Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Я. Арефьева, Е. О. Поздеева, Т. О. Поздеева, Потенциалы в модифицированных пространствах AdS_5 с умеренным ростом энтропии, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 1, 35–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8660>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:53:22

© 2014 г. И. Я. Арефьева*, Е. О. Поздеева†, Т. О. Поздеева‡

ПОТЕНЦИАЛЫ В МОДИФИЦИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ AdS_5 С УМЕРЕННЫМ РОСТОМ ЭНТРОПИИ

Исследована связь дилатонных потенциалов и b -факторов модифицированных пространств анти-де Ситтера. Получен явный вид дилатонных потенциалов, соответствующих b -факторам, формирующим удовлетворительное описание множественности рождения частиц в рамках голографического описания.

Ключевые слова: пространство анти-де Ситтера, черная дыра, столкновение тяжелых ионов, множественность рождения частиц, столкновение мембран, потенциал для фоновой метрики, дилатон, фантом.

DOI: 10.4213/tmf8660

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было рассмотрено формирование черных дыр при столкновении доменов [2], [3] в модифицированных пространствах с b -факторами вида $b = (L/z)^a$, $b = e^{-z/R}$, $b = (L/z)e^{-z^2/R^2}$ [4]. Согласно голографическому подходу формирование кварк-глюонной плазмы в четырехмерном пространстве соответствует рождению черной дыры в дуальном пятимерном пространстве. При этом множественность рожденных частиц при столкновении тяжелых ионов пропорциональна энтропии или площади ловушечной поверхности черной дыры во вспомогательном пространстве. Из экспериментальных данных [5] известно, что множественность рождения частиц хорошо аппроксимируется степенной функцией вида $s_{NN}^{0.15}$ при энергиях от 10^2 ГэВ до 10^4 ГэВ. В случае пространства AdS_5 множественность рождения частиц пропорциональна $s_{NN}^{1/3}$ [6]. Чтобы воспроизвести экспериментальную зависимость

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: arefeva@mi.ras.ru

†Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: pozdeeva@www-hep.sinp.msu.ru

‡Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. E-mail: pozdeeva@inbox.ru

в рамках голографического подхода, Киритсис и Талиотсис [4] предложили модифицировать пространство AdS_5 путем введения b -факторов, ранее рассматриваемых в работах [7]–[9].

Известная из эксперимента пропорциональность $s_{NN}^{0.15}$ множественности рождения частиц хорошо моделируется при формировании черных дыр сталкивающимися доменами в модифицированном пространстве AdS_5 со степенными b -факторами при $a \approx 0.47$ [1]. Однако аналогичную пропорциональность можно получить и для других b -факторов. В настоящей работе подробно рассмотрено формирование черных дыр при столкновении доменов в пространстве с модернизированным смешанным b -фактором вида $b = (L/z)^a e^{-z^2/R^2}$, дающим при $a \approx 0.5$ ту же самую экспериментальную зависимость с логарифмическими поправками.

До сих пор вопрос о явной зависимости потенциалов от полей в модифицированных пространствах с рассматриваемыми b -факторами изучался только в асимптотическом приближении. В работе [9] была рассмотрена зависимость потенциала от b -фактора и его производных. В настоящей работе рассмотрены явные аналитические зависимости потенциалов от полей для степенного и экспоненциального b -факторов. Мы установили, что для модифицированного пространства со степенным b -фактором при $a < 1$ поле является фантомным, а в случае экспоненциального b -фактора – обычным. В модифицированных пространствах со смешанным b -фактором $b = (L/z)^a e^{-z^2/R^2}$ при $a < 1$ происходит переключение режимов в точке z_0 ($\Phi(z_0) = 0$) с фантомного на обычный. Мы приводим явные зависимости потенциалов от полей в случаях экспоненциального и степенного b -факторов. В случае смешанного b -фактора эту зависимость удастся построить лишь численно.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 обсуждается связь потенциалов и полей в модифицированных пространствах. В п. 2.2, 2.3 обсуждаются частные случаи, а именно связь потенциалов и полей в модифицированных пространствах со степенными и модернизированными смешанными b -факторами. В разделе 3 вводится шоковая волна. В разделе 4 на основе модифицированной голографической модели с модернизированным смешанным b -фактором рассматривается возможность моделирования множественности рождения частиц в кварк-глюонной плазме, полученной при столкновении тяжелых ионов.

2. ПОТЕНЦИАЛЫ ДЛЯ ФОНОВОЙ МЕТРИКИ

2.1. Общий случай. Рассмотрим действие пятимерной гравитации, взаимодействующей со скалярным дилатонным полем:

$$S_5 = S_R + S_\Phi, \quad (1)$$

где S_R – действие Гильберта–Эйнштейна с отрицательной космологической постоянной,

$$S_R = -\frac{1}{16\pi G_5} \int \sqrt{-g} \left[R + \frac{d(d-1)}{L^2} \right] dx^5,$$

$d+1 = D = 5$, S_Φ – действие дилатона,

$$S_\Phi = -\frac{1}{16\pi G_5} \int \sqrt{-g} \left[-\frac{4}{3}(\partial\Phi)^2 + V(\Phi) \right] dx^5.$$

Здесь L – характерный размерный параметр, G_5 – пятимерная гравитационная постоянная. В предположении, что фоновая метрика имеет вид

$$ds^2 = b^2(z)(dz^2 + dx^i dx^i - dx^+ dx^-), \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

мы рассматриваем гравитационные уравнения для нескольких видов b -факторов [4]. В этом случае уравнение Эйнштейна сводится к двум независимым выражениям [7], [8]

$$\begin{aligned} \frac{3b''}{b} + \frac{2}{3}(\Phi')^2 - \frac{b^2}{2}V(\Phi) - \frac{6b^2}{L^2} &= 0, \\ \frac{6(b')^2}{b^2} - \frac{2}{3}(\Phi')^2 - \frac{b^2}{2}V(\Phi) - \frac{6b^2}{L^2} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $b = b(z)$, $b' = \partial_z b$ и поле дилатона зависит только от z , $\Phi = \Phi(z)$.

