lm}^i = \int Y_{lm}^*(\theta, \varphi) w(i, u) d\omega.$$

Интегрирование ведется по угловым переменным φ, θ :

$$\int d\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta.$$

Как известно [18], функция $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ связана с D-функцией Вигнера соотношением

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{0m}^l(u).$$

Поэтому коэффициенты C_{lm}^i могут быть легко вычислены:

$$\begin{aligned} C_{lm}^i &= (-1)^l i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \times \\ &\times \sum_{s, s'=-1/2}^{1/2} (-1)^{i-m-s'} \rho_{ss'}^j \otimes \int D_{0-m}^{(l)}(u) D_{is}^{(j)}(u) D_{-i-s'}^{(j)}(u) d\omega = \\ &= \sqrt{4\pi} (-1)^l i^l \sqrt{2l+1} \times \\ &\times \sum_{s, s'=-1/2}^{1/2} (-1)^{i-m-k} \rho_{ss'}^j \otimes \begin{pmatrix} j & j & l \\ i & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & l \\ s & -s' & -m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

При выводе данной формулы мы использовали известное выражение интеграла от произведения трех D-функций [18].

Для примера приведем коэффициенты C_{lm}^i для частицы со спином $j = 1/2$ и проекциями $i = \pm 1/2$ на ось z :

$$C_{00}^{+1/2} = \frac{\sqrt{4\pi}}{2}, \quad C_{10}^{+1/2} = -\frac{i\sqrt{4\pi}}{2\sqrt{3}}, \quad (31)$$

$$C_{00}^{-1/2} = \frac{\sqrt{4\pi}}{2}, \quad C_{10}^{-1/2} = \frac{i\sqrt{4\pi}}{2\sqrt{3}}. \quad (32)$$

Применим данный метод разложения по сферическим функциям для маргинального распределения квантового состояния частицы со спином j , повернутого на углы u' относительно первоначального состояния:

$$\tilde{w}^{(j)}(i, u) = w^{(j)}(i, uu') = \sum_{l,m} Y_{lm}(\theta, \varphi) C_{lm}^i(u'),$$

где коэффициенты $C_{lm}^i(u')$ определяются из соотношения

$$C_{lm}^i(u') = \int Y_{lm}^*(\theta, \varphi) w^{(j)}(i, uu') d\omega.$$

Используя формулу (25) и выражение для интеграла от трех D-функций, получаем, что

$$\begin{aligned} C_{lm}^i(u') &= (-1)^l i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sum_{s,s',k,k'=-1/2}^{1/2} (-1)^{i-m-k'} D_{ks}^{(j)}(u') \rho_{ss'}^{(j)} D_{k's'}^{(j)*}(u') \otimes \\ &\otimes \int D_{0-m}^{(l)}(u) D_{ik}^{(j)}(u) D_{-i-k'}^{(j)}(u) d\omega = \\ &= \sqrt{4\pi} (-1)^l i^l \sqrt{2l+1} \sum_{s,s',k,k'=-1/2}^{1/2} (-1)^{i-m-k'} D_{ks}^{(j)}(u') \rho_{ss'}^{(j)} D_{k's'}^{(j)*}(u') \otimes \\ &\otimes \begin{pmatrix} j & j & l \\ i & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & l \\ k & -k' & -m \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $i = -j, -j+1, \dots, j$. Далее приведены примеры коэффициентов $C_{lm}^i(u')$ для состо-

яния спина $j = 1/2$ с проекциями i на ось z , равными $\pm 1/2$:

$$\begin{aligned}
 C_{00}^{+1/2}(u') &= \frac{\sqrt{4\pi}}{2}, \\
 C_{10}^{+1/2}(u') &= -\frac{i\sqrt{4\pi}}{2\sqrt{3}} \cos \theta', \\
 C_{11}^{+1/2}(u') &= -\frac{i\sqrt{4\pi}}{\sqrt{6}} \frac{\sin \theta'}{2} e^{i\phi'}, \\
 C_{1-1}^{+1/2}(u') &= \frac{i\sqrt{4\pi}}{\sqrt{6}} \frac{\sin \theta'}{2} e^{-i\phi'}; \tag{34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{00}^{-1/2}(u') &= \frac{\sqrt{4\pi}}{2}, \\
 C_{10}^{-1/2}(u') &= \frac{i\sqrt{4\pi}}{2\sqrt{3}} \cos \theta', \\
 C_{11}^{-1/2}(u') &= \frac{i\sqrt{4\pi}}{\sqrt{6}} \frac{\sin \theta'}{2} e^{i\phi'}, \\
 C_{1-1}^{-1/2}(u') &= -\frac{i\sqrt{4\pi}}{\sqrt{6}} \frac{\sin \theta'}{2} e^{-i\phi'}. \tag{35}
 \end{aligned}$$

Можно обнаружить связь между коэффициентами разложения маргинального распределения частицы со спином j и коэффициентами разложения повернутого на углы u' соответствующего распределения. Из уравнений (30) и (33) следует, что

$$C_{lm}^i(u') = \sum_{l'=0}^{2l} \sum_{m'=-l'}^{l'} D_{mm'}^{l'} C_{l'm'}^i.$$

В этом легко убедиться, сравнивая формулы (31), (32) и (34), (35) для случая частицы со спином $j = 1/2$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом работы является построение неприводимого представления группы вращений с использованием положительных, нормированных функций распределения вероятностей $w^{(j)}(i, u)$ (маргинальных распределений) для проекции спина i на ось квантования, определяемую нормалью к поверхности единичной сферы. Преобразование поворота для маргинального распределения определяется формулами (26) и (27). Поскольку для представлений групп вращений удастся построить обратимое отображение спиноров на семейство положительных, нормированных функций распределения, можно надеяться на получение аналогичной конструкции для представлений других групп Ли.

Список литературы

- [1] *J. Bertrand, P. Bertrand.* Found. Phys. 1989. V. 17. P. 397.
- [2] *K. Vogel, H. Risken.* Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 2847.
- [3] *E. Wigner.* Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749.
- [4] *S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi.* Quantum Semiclass. Opt. 1995. V. 7. P. 615.
- [5] *G. M. D'Ariano, S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi.* Quantum Semiclass. Opt. 1996. V. 6. P. 1017.
- [6] *S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi.* Phys. Lett. A. 1996. V. 213. P. 1; Classical-like description of quantum dynamics by means of symplectic tomography. Los Alamos Preprint quant-ph/9609026.
- [7] *S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi.* Found. Phys. 1997. V. 27. P. 801.
- [8] *V. I. Man'ko.* Quantum mechanics and classical probability theory. In: Proceedings of International conference "Symmetries in Science IX". Bregenz (Austria), August 1996. Eds B. Gruber and M. Ramek. N. Y.: Plenum Press, 1997. P. 215.
- [9] *J. E. Moyal.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 1949. V. 45. P. 99.
- [10] *V. V. Dodonov, V. I. Man'ko.* Phys. Lett. A. 1997. V. 229. P. 335.
- [11] *В. И. Манько, О. В. Манько.* ЖЭТФ. 1997. Т. 112. № 3. С. 796.
- [12] *O. V. Man'ko.* Tomography of spin states and classical formulation of quantum mechanics. In: Proceedings of International conference "Symmetries in Science X". Bregenz (Austria). Eds B. Gruber and M. Ramek. N. Y.: Plenum Press, 1998.
- [13] *O. V. Man'ko.* J. Russ. Laser Res. 1996. V. 17. P. 439; Phys. Lett. A. 1997. V. 228. P. 29.
- [14] *В. И. Манько, С. С. Сафонов.* ЯФ. 1998. Т. 61. № 4. С. 658.
- [15] *L. C. Biedenharn, J. D. Louck.* Angular momentum in quantum physics. Theory and application. In: Encyclopedia of mathematics and its applications. V. 8. Reading, MA: Addison-Wesley, 1981.
- [16] *Д. П. Желобенко.* Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.
- [17] *А. Н. Лезнов, М. В. Савельев.* Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985.
- [18] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Квантовая механика. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 6.XI.1997 г.