Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Агеев, И. Я. Арефьева, Голография и нелокальные операторы для черной дыры БТЗ с ненулевым моментом, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 2, 147–161

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8661>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:05:08

© 2014 г.

Д. С. Агеев*, И. Я. Арефьева*

ГОЛОГРАФИЯ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ БТЗ С НЕНУЛЕВЫМ МОМЕНТОМ

С использованием АдС/КТП-соответствия изучается синглетный потенциал взаимодействия пары кварк–антикварк для черной дыры БТЗ с ненулевым угловым моментом. На основании явных форм струнных конфигураций, дающих вклад в потенциал, показано, что потенциал имеет различные зависимости от углового момента в евклидовой и лоренцевой сигнатурах черной дыры БТЗ.

Ключевые слова: пространство анти-де Ситтера, черные дыры, АдС/КТП-соответствие, голография, кварк-глюонная плазма.

DOI: 10.4213/tmf8661

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что изучение поведения и свойств кварк-глюонной плазмы, полученной в процессе столкновения тяжелых ионов на установках RHIC и LHC, не может быть осуществлено при помощи пертурбативной квантовой хромодинамики (КХД). Голографический подход к этой задаче широко распространен и разработан (см. обзоры [1]–[3]). Хотя точное дуальное пространство для КХД неизвестно, калибровочно-струнная дуальность является одним из плодотворных способов изучения кварк-глюонной плазмы [1], поскольку теория поля при конечной температуре, которая возникает в АдС/КТП-соответствии, описывает многие свойства кварк-глюонной плазмы [1]–[3].

Пространственная анизотропия является важной характеристикой, получаемой из экспериментов по столкновению тяжелых ионов, и существует несколько моделей ее описания в рамках применения АдС/КТП-соответствия. Один из способов учесть пространственную анизотропию состоит в использовании черных дыр Керра в фоновой метрике АдС [4]–[6] (см. также [7], [8]). Другой способ – это прямое использование анизотропной фоновой метрики [9]. В работе [4] были вычислены ведущие поправки к силе сопротивления, действующей на кварк, обусловленные керровским параметром вращения a . Между тем в статье [6] было показано, что

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: ageev@mi.ras.ru, arefeva@mi.ras.ru

время термализации не зависит от a . В настоящей работе мы изучаем зависимость корреляторов петель от параметра вращения a .

Вильсоновский и поляковские корреляторы являются естественными и простыми объектами для изучения калибровочных теорий при конечной температуре и кварк-глюонной плазмы. Имеется большое число статей, в которых используется АдС/КТП-дуальность для исследования этих нелокальных операторов и применения полученных результатов исследования поведения потенциалов взаимодействия кварк-антикварковых пар при различных условиях [10]–[14]. Временная вильсоновская петля при нулевой температуре была вычислена с помощью АдС/КТП-соответствия в пионерской работе [11], а для случая ненулевой температуры корреляторы петель Полякова были вычислены в работах [13], [14] (см. также ссылки в [1], [3]).

В настоящей работе мы исследуем голографические поляковские и вильсоновские петли для черной дыры БТЗ с ненулевым угловым моментом и извлекаем из этих величин синглетный потенциал межкваркового взаимодействия. Согласно голографической прескрипции мы рассматриваем лоренцеву версию черной дыры Банадоса–Тайтельбойма–Занелли (БТЗ) для вильсоновской петли и евклидову версию для поляковских линий и получаем соответствующие потенциалы.

Потенциал межкваркового взаимодействия определен через действие U-образных струнных конфигураций, заканчивающихся на кварках и провисающих в соответствующем пространстве до максимальной координаты z_m . Мы найдем, что действие U-образной струны, записанное через эту максимальную координату z_m , не содержит явной зависимости от параметра вращения a для обеих сигнатур. Вся зависимость от a входит в зависимость z_m от a , т.е. в зависимость от струны в балке. Для неврашающихся черных дыр зависимости z_m от межкваркового расстояния d также одинаковы в разных сигнатурах, так что синглетные потенциалы совпадают. Для вращающихся черных дыр это совпадение более не имеет места. Мы показываем, что потенциалы имеют существенную зависимость от углового момента a для больших значений a .