Уравнение на скалярное поле имеет вид

$$\frac{1}{b^5} \frac{\partial}{\partial z} \left(b^3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi + \frac{3}{8} \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi} = 0. \quad (4)$$

Из уравнений (3) видно, что поле дилатона и его потенциал могут быть выражены через b -фактор и его производные [9]:

$$\begin{aligned} \Phi' &= \pm \frac{3}{2} \sqrt{\left(\frac{2(b')^2}{b^2} - \frac{b''}{b} \right)}, \\ V(\Phi(z)) &= \frac{3}{b^2} \left(\frac{b''}{b} + \frac{2(b')^2}{b^2} - \frac{4b^2}{L^2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что эти выражения гарантируют выполнение уравнения (4). Выражения (5) не дают явной зависимости потенциала от поля $V = V(\Phi)$. Явный вид $V = V(\Phi)$ может быть получен методом суперпотенциалов [9]. Для применения этого метода удобно переписать уравнения (3) и метрику в новых координатах¹⁾

$$u = \int b(z) dz, \quad (6)$$

в результате чего метрика (2) принимает вид

$$ds^2 = du^2 + e^{2A(u)}(dx^i dx^i - dx^+ dx^-), \quad (7)$$

где $A(u) = \ln(b(u))$. Потенциал связан с суперпотенциалом W :

$$V(\Phi) = -\frac{4}{3} \left(\frac{dW}{d\Phi} \right)^2 + \frac{64}{27} W^2 - \frac{12}{L^2}. \quad (8)$$

Суперпотенциал W связан с функцией A следующим образом:

$$W(\Phi) = -\frac{9}{4} \frac{dA}{du}, \quad (9)$$

поле дилатона определяется как

$$\Phi = \pm \frac{3}{2} \int \sqrt{-\frac{d^2 A}{du^2}} du. \quad (10)$$

¹⁾Здесь u – аналог космической координаты в космологическом применении метода суперпотенциалов (см., например, [10]).

В простейшем случае модифицированного пространства с экспоненциальным b -фактором вида $b = e^{-z/R}$ (предполагается, что $R \sim \Lambda_{\text{QCD}}^{-1} \sim 1$ фм) с помощью метода суперпотенциалов получаем следующую зависимость потенциала от поля:

$$V(\Phi) = -\frac{12}{L^2} + \frac{9}{R^2} e^{\pm 4(\Phi - \Phi_0)/3}, \quad (11)$$

где Φ_0 – постоянная интегрирования.

2.2. Степенной b -фактор. Перейдем к рассмотрению модифицированного пространства со степенным b -фактором $b(z) = (L/z)^a$. В случае $a = 1$ рассматриваемым пространством является пространство AdS_5 .

Потенциал и поля можно представить как функции переменной z . В рассматриваемом случае $\Phi = \Phi(z)$ – однозначная функция от z , и мы можем выразить координату как функцию поля $z = z(\Phi)$, подставить z в выражение для потенциала $V(z) = V(z(\Phi))$, откуда получим

$$V(\Phi) = -\frac{12}{L^2} + \frac{3a(3a+1)}{L^{2a}} \exp\left(\pm \frac{4}{3} \sqrt{\frac{a-1}{a}} (\Phi - \Phi_0)\right). \quad (12)$$

Очевидно, поле Φ и потенциал $V(\Phi)$ вещественны при $a > 1$.

При $a < 1$ рассматривается фантомное поле Φ_p , которое соответствует действию

$$S_{\Phi_p} = -\frac{1}{16\pi G_5} \int \sqrt{-g} \left[\frac{4}{3} (\partial \Phi_p)^2 + \tilde{V}(\Phi_p) \right] dx^5.$$

Фантомное поле Φ_p связано с полем дилатона Φ как $\Phi - \Phi_0 = i(\Phi_p - \Phi_{p0})$. Потенциал при $a < 1$ принимает вид

$$\tilde{V}(\Phi_p) = -\frac{12}{L^2} + \frac{3a(3a+1)}{L^{2a}} \exp\left(\pm \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1-a}{a}} (\Phi_p - \Phi_{p0})\right).$$

Для фантомного поля выражения (5) заменяются на аналогичные:

$$\partial_z \Phi_p = \pm \frac{3}{2} \sqrt{\left(\frac{b''}{b} - \frac{2(b')^2}{b^2}\right)}, \quad \tilde{V}(\Phi_p(z)) = \frac{3}{b^2} \left(\frac{b''}{b} + \frac{2(b')^2}{b^2} - \frac{4b^2}{L^2} \right). \quad (13)$$

2.3. Модернизированный смешанный b -фактор. Рассмотрим пространство с модернизированным смешанным b -фактором вида

$$b(z) = \left(\frac{L}{z}\right)^a e^{-z^2/R^2}. \quad (14)$$

Метод суперпотенциалов неприменим к данному случаю, так как переменная z не может быть выражена через новую переменную u и $b(u)$ не имеет явного представления. Для b -фактора (14) с помощью формул (5) представим $\partial_z \Phi(z)$, $V(\Phi(z))$ следующим образом:

$$\partial_z \Phi(z) = \pm \frac{3}{2} \frac{\xi}{R^2 z^2}, \quad (15)$$

где

$$\xi = \sqrt{\zeta}, \quad \zeta = 4z^4 + 2R^2(2a+1)z^2 + aR^4(a-1),$$

и

$$V(z) = -\frac{12}{L^2} + \frac{3(L/z)^{-2a}(aR^4(3a+1) + 2z^2R^2(6a-1) + 12z^4)e^{2z^2/R^2}}{z^2R^4}. \quad (16)$$

Рис. 1. Потенциал, соответствующий $b = (L/z)^a e^{-z^2/R^2}$, при $a = 2$, $L = 4.4$ фм, $R = 1$ фм (а) и при $a = 1$, $L = 4.4$ фм, $R = 1$ фм, $\Phi_0 = -0.5$ (б). На графиках правая и левая ветви соответствуют знакам $+$ и $-$ в (15).

Рис. 2. Функция $\zeta = \zeta(z)$ при $a = 1/2$.

Проинтегрировав (15), получаем

$$\Phi_{\pm} = \pm \left(\frac{3}{4} \frac{\xi}{R^2} + \frac{3}{8} (2a+1) \ln \frac{2\xi + (2a+1)R^2 + 4z^2}{2\mu_0^2} - \right. \\ \left. - \frac{3}{4} \sqrt{a(a-1)} \ln \frac{2R^2(a(a-1)R^2 + (2a+1)z^2 + \xi\sqrt{a(a-1)})}{\mu_0^2 z^2} \right) + \Phi_{0\pm}, \quad (17)$$

где μ_0 – произвольная размерная постоянная, для определенности $\mu_0 = 1$ фм, а произвол в выборе постоянной учтен в $\Phi_{\pm 0}$.

Если $a > 1$, то выражение (17) хорошо определено. При $z \rightarrow \infty$ получаем, что $\Phi \sim 3z^2/2R^2$ и $V \sim \Phi^{a+1} e^{4\Phi/3}$. Потенциал $V(\Phi)$ изображен на рис. 1 при $a = 1$, $a = 2$.

При $a < 1$ функция $\zeta(z)$ имеет положительный корень, $\zeta(z_0) = 0$ и $\zeta(z) > 0$ при $z > z_0$, $\zeta(z) < 0$ при $0 < z < z_0$. Функция $\zeta(z)$ представлена на рис. 2. В случае

Рис. 3. Фантомное Φ_p (штриховая линия) и дилатонное Φ_s (сплошная линия) поля как функции от z (а). Зависимость потенциала V от дилатонного и фантомного полей (б). Потенциал V как функция дилатонного поля при малых Φ (увеличенная нижняя часть кривой с рис. 3б) (в). Графики соответствуют $a = 1/2$, $L = 4.4$ фм, $R = 1$ фм и знаку $+$ в (15).

$a = 1/3$ точка $z_0 \approx 0.249$ фм, а при $a = 1/2$ получаем $z_0 \approx 0.243$ фм. В окрестности точки $z = z_0$ функция $\Phi(z)$ имеет вид

$$\Phi(z) \sim (z^2 - z_0^2)^{3/2} (A + O(z^2 - z_0^2)), \quad A = \pm \frac{2(8a + 1)^{1/4}}{\sqrt{z_0}}. \quad (18)$$

Поле $\Phi(z)$ вещественно при $z > z_0$,

$$\begin{aligned} \Phi_{s\pm} = & \frac{3}{4R^2} \left(\sqrt{\zeta} - \sqrt{-(a^2 - a)R^4} \operatorname{arctg} \left(\frac{(a^2 - a)R^4 + (2a + 1)R^2 z^2}{\sqrt{-\zeta(a^2 - a)R^4}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(2a + 1)R^2 \ln \frac{a(4\sqrt{\zeta} + 8z^2 + 2(2a + 1)R^2)}{\mu_0^2} \right) + \Phi_{s0\pm}, \end{aligned}$$

и мнимое при $z < z_0$, $\Phi_{s\pm} - \Phi_{s0\pm} = i(\Phi_{p\pm} - \Phi_{p0\pm})$,

$$\begin{aligned} \Phi_{p\pm} = & \pm \frac{3}{4R^2} \left(\sqrt{aR^4(1-a)} \times \right. \\ & \times \ln \left(\frac{2\sqrt{aR^4(1-a)}\sqrt{-\zeta} + 2R^2[(a-a^2)R^2 - 2z^2(a+1/2)]}{\mu_0^2 z^2} \right) - \\ & \left. - \left(\left(a + \frac{1}{2} \right) R^2 \arctg \left(\frac{(2a+1)R^2 + 4z^2}{2\mu_0^2 \sqrt{-\zeta}} \right) - \frac{\sqrt{-\zeta}}{\mu_0^2} \right) \right) + \Phi_{p0\pm}. \end{aligned}$$

Удобным выбором постоянных является $\Phi_{s\pm}(z_0) = \Phi_{p\pm}(z_0) = 0$. Скалярное поле может быть записано в виде $\Phi = \Phi_s \Theta(z - z_0) + i\Phi_p \Theta(z_0 - z)$. Таким образом, при $z < z_0$ мы имеем теорию с альтернативным знаком кинетического члена.

Потенциал может быть представлен параметрически как функция вещественного слагаемого Φ_s при $z > z_0$ и мнимого слагаемого Φ_p при $z < z_0$. Графически такой потенциал представлен на рис. 3.

3. ШОКОВАЯ ВОЛНА

В этом разделе мы даем несколько замечаний к нашему предыдущему рассмотрению [1]. Чтобы принять во внимание шокуюю волну, мы добавляем в (1) действие точечного источника, движущегося вдоль траектории $x^\mu = x_*^\mu(\eta)$,

$$S_{\text{st}} = \int \left[\frac{1}{2e} g_{\mu\nu} \frac{dx_*^\mu}{d\eta} \frac{dx_*^\nu}{d\eta} - \frac{e}{2} m^2 \right] d\eta,$$

где m – масса частицы, η – параметр мировой линии. Далее мы предполагаем, что масса m равна нулю, это позволяет рассматривать только светоподобные геодезические, e_μ^a – тетрада, связанная с метрикой $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_{\nu a}$, $e = \sqrt{-g}$, g – детерминант метрики. Мы предполагаем, что метрика имеет вид шокковой волны [11]–[18]

$$ds^2 = b^2(z)(dz^2 + dx^i dx^i - dx^+ dx^- + \phi(z, x^1, x^2) \delta(x^+) (dx^+)^2), \quad i = 1, 2. \quad (19)$$

Метрика шокковой волны является решением уравнения Эйнштейна

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} R \right) - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left(-\frac{4}{3} (\partial\Phi)^2 + V(\Phi) \right) - \frac{4}{3} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \frac{d(d-1)}{2L^2} = 8\pi G_5 J_{\mu\nu}, \quad (20)$$

где $(\partial\Phi)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi$, а $J_{\mu\nu}$ – ток, определенный выражением [6]

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \int e p_\mu p_\nu \delta(x^\mu - x_*^\mu) d\eta, \quad (21)$$

здесь p_μ – сопряженный импульс $p_\mu = e^{-1} g_{\mu\nu} (dx^\nu/d\eta)$. Ненулевая компонента тока в светоподобных координатах (x^+, x^-, x^i, z) , $i = 1, 2$, имеет вид

$$J_{++} = \frac{E}{b^3(z)} \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(z - z_*) \delta(x^+),$$

где E соответствует энергии сталкивающихся ионов. Метрика (19) имеет дополнительный по сравнению с метрикой (2) профиль шокковой волны $\phi(z, x_\perp)$, который с учетом (20) удовлетворяет уравнению

$$\left(\partial_{x^1}^2 + \partial_{x^2}^2 + \partial_z^2 + \frac{3b'}{b} \partial_z \right) \phi(z, x_\perp) = -16\pi G_5 \frac{E}{b^3} \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(z - z_*). \quad (22)$$

Из (22) видно, что дилатонное поле не влияет прямым образом на профиль волны, полученной от источника, а влияет только через b -фактор.

4. ГОЛОГРАФИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ КРИВЫХ МНОЖЕСТВЕННОСТИ С ПОМОЩЬЮ МОДЕРНИЗИРОВАННОГО B -ФАКТОРА

Уравнение на профиль волны домена в пространстве с модернизированным смешанным b -фактором $b = (L/z)^a e^{-z^2/R^2}$ может быть представлено в виде [1], [19]

$$\left(\partial_z^2 + \frac{3b'}{b}\partial_z\right)\phi^\omega(z) = -\frac{16\pi G_5 E}{L^2} \frac{\delta(z - z_*)}{b^3(z)}, \quad (23)$$

где

$$\phi^\omega(z) = \frac{1}{L^2} \int \phi(z, x_\perp) dx_\perp,$$

L – радиус домена. Уравнение (23) рассматривается по отдельности до и после точки столкновения. Граничные точки ловушечной поверхности обозначаются как z_a и z_b , $z_a < z_* < z_b$, z_* – точка столкновения. Решение уравнения (23) представим в виде

$$\phi^\omega(z) = \phi_a \Theta(z_* - z) + \phi_b \Theta(z - z_*), \quad (24)$$

где

$$\phi_a = C_a \int_{z_a}^z b^{-3} dz, \quad \phi_b = C_b \int_{z_b}^z b^{-3} dz.$$

Постоянные C_a и C_b определяются выражениями

$$C_a = \frac{16\pi G_5 E}{L^2} \int_{z_b}^{z_*} b^{-3} dz \left(\int_{z_b}^{z_a} b^{-3} dz \right)^{-1},$$

$$C_b = \frac{16\pi G_5 E}{L^2} \int_{z_a}^{z_*} b^{-3} dz \left(\int_{z_b}^{z_a} b^{-3} dz \right)^{-1}.$$

Условие формирования ловушечной поверхности [1] приводит к дополнительным требованиям к волне домена

$$\partial_z \phi^\omega(z) \Big|_{z=z_a} = 2, \quad \partial_z \phi^\omega(z) \Big|_{z=z_b} = -2.$$

Эти условия дают

$$\frac{8\pi G_5 E}{L^2} b^{-3}(z_a) \int_{z_b}^{z_*} b^{-3} dz \left(\int_{z_b}^{z_a} b^{-3} dz \right)^{-1} = 1,$$

$$\frac{8\pi G_5 E}{L^2} b^{-3}(z_b) \int_{z_a}^{z_*} b^{-3} dz \left(\int_{z_b}^{z_a} b^{-3} dz \right)^{-1} = -1. \quad (25)$$

Используя обозначение

$$\int_{z_i}^{z_j} b^{-3} dz = F(z_j) - F(z_i)$$

в уравнениях (25), получаем соотношения между точками z_* , z_a , z_b и z_a , z_b соответственно:

$$F(z_*) = \frac{b^{-3}(z_b)F(z_a) + b^{-3}(z_a)F(z_b)}{b^{-3}(z_a) + b^{-3}(z_b)}, \quad (26)$$

$$b^{-3}(z_a) = \frac{b^{-3}(z_b)}{(8\pi G_5 E/L^2)b^{-3}(z_b) - 1}. \quad (27)$$

Рис. 4. Зависимость z_a от z_b , соответствующая $a = 1/2$, при энергиях 2 ГэВ и 220 ГэВ.

Выражение (27) для рассматриваемого b -фактора $b(z) = (L/z)^a e^{-z^2/R^2}$ может быть представлено в виде

$$\left(\frac{z_a}{L}\right)^{3a} e^{3z_a^2/R^2} = \frac{(z_b/L)^{3a} e^{3z_b^2/R^2}}{(8\pi G_5 E/L^2)(z_b/L)^{3a} e^{3z_b^2/R^2} - 1}. \quad (28)$$

Решением (28) является

$$z_a = R \sqrt{\frac{a}{2} W \left(\frac{2L^2}{aR^2} \left(\frac{(z_b/L)^{3a} e^{3z_b^2/R^2}}{(8\pi G_5 E/L^2)(z_b/L)^{3a} e^{3z_b^2/R^2} - 1} \right)^{2/3a} \right)}, \quad (29)$$

где $W(x)$ – функция Ламберта.

Полученное выражение имеет простейшую форму при $a = 1/3$, а именно

$$z_a = \frac{R}{\sqrt{6}} \sqrt{W \left(\frac{6L^2}{R^2} \left(\frac{(z_b/L) e^{3z_b^2/R^2}}{(8\pi G_5 E/L^2)(z_b/L) e^{3z_b^2/R^2} - 1} \right)^2 \right)}. \quad (30)$$

Зависимость z_a от z_b при $a = 1/2$ и фиксированных значениях энергии представлена на рис. 4. При достаточно больших значениях z_b выражение (28) упрощается и стремится к виду

$$\left(\frac{z_a}{L}\right)^{3a} e^{3z_a^2/R^2} \xrightarrow{z_b \rightarrow \infty} \frac{L^2}{8\pi G_5 E}, \quad (31)$$

откуда получаем

$$z_a \xrightarrow{z_b \rightarrow \infty} R \sqrt{\frac{a}{2}} \sqrt{W \left(\frac{2L^2}{aR^2} \left(\frac{L^2}{8\pi G_5 E} \right)^{2/3a} \right)}. \quad (32)$$

Подстановкой (27) в (26) получаем уравнение

$$\frac{8\pi G_5 E}{L^2} b^{-3}(z_b) = \frac{\Gamma((3a+1)/2, -3z_b^2/R^2) - \Gamma((3a+1)/2, -3z_a^2/R^2)}{\Gamma((3a+1)/2, -3z_*^2/R^2) - \Gamma((3a+1)/2, -3z_a^2/R^2)}, \quad (33)$$

где $\Gamma(A, X)$ – неполная гамма-функция.

При $a = 1/3$ уравнение (33) переписывается как

$$\frac{8\pi G_5 E}{L^2} b^{-3}(z_b) = \frac{e^{3zb^2/R^2} - e^{3za^2/R^2}}{e^{3z_*^2/R^2} - e^{3za^2/R^2}}. \quad (34)$$

Используя представление для неполной гамма-функции

$$\Gamma(A, X) = \Gamma(A) - \frac{X {}_1F_1(A, A+1, -X)}{A}, \quad (35)$$

где ${}_1F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция, записываем (33) в виде

$$\frac{8\pi G_5 E}{L^2} b^{-3}(z_b) = \frac{z_a^{(3a+1)/2} {}_1F_1\left(\frac{3a+1}{2}, \frac{3(a+1)}{2}, \frac{3z_a^2}{R^2}\right) - z_b^{(3a+1)/2} {}_1F_1\left(\frac{3a+1}{2}, \frac{3(a+1)}{2}, \frac{3z_b^2}{R^2}\right)}{z_a^{(3a+1)/2} {}_1F_1\left(\frac{3a+1}{2}, \frac{3(a+1)}{2}, \frac{3z_a^2}{R^2}\right) - z_*^{(3a+1)/2} {}_1F_1\left(\frac{3a+1}{2}, \frac{3(a+1)}{2}, \frac{3z_*^2}{R^2}\right)}. \quad (36)$$

С помощью разложения в ряд вырожденной гипергеометрической функции

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (37)$$

где $(\alpha)_k, (\gamma)_k$ – символы Похгаммера, упростим формулу (36):

$$\frac{8\pi G_5 E}{L^2} \left(\frac{z_b}{L}\right)^{3a} e^{3z_b^2/R^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3z_a^2/R^2)^{k+(3a+1)/2} - (3z_b^2/R^2)^{k+(3a+1)/2}}{(3z_a^2/R^2)^{k+(3a+1)/2} - (3z_*^2/R^2)^{k+(3a+1)/2}}. \quad (38)$$

Отметим, что условие (38) согласовано с неравенством $z_a < z_* < z_b$.

Для произвольных a формула (26) принимает вид

$$\begin{aligned} z_*^{2a} {}_1F_1\left(\frac{3a+1}{2}, \frac{3(a+1)}{2}, \frac{3z_*^2}{R^2}\right) &= \\ &= \frac{z_a^{2a} z_b^{2a} \left(z_b^a e^{3z_b^2/R^2} {}_1F_1\left(\frac{3a+1}{2}, \frac{3(a+1)}{2}, \frac{3z_a^2}{R^2}\right) + z_a^a e^{3z_a^2/R^2} {}_1F_1\left(\frac{3a+1}{2}, \frac{3(a+1)}{2}, \frac{3z_b^2}{R^2}\right) \right)}{z_a^{3a} e^{3z_a^2/R^2} + z_b^{3a} e^{3z_b^2/R^2}}. \end{aligned}$$

Решить полученное уравнение аналитически весьма затруднительно. Однако в частном случае $a = 1/3$ выражение (26) упрощается,

$$e^{3z_*^2/R^2} = \frac{z_a + z_b}{z_a e^{-3z_b^2/R^2} + z_b e^{-3z_a^2/R^2}}, \quad (39)$$

и имеет аналитическое решение

$$z_* = \sqrt{\frac{R^2}{3} \ln \left(\frac{z_a + z_b}{z_a e^{-3z_b^2/R^2} + z_b e^{-3z_a^2/R^2}} \right)}.$$

Функции ϕ_a, ϕ_b могут быть представлены как

$$\begin{aligned} \phi_a &= \frac{16\pi G_5 E}{L^2} \int_{z_b}^{z_*} b^{-3} dz \cdot \int_{z_a}^z b^{-3} dz \left(\int_{z_b}^{z_a} b^{-3} dz \right)^{-1}, \\ \phi_b &= \frac{16\pi G_5 E}{L^2} \int_{z_a}^{z_*} b^{-3} dz \cdot \int_{z_b}^z b^{-3} dz \left(\int_{z_b}^{z_a} b^{-3} dz \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Рис. 5. Профиль ϕ^ω , соответствующий смешанному b -фактору $b(z) = (L/z)^a e^{-z^2/R^2}$, при $z_b = 0.5$ фм, $a = 1/3$, $R = 1$ фм, для $E = 0.2$ ГэВ (пунктирная линия), $E = 2$ ГэВ (сплошная линия), $E = 2$ ТэВ (штриховая линия).

Используя свойство (35), находим

$$\int b^{-3} dz = \frac{z(L/z)^{-3a} {}_1F_1((3a+1)/2, 3(a+1)/2, 3z^2/R^2)}{3a+1} + C.$$

Вводя новое обозначение

$$\Upsilon(z) = z \left(\frac{L}{z} \right)^{-3a} {}_1F_1 \left(\frac{3a+1}{2}, \frac{3(a+1)}{2}, \frac{3z^2}{R^2} \right), \quad (41)$$

получаем представления выражений (40):

$$\begin{aligned} \phi_a &= \frac{16\pi G_5 E}{(3a+1)L^2} \frac{(\Upsilon(z_b) - \Upsilon(z_*))(\Upsilon(z) - \Upsilon(z_a))}{\Upsilon(z_b) - \Upsilon(z_a)}, \\ \phi_b &= \frac{16\pi G_5 E}{(3a+1)L^2} \frac{(\Upsilon(z_*) - \Upsilon(z_a))(\Upsilon(z_b) - \Upsilon(z))}{\Upsilon(z_b) - \Upsilon(z_a)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Выражение (41) при $a = 1/3$ имеет вид

$$\Upsilon(z) = \frac{R^2}{3L} (e^{3z^2/R^2} - 1). \quad (43)$$

Таким образом, функции ϕ_a и ϕ_b представляются как

$$\begin{aligned} \phi_a &= \frac{8}{3} \frac{\pi G_5 E R^2}{L^3} \frac{(e^{3z_b^2/R^2} - e^{3z_*^2/R^2})(e^{3z^2/R^2} - e^{3z_a^2/R^2})}{e^{3z_b^2/R^2} - e^{3z_a^2/R^2}}, \\ \phi_b &= \frac{8}{3} \frac{\pi G_5 E R^2}{L^3} \frac{(e^{3z_*^2/R^2} - e^{3z_a^2/R^2})(e^{3z_b^2/R^2} - e^{3z^2/R^2})}{e^{3z_b^2/R^2} - e^{3z_a^2/R^2}}. \end{aligned} \quad (44)$$

Построенная по ϕ_a и ϕ_b функция (24) при $a = 1/3$, $G_5 = L^3/1.9$, $L = 4.4$ фм, $z_b = 0.5$ фм представлена на рис. 5.

Рис. 6. Профиль ϕ^ω , соответствующий b -фактору $b(z) = (L/z)^a e^{-z^2/R^2}$, при $z_b = 0.5$ фм, $a = 1/3$, $R = 1$ фм, $E = 28.74$ МэВ (пунктирная линия), $E = 28.66$ МэВ (штриховая линия), $E = 28.57$ МэВ (сплошная линия).

Условие $z_a < z_b$ выполняется, если имеет место оценка

$$E > \frac{L^3}{4\pi G_5 z_b e^{3z_b^2/R^2}}.$$

Ловушечная поверхность не образуется при энергии

$$E = \frac{L^3}{4\pi G_5 z_b e^{3z_b^2/R^2}}, \quad (45)$$

которая примерно равна 28.568 МэВ при следующих значениях параметров: $G_5 = L^3/1.9$, $L = 4.4$ фм, $a = 1/3$ и $z_b = 0.5$ фм (рис. 6).

Энтропия черной дыры пропорциональна площади ловушечной поверхности. Ранее [1] мы использовали эту связь для вычисления относительной энтропии в модифицированных пространствах с b -фактором. Сейчас мы рассматриваем относительную энтропию в пространстве с b -фактором вида

$$b(z) = \left(\frac{L}{z}\right)^a e^{-z^2/R^2}.$$

Для рассматриваемого случая относительная энтропия

$$s = \frac{\Xi(z_a) - \Xi(z_b)}{2G_5 \cdot 3(3a-1)(a-1)}, \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi(z) = & \left(\frac{L}{z}\right)^{3a} z e^{-3z^2/2R^2} \times \\ & \times \left(2 \left(\frac{3z^2}{R^2}\right)^{(3a-1)/4} \mathbf{M}\left(\frac{-3a+1}{4}, \frac{3(-a+1)}{4}, \frac{3z^2}{R^2}\right) + 3(1-a)e^{-3z^2/2R^2}\right), \end{aligned}$$

Рис. 7. Зависимость относительной энтропии от z_b при $a = 1/2$ и энергиях 2 ГэВ и 220 ГэВ.

Рис. 8. Зависимость максимальной относительной энтропии от энергии при $a = 1/2$.

$\mathbf{M}(\mu, \nu, z) = e^{-z/2} z^{1/2+\nu} {}_1F_1(1/2 + \nu - \mu, 1 + 2\nu, z)$ – функция Уиттекера, $a \neq 1/3$, $a \neq 1$.

На рис. 7 приведена зависимость s от z_b при энергиях 2 ГэВ и 220 ГэВ. Относительная энтропия принимает максимальное значение при бесконечном z_b :

$$s \xrightarrow{z_b \rightarrow \infty} \frac{(L/z_a)^{3a} z_a e^{-3z_a^2/2R^2}}{6G_5 \cdot (3a-1)(1-a)} \times \left(2 \left(\frac{3z_a^2}{R^2} \right)^{(3a-1)/4} \mathbf{M} \left(\frac{-3a+1}{4}, \frac{3(-a+1)}{4}, \frac{3z_a^2}{R^2} \right) + 3(1-a)e^{-3z_a^2/2R^2} \right), \quad (47)$$

где $a > 1/3$, $a \neq 1$, z_a определяется в (32). Поведение относительной энтропии (47) при $a = 1/2$ приведено на рис. 8, а соответствующая аппроксимация – на рис. 9.

Рис. 9. Зависимость максимальной относительной энтропии от энергии (сплошная линия) и ее аппроксимация (крестики) при значении параметра $a = 1/2$. а – Аппроксимация $(E^{0.3}(57 - 29.75(\ln(E + 100))) - 7)/2G_5$ на энергетическом интервале $0 < E < 10$ ГэВ, б – аппроксимация $(E^{0.3}(61 - 45.05(\ln(E + 100))) - 24)/2G_5$ на энергетическом интервале $10 < E < 100$ ГэВ, в – аппроксимация $(E^{0.3}(81 - 5.95 \ln(E + 100)) - 67)/2G_5$ на энергетическом интервале $10^2 < E < 10^3$ ГэВ.

В случае $a = 1/3$ относительная энтропия может быть представлена как

$$s = \frac{L}{4G_5} \left(\text{Ei} \left(1, \frac{3z_a^2}{R^2} \right) - \text{Ei} \left(1, \frac{3z_b^2}{R^2} \right) \right), \quad (48)$$

и

$$s \xrightarrow{z_b \rightarrow \infty} \frac{L}{4G_5} \text{Ei} \left(1, \frac{3z_a^2}{R^2} \right) = \frac{L}{4G_5} \text{Ei} \left(1, \frac{1}{2} W \left(\frac{6L^2}{R^2} \left(\frac{L^2}{8\pi G_5 E} \right)^2 \right) \right). \quad (49)$$

Таким образом, при $a = 1/3$ энтропия S изменяется как

$$S \sim \text{Ei} \left(1, \frac{1}{2} W \left(\frac{6L^2}{R^2} \left(\frac{L^2}{8\pi G_5 E} \right)^2 \right) \right),$$

где $\text{Ei}(1, x)$ – интегральная экспонента.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В случаях, хорошо описывающих эксперимент ($a < 1$), найдено, что в пространстве со степенным b -фактором скалярное поле является фантомным, а в пространстве со смешанным b -фактором вида $b = (L/z)^a e^{-z^2/R^2}$ поле является фантомным в интервале $z < z_0$ и дилатонным в интервале $z > z_0$. Мы исследовали возможность формирования ловушечных поверхностей при столкновении доменов в модифицированном пространстве AdS_5 с модифицированным смешанным b -фактором. Мы проанализировали зависимость энтропии от энергии сталкивающихся тяжелых ионов в пространстве с модернизированным смешанным b -фактором, используя условия формирования ловушечной поверхности. На основе $\text{AdS}/\text{КТП}$ -дуальности наши результаты позволяют моделировать зависимость множественности рождения частиц от энергии сталкивающихся тяжелых ионов. Результаты могут быть применены для сравнения с экспериментальными кривыми множественности рождения частиц при столкновениях тяжелых ионов. В дальнейшем в используемых моделях с учетом явного вида потенциала мы планируем изучить другие физические свойства соответствующей кварк-глюонной плазмы, такие как спектр, зависимость температуры разрыва струны между кварками и др. [18], [20].

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 14-01-00707_а) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3042.2014.2 (Е. О. Поздеева)).

Список литературы

- [1] И. Я. Арефьева, Е. О. Поздеева, Т. О. Поздеева, *ТМФ*, **176**:1 (2013), 35–49.
- [2] S. Lin, E. Shuryak, *Phys. Rev. D*, **79**:12 (2009), 124015, 12 pp., arXiv:0902.1508; *Phys. Rev. D*, **83**:4 (2011), 045025, 14 pp., arXiv:1011.1918.
- [3] I. Ya. Aref'eva, A. A. Bagrov, E. O. Pozdeeva, *JHEP*, **05** (2012), 117, 34 pp., arXiv:1201.6542.
- [4] E. Kiritsis, A. Taliotis, *JHEP*, **04** (2012), 065, 37 pp., arXiv:1111.1931; A. Taliotis, *JHEP*, **05** (2013), 034, 31 pp., arXiv:1212.0528.
- [5] K. Aamodt, B. Abelev, A. Abrahantes Quintana, et al. [ALICE Collaboration], *Phys. Rev. Lett.*, **105**:25 (2010), 252301, 11 pp., arXiv:1011.3916.
- [6] S. S. Gubser, S. S. Pufu, A. Yarom, *Phys. Rev. D*, **78**:6 (2008), 066014, 17 pp., arXiv:0805.1551; *JHEP*, **11** (2009), 050, 37 pp., arXiv:0902.4062.
- [7] U. Gürsoy, E. Kiritsis, *JHEP*, **08** (2008), 032, 56 pp., arXiv:0707.1324; U. Gürsoy, E. Kiritsis, F. Nitti, *JHEP*, **02** (2008), 019, 75 pp., arXiv:0707.1349.
- [8] U. Gürsoy, E. Kiritsis, L. Mazzanti, F. Nitti, *Phys. Rev. Lett.*, **101**:18 (2008), 181601, 4 pp., arXiv:0804.0899.
- [9] U. Gürsoy, E. Kiritsis, L. Mazzanti, F. Nitti, *JHEP*, **05** (2009), 033, 111 pp., arXiv:0812.0792.
- [10] И. Я. Арефьева, С. Ю. Вернов, А. С. Кошелев, *ТМФ*, **148**:1 (2006), 23–41, arXiv:astro-ph/0412619.
- [11] I. Ya. Aref'eva, *Phys. Part. Nucl.*, **41**:6 (2010), 835–843, arXiv:0912.5481.
- [12] M. Hotta, M. Tanaka, *Class. Quant. Grav.*, **10**:2 (1993), 307–314.
- [13] J. Podolský, J. B. Griffiths, *Phys. Lett. A*, **261**:1–2 (1999), 1–4, arXiv:gr-qc/9908008; J. Podolský, “Exact impulsive gravitational waves in spacetimes of constant curvature”, *Gravitation: Following the Prague Inspiration*, eds. O. Semerák, J. Podolský, M. Zofka, World Sci., Singapore, 2002, 205–246, arXiv:gr-qc/0201029.

- [14] K. Sfetsos, *Nucl. Phys. B*, **436**:3 (1995), 721–745, [arXiv: hep-th/9408169](#).
- [15] И. Я. Арефьева, А. А. Баргов, Л. В. Жуковская, *Алгебра и анализ*, **22**:3 (2010), 3–15.
- [16] L. Álvarez-Gaumé, C. Gómez, A. Sabio Vera, A. Tavanfar, M. A. Vázquez-Mozo, *JHEP*, **02** (2009), 009, 14 pp., [arXiv: 0811.3969](#).
- [17] И. Я. Арефьева, А. А. Баргов, *ТМФ*, **161**:3 (2009), 382–399.
- [18] I. Aref’eva, *PoS (ICMP 2012)*, 2012, 025, 29 pp.
- [19] I. Ya. Aref’eva, E. O. Pozdeeva, T. O. Pozdeeva, *Holographic estimation of multiplicity and membranes collision in modified spaces AdS_5* , [arXiv: 1401.1180](#).
- [20] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal, U. A. Wiedemann, *Gauge/string duality, hot QCD and heavy ion collisions*, [arXiv: 1101.0618](#).

Поступила в редакцию 18.02.2014