Структура статьи следующая. В разделе 2, который имеет вводный характер, мы напоминаем геометрию черной дыры БТЗ в лоренцевой и евклидовой версиях и голографический формализм для вильсоновских и поляковских петель. В разделах 3 и 4 представлены формулы для максимального расстояния провисания для обеих сигнатур. В разделе 3 показано, что существуют значения z_m , определяющие “пространство существования” для струнных конфигураций, соединяющих два кварка. В разделе 5 мы вычисляем синглетный потенциал статической кварк-антикварковой пары и действие для струны. В разделе 6 мы используем комплекснозначные конфигурации отдельных струн для выполнения перенормировки в случае лоренцевой сигнатуры и сравниваем эту перенормировку с перенормировкой в евклидовом случае. В приложении приведены приближения для интегралов, которые мы использовали при получении явных выражений.

2. СТРУННЫЕ КОНФИГУРАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ БТЗ

2.1. Пространство БТЗ. Метрика черной дыры БТЗ (в лоренцевой версии) в координатах (r, t, ϕ) имеет вид

$$ds^2 = -\left(-M + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{-M + r^2/l^2 + a^2/r^2} - 2a dt d\phi + r^2 d\phi^2, \quad (1)$$

где $-\infty < t < \infty$, $0 < \phi < 2\pi$, $r > 0$, M – масса черной дыры БТЗ, a – угловой момент, l – размерный параметр. Мы полагаем $l = 1$.

Можно переписать эту метрику, используя замену переменных $r = 1/z$:

$$ds^2 = -\left(-M + \frac{1}{z^2}\right) dt^2 + \frac{1}{z^4} \frac{dz^2}{-M + 1/z^2 + a^2 z^2} - 2a dt d\phi + \frac{1}{z^2} d\phi^2. \quad (2)$$

Евклидова версия метрики (2) имеет вид

$$ds_E^2 = \left(-M + \frac{1}{z^2}\right) dt^2 + \frac{1}{z^4} \frac{dz^2}{-M + 1/z^2 - a^2 z^2} + 2a dt d\phi + \frac{1}{z^2} d\phi^2. \quad (3)$$

Горизонты метрики (2) могут быть получены как решения следующего уравнения:

$$-M + \frac{1}{z^2} + a^2 z^2 = 0. \quad (4)$$

Мы получаем горизонты для лоренцевой версии (2) в z -координатах:

$$z_+ = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}\sqrt{M + \sqrt{M^2 - 4a^2}}}{a}, \quad z_- = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}\sqrt{M - \sqrt{M^2 - 4a^2}}}{a}. \quad (5)$$

Для евклидовой версии метрики (3) мы получаем горизонты в z -координатах в виде

$$z_C^{(E)} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2M + 2\sqrt{M^2 + 4a^2}}}{ia}, \quad z^{(E)} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\sqrt{M^2 + 4a^2} - 2M}}{a}. \quad (6)$$

В предельном случае $a \rightarrow 0$ имеем $z_+ \rightarrow \infty$ и $z_- \rightarrow 1/\sqrt{M}$. Отметим, что $z_C^{(E)}$ всегда комплексно, а $z^{(E)}$ всегда является вещественным.

2.2. Голография и нелокальные операторы. Согласно прескрипции Малдасены вакуумное среднее от оператора $\langle W(C) \rangle$ можно вычислить, используя следующую формулу:

$$\langle W(C) \rangle = e^{-S_{\text{ren}}}, \quad (7)$$

где C – контур на границе пространства БТЗ, $W(C)$ – вильсоновский оператор,

$$W(C) = \frac{1}{N_c} \text{P exp} \left(ig \int A_\mu dx^\mu \right), \quad (8)$$

и S_{ren} – перенормированное действие струны, заканчивающейся на контуре C и провисающей в пространстве БТЗ (см. рис. 1).

Евклидова версия черной дыры БТЗ предоставляет нам связный коррелятор двух поляковских петель

$$\left\langle L^\dagger \left(-\frac{\phi_0}{2} \right) L \left(\frac{\phi_0}{2} \right) \right\rangle = e^{-S_{\text{ren}}}, \quad (9)$$

Рис. 1. Вильсоновская петля C , которая соответствует статической паре кварк–антикварк $(q-\bar{q})$, и струна, натянутая на петлю C в пространстве БТЗ.

где $L(r)$ дается формулой

$$L(r) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left(\text{P exp} \left(ig \int_0^\beta A_4(r, \tau) d\tau \right) \right). \quad (10)$$

2.3. Действие струны Намбу–Гото в пространстве БТЗ. Действие струны Намбу–Гото имеет вид

$$S = - \int d\sigma d\tau \sqrt{-\det h_{\alpha\beta}}, \quad (11)$$

где $h_{\alpha\beta}$ – индуцированная метрика,

$$h_{\alpha\beta} = g_{MN} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N, \quad (12)$$

g_{MN} – фоновая метрика, $X^M(\sigma, \tau)$ – мировая поверхность. Евклидова версия действия записывается как

$$S_E = \int d\sigma d\tau \sqrt{\det h_{\alpha\beta}^{(E)}}, \quad (13)$$

где $h_{\alpha\beta}^{(E)}$ – евклидова версия индуцированной метрики,

$$h_{\alpha\beta}^{(E)} = g_{MN}^{(E)} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N, \quad (14)$$

и $g_{MN}^{(E)}$ – евклидова версия метрики g_{MN} .

Мы выбираем $\sigma = \phi$, $\tau = t$ и $X^M(\sigma, \tau)$ в виде

$$X^M(t, \phi) = \begin{pmatrix} t \\ z(\phi) \\ \phi \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Используя (15), мы получаем индуцированную метрику (12) для метрики (2):

$$d\Sigma^2 = -\left(-M + \frac{1}{z^2}\right) d\tau^2 + \left(\frac{1}{z^4} \frac{z'^2}{-M + 1/z^2 + a^2 z^2} + \frac{1}{z^2}\right) d\sigma^2 - 2a d\tau d\sigma, \quad (16)$$

и индуцированная метрика (14) для метрики (3) имеет вид

$$d\Sigma_E^2 = \left(-M + \frac{1}{z^2}\right) d\tau^2 + \left(\frac{1}{z^4} \frac{z'^2}{-M + 1/z^2 - a^2 z^2} + \frac{1}{z^2}\right) d\sigma^2 + 2a d\tau d\sigma. \quad (17)$$

Можно вычислить значение $\sqrt{-\det h_{\alpha\beta}}$ из выражения (11):

$$\sqrt{-\det h_{\alpha\beta}} = \sqrt{\frac{-z^8 a^4 + 2Mz^6 a^2 + (-M^2 - 2a^2)z^4 + 2Mz^2 - 1 + (Mz^2 - 1)z'^2}{z^4(-a^2 z^4 + Mz^2 - 1)}}, \quad (18)$$

где $h_{\alpha\beta}$ – метрика (16).

Мы можем рассматривать $\sqrt{-\det h_{\alpha\beta}}$ как лагранжиан одномерной системы

$$S = - \int_0^T dt \int_{-\phi_0/2}^{\phi_0/2} d\phi \sqrt{-\det h_{\alpha\beta}} = -T \int_{-\phi_0/2}^{\phi_0/2} d\phi \sqrt{-\det h_{\alpha\beta}}. \quad (19)$$

Так как лагранжиан (18) не содержит явной зависимости от ϕ , он допускает интеграл движения

$$\mathcal{P} = \frac{1}{z^2} \sqrt{\frac{(a^2 z^4 - Mz^2 + 1)^3}{(a^2 z^4 - Mz^2 + 1)^2 - (Mz^2 - 1^2)(dz/d\phi)^2}}. \quad (20)$$

Когда z принимает свое максимальное значение z_m , производная z' равна нулю, так что можно записать $\mathcal{P}$ через z_m :

$$\mathcal{P} = \frac{\sqrt{a^2 z_m^4 - Mz_m^2 + 1}}{z_m^2}. \quad (21)$$

Таким образом, мы получаем окончательное для анализа поведения струнного профиля в лоренцевом случае выражение для межкваркового расстояния ϕ_0 как функцию от z_m , a и M :

$$\frac{\phi_0}{2} = z_+ z_- \int_0^{z_m} \sqrt{\frac{(Mz^2 - 1)\mathcal{F}(a, M, z_m)}{(z^2 - z_m^2)\mathcal{G}(M, z, z_m)}} \frac{z^2 dz}{\mathcal{F}(a, M, z)}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(a, M, z) &= -1 + z^2(-a^2 z^2 + M) = -a^2(z^2 - z_+^2)(z^2 - z_-^2), \\ \mathcal{G}(M, z, z_m) &= Mz_m^2 z^2 - z^2 - z_m^2. \end{aligned}$$

Чтобы получить аналог формулы (22) в евклидовом случае, мы делаем в (22) замену $a \rightarrow ia$.

3. “ПРОСТРАНСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ” ДЛЯ СТРУНЫ НАМБУ–ГОТО В ПРОСТРАНСТВЕ БТЗ

3.1. Лоренцева версия. В этом разделе мы получаем ограничения на z_m и z , чтобы обеспечить положительность подкоренного выражения в (22), когда $z \in (0, z_m)$, т.е. в области, где происходит интегрирование. Чтобы получить эти ограничения, рассмотрим полиномы, которые входят в подкоренное выражение в (22), и их положительные корни.

Первое выражение под корнем – это $Mz^2 - 1$, его корень равняется координате горизонта черной дыры БТЗ с $a = 0$

$$Z_0 = \frac{1}{\sqrt{M}}. \quad (23)$$

Второе выражение, находящееся под корнем, – это $\mathcal{F}(a, M, z_m)$. Оно не содержит переменной интегрирования z , но все еще дает вклад в знак выражения под корнем, и для удобства мы оставляем его под знаком интеграла. Корни $\mathcal{F}(a, M, z_m)$,

$$\mathcal{F}(a, M, z_m) = -1 + z_m^2(-a^2 z_m^2 + M) = 0, \quad (24)$$

даются в точности горизонтами (5) лоренцевой черной дыры БТЗ с $Z_0 < z_- < z_+$.

Третье выражение, находящееся под корнем, – это $z^2 - z_m^2$, его корень равен

$$z = z_m. \quad (25)$$

Четвертое из подкоренных выражений – это $\mathcal{G}(M, z, z_m)$,

$$\mathcal{G}(M, z, z_m) = Mz_m^2 z^2 - z^2 - z_m^2 = 0, \quad (26)$$

его корни находятся на кривой

$$z = \frac{z_m}{\sqrt{Mz_m^2 - 1}} \quad (27)$$

в плоскости (z, z_m) .

Решением уравнения $z_m/\sqrt{Mz_m^2 - 1} = z_m$ является $z_m = \sqrt{2/M}$, оно определяет пересечение z_m и кривой (27).

На рис. 2а показано расположение корней уравнений (23)–(26) на плоскости (z, z_m) . Мы делим плоскость (z, z_m) на зоны. Легко установить знак подкоренного выражения для малых z и z_m , например в точке p (см. рис. 2а), где знак положительный. Чтобы получить знак в любой заданной точке, мы соединяем ее с точкой p , предполагая, что кривая пересекает линии по нормали. Знак меняется каждый раз, когда мы пересекаем одну из кривых на рисунке.

Из рис. 2а видно, что z_m может принимать значения от 0 до Z_0 .

3.2. Евклидова версия. Повторим все шаги анализа, сделанные в п. 3.1, но теперь для случая евклидова пространства БТЗ. Таким образом, мы рассматриваем выражение под корнем в формуле (22) с заменой $a \rightarrow ia$.

Первый член в подкоренном выражении – это $Mz^2 - 1$, его корень равняется координате горизонта черной дыры БТЗ с $a = 0$ и совпадает с (23).

Рис. 2. Расположение корней: случай лоренцевой черной дыры БТЗ (а), случай евклидовой черной дыры БТЗ (б), $z_0 = 1/\sqrt{M}$, $z' = \sqrt{2/M}$. Штриховая линия показывает изменение знака из точки p в точку q . Сплошные кривые соответствуют кривой (27).

Второе выражение, находящееся под корнем, – это $\mathcal{F}(ia, M, z_m)$. Оно не содержит переменной интегрирования z , но все еще дает вклад в знак выражения под корнем, и для удобства мы оставляем его под знаком интеграла. Корни $\mathcal{F}(ia, M, z_m)$,

$$\mathcal{F}(ia, M, z_m) = -1 + z_m^2(a^2 z_m^2 + M) = 0, \quad (28)$$

– в точности горизонты (6) евклидовой черной дыры БТЗ. Отметим, что $z^{(E)} < Z_0$.

Третий член в подкоренном выражении – это $z^2 - z_m^2$, и его корень совпадает с (25).

Четвертый член $\mathcal{G}(M, z, z_m)$ в подкоренном выражении – совпадает с (26), и его корни лежат на кривой (27) в плоскости (z, z_m) .

На рис. 2б приведено расположение корней уравнений (23), (28), (25) и (26) на плоскости (z, z_m) . Из рисунка видно, что в евклидовом случае z_m может принимать значения только от нуля до $z^{(E)}$.

Сравнивая рис. 2а и рис. 2б, мы видим, что имеется существенная разница между поведением струнного профиля для разных сигнатур.

4. ФОРМУЛЫ ДЛЯ МЕЖКВАРКОВОГО РАССТОЯНИЯ

Запишем приближение для интеграла (22), учитывая только главный вклад от полюсов в точках z_m и z_- и от нуля в точке $1/\sqrt{M}$, т. е. мы полагаем в (22) $\mathcal{G}(M, z_m, z_m)$ вместо $\mathcal{G}(M, z, z_m)$ и $(-z_+^2 + z_m^2)$ вместо $(-z_+^2 + z^2)$. В этом приближении интеграл в формуле (22) принимает вид

$$\frac{\phi_0}{2} \approx z_- z_+ \int_0^{z_m} \frac{z^2 \sqrt{(z_-^2 - z_m^2)(-z_+^2 + z_m^2)(Mz^2 - 1)}}{\sqrt{(z^2 - z_m^2)(z_m^2(Mz_m^2 - 1) - z_m^2)(z_-^2 - z^2)(-z_+^2 + z_m^2)}} dz. \quad (29)$$

Переходя к пределу $z_- \rightarrow 1/\sqrt{M}$, $z_+ \rightarrow \infty$ в (29), можно получить

$$\frac{\phi_0}{2} \approx \int_0^{z_m} \frac{z^2 \sqrt{M z_m^2 - 1}}{\sqrt{(M z^2 - 1)(z^2 - z_m^2)(z_m^2 (M z_m^2 - 1) - z_m^2)}} dz. \quad (30)$$

Интегрирование (30) приводит к формуле для межкваркового расстояния в случае нулевого вращения:

$$\frac{\phi_0}{2} \approx \frac{1}{M z_m} \sqrt{\frac{1 - M z_m^2}{2 - M z_m^2}} \mathcal{E}(z_m \sqrt{M}), \quad (31)$$

где $\mathcal{E}(x)$ дается в терминах эллиптических интегралов,

$$\mathcal{E}(x) = K(x) - E(x), \quad (32)$$

$K(x)$ – полный интеграл первого рода, $E(x)$ – полный интеграл второго рода [15].

После интегрирования в случае ненулевого вращения (29) и преобразований получим

$$\frac{\phi_0}{2} \approx z_- z_+ \sqrt{\frac{z_-^2 - z_m^2}{z_+^2 - z_m^2}} \frac{\mathcal{B}(z_-, z_m, M) + M z_-^2 \mathcal{E}(z_m \sqrt{M})}{z_m (\sqrt{2 - M z_m^2})}, \quad (33)$$

где $\mathcal{B}(z_-, z_m, M)$ определяется как

$$\mathcal{B}(z_-, z_m, M) = (1 - M z_-^2) \Pi\left(\frac{z_m^2}{z_-^2}, z_m \sqrt{M}\right) \quad (34)$$

и $\Pi(\nu, k)$ – неполный эллиптический интеграл третьего рода [15]

$$\Pi(\nu, k) = \int_0^1 \frac{dt}{(1 - \nu t^2) \sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}. \quad (35)$$

Переходя к пределу $z_- \rightarrow 1/\sqrt{M}$, $z_+ \rightarrow \infty$ в (33), получим (31).

Для евклидовой версии черной дыры БТЗ формула для межкваркового расстояния такая же с точностью до замены горизонтов на евклидовы следующим образом: $z_- \rightarrow z^{(E)}$, $z_+ \rightarrow z_C^{(E)}$. Отметим, что в этом приближении для $a > M/2$ следует брать вещественную часть от формулы (33).

Вблизи $z_m \sim 0$ выражение (33) линейно, как и должно быть. Можно разложить (33) до более высоких порядков по z_m :

$$\frac{\phi_0}{2} \approx \frac{\pi z_m}{2} + \frac{\sqrt{2}}{64} (2M - \sqrt{M^2 - 4a^2}) z_m^3 + O(z_m^5). \quad (36)$$

Выполняя виковское вращение $a \rightarrow ia$ выражения (36), для евклидовой версии черной дыры БТЗ получаем

$$\frac{\phi_0}{2} \approx \frac{\pi z_m}{2} + \frac{\sqrt{2}}{64} (2M - \sqrt{M^2 + 4a^2}) z_m^3 + O(z_m^5). \quad (37)$$

Рис. 3. Зависимость максимума струнного профиля от межкваркового расстояния ϕ_0 в случае лоренцевой черной дыры БТЗ. Сплошная, штриховая и пунктирная кривые отвечают $a = 0.01$, $a = 6$ и $a = 9$. Здесь $M = 4$.

На рис. 3–5 поведение струнного профиля в балке БТЗ показано для случая различных сигнатур и значений a . Прямые линии отмечают пределы графиков.

5. ДЕЙСТВИЕ И ПОТЕНЦИАЛ

Используя выражение для производной $dz/d\phi$, можно записать действие

$$S = -T \int_{-\phi_m}^{\phi_m} d\phi \frac{z_m^2 (-a^2 z^4 + M z^2 - 1)}{z^4 \sqrt{a^2 z_m^4 - M z_m^2 + 1}}, \quad (38)$$

где $z = z(\phi)$ в соответствии со струнной динамикой, задаваемой в (20). Меняя переменную интегрирования на z (используя (20)), можно записать выражение для действия в следующем виде:

$$S = -2T \int_{\epsilon}^{z_m} \frac{z_m^2 \sqrt{1 - M z^2}}{\sqrt{(M z^2 z_m^2 - z^2 - z_m^2)(z^2 - z_m^2)}} \frac{dz}{z^2}. \quad (39)$$

Легко видеть, что действие в такой форме не содержит a явно, так что вся зависимость от a содержится в z_m . Если положить $\epsilon = 0$, мы получим линейно расходящийся интеграл в (39). Эта расходимость должна быть устранена. Мы обсудим перенормировки более подробно в следующем разделе.

Потенциал межкваркового взаимодействия может быть получен как

$$V(\phi) = \frac{S_{\text{ren}}(\phi)}{T}. \quad (40)$$

Рис. 4. Зависимость максимума струнного профиля от межкваркового расстояния ϕ_0 в случаях лоренцевой и евклидовой черной дыры. Для штриховой и пунктирной кривых, которые отвечают лоренцеву и евклидову случаю соответственно, $a = 9$. Сплошная линия соответствует $a = 0$. Здесь $M = 4$.

Рис. 5. Зависимость максимума струнного профиля от межкваркового расстояния ϕ_0 в случае евклидовой черной дыры БТЗ. Сплошная, штриховая и пунктирная кривые соответствуют $a = 0.01$, $a = 6$ и $a = 9$. Здесь $M = 4$.

Рис. 6. Потенциал для разных значений параметра вращения и различных сигнатур (без конечных контрчленов). Сплошная, штрихпунктирная и штриховая кривые отвечают $a = 1$, $a = 9$ для евклидова случая и $a = 9$ для лоренцева случая. Здесь $M = 4$.

Нас интересует поведение потенциала при малых z_m . Чтобы получить приближенное выражение для потенциала, разложим подынтегральное выражение в (39) в ряд по M . Тогда мы получим

$$V(z_m) \approx -\frac{2A}{z_m} - 2CMz_m, \quad (41)$$

где A – константа, $A = \sqrt{2}\pi^{3/2}/\Gamma^2(1/4) \approx 0.599$, и $C = (E(i) - 2K(i))/4 \approx 0.1779$. Эта формула соответствует перенормированному потенциалу без конечных контрчленов.

Рассмотрим теперь потенциал межкваркового взаимодействия в евклидовом и лоренцевом случаях с $a \gg M/2$. Из рис. 6 легко видеть, что потенциал демонстрирует сильную зависимость от углового момента и зависит от сигнатуры пространства БТЗ, которую мы используем.

6. ПЕРЕНОРМИРОВКИ И СТАТИЧЕСКИЕ КВАРКИ В ПРОСТРАНСТВЕ БТЗ

В этом разделе мы обсуждаем схемы перенормировок для лоренцевой и евклидовой сигнатур. Перенормировка действия струны (39) соотносится с самодействием статических тяжелых кварков, и в голографическом подходе ее связывают с суммой действий двух струн, находящихся на расстоянии d , свешивающихся с границы [11], [13], [14]. А именно, для случая нулевой температуры перенормировка может быть сделана вычитанием действия статических кварков, т.е. $2 \int_{\epsilon}^{\infty} dz/z^2$, которое содержит только линейно расходящийся член $2/\epsilon$ (ср. с регуляризацией, использовавшейся для локальных операторов [16]). В фоновой метрике черной дыры с евклидовой сигнатурой это действие имеет вид $2 \int_{\epsilon}^{z_h} dz/z^2$, что является действием

Рис. 7. Зависимость отношений приближенных значений $S_{f.p.}^{(L)}$ к их численному значению от параметра вращения a в лоренцевом случае: $M < 1$ (сплошная, штриховая и пунктирная кривые отвечают $M = 25$, $M = 16$ и $M = 64$) (а); $M \ll 1$, $a \gg 1$ (сплошная, штриховая и пунктирная кривые отвечают $M = 0.64$, $M = 0.81$ и $M = 0.25$) (б).

двух струн, натянутых между границей и горизонтом черной дыры (здесь z_h – координата горизонта). Эти струны соответствуют энергии самодействия статических кварков в среде при конечной температуре и содержат как расходящуюся часть, так и конечную часть, зависящую от температуры.

В случае лоренцевой сигнатуры не существует общепринятой процедуры перенормировки. В работе [17] для вычитания использовались комплексные струнные конфигурации и перенормировка делалась вычитанием вещественной части действия комплексных U-образных конфигураций, взятых на бесконечности. В настоящей работе мы используем другую схему перенормировки, отличную от схемы в [17].

6.1. Лоренцева сигнатура. Рассмотрим действие конфигурации единичных комплекснозначных струн, взятых на бесконечности. Вещественная часть этого действия содержит расходящуюся и конечную части. Для $a < M/2$ (т.е. меньше экстремального значения) конечная часть равняется нулю. Для формального случая $a > M/2$ конечная часть действия $S_{f.p.}$ не равна нулю. Действительно, действие двух струн в пространстве БТЗ с массой M и параметром вращения a имеет вид

$$S_{\parallel}^{(L)} = -2 \int_{\epsilon}^{1/\sqrt{M}} \sqrt{\frac{1 - Mz^2}{1 - Mz^2 + a^2 z^4}} \frac{dz}{z^2} = -\left(\frac{2}{\epsilon} + 2S_{f.p.}^{(L)}\right). \quad (42)$$

Численно мы делаем оценку $S_{f.p.}^{(L)}$ для $M \gg 1$:

$$S_{f.p.}^{(L)} \approx -\sqrt{M} - a \operatorname{tg}\left(\frac{8}{3\sqrt{M}} \operatorname{arctg} \frac{1}{5.4}\right).$$

Для значений $M < 1$ и $a > 1$ можно оценить конечную часть действия как $S_{f.p.}^{(L)} \approx -1.2/z_h$. На рис. 7 приведено сравнение приближенного значения $S_{f.p.}^{(L)}$ и его численных значений.

Эта схема перенормировки естественным образом соотносится с методом комплекснозначных струн и методом, который мы используем в случае евклидовой

Рис. 8. Зависимость отношений оценок и численных результатов от параметра вращения a для $S_{f.p.}^{(E)}$ в евклидовом случае для $M \gg 1$ (сплошная, штриховая и пунктирная кривые отвечают $M = 25$, $M = 16$ и $M = 64$) (a) и для $M < 1$ (сплошная, штриховая и пунктирная кривые отвечают $M = 0.8$, $M = 0.5$ и $M = 0.9$) (б).

сигнатуры. В случае нулевой температуры результат, полученный этим методом, совпадает со стандартным.

6.2. Евклидова сигнатура. Схема вычитания при перенормировке стандартна, так что действие струнной конфигурации, которая принимает участие в перенормировке, имеет вид

$$S_{\parallel}^{(E)} = 2 \int_{\epsilon}^{z_E} \sqrt{\frac{1 - Mz^2}{1 - Mz^2 - a^2 z^4}} \frac{dz}{z^2} = \frac{2}{\epsilon} + 2S_{f.p.}^{(E)}, \quad (43)$$

где z_E – координата горизонта, $S_{f.p.}^{(E)}$ – конечная часть действия $S_{\parallel}$.

Для значений $M < 1$ мы численно получаем $S_{f.p.}^{(E)} \approx -1.5/z_h$, для значений $M \gg 1 - S_{f.p.}^{(E)} \approx -\sqrt{M}$. На рис. 8 приведено сравнение приближенного значения $S_{f.p.}^{(E)}$ и его численных значений.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе, используя дуальную прескрипцию, мы вычислили синглетный потенциал кварк-антикварковой пары в кварк-глюонной плазме с ненулевым угловым моментом. Для этого мы рассмотрели нелокальные операторы на границе черной дыры БТЗ с ненулевым параметром вращения. Мы получили различные результаты для потенциала для разных сигнатур. Мы соотносим результаты, полученные в случае лоренцевой сигнатуры, с временными температурными корреляторами. Для случая евклидовой сигнатуры результаты должны быть соотнесены с евклидовыми температурными корреляторами. Таким образом, мы получили, что потенциалы, извлеченные с помощью выбранной голографической прескрипции из вильсоновских и поляковских петель, отличаются в случае кварк-глюонной плазмы с ненулевым угловым моментом.

Рис. 9. Зависимость отношения численного и приближенного значений межкваркового расстояния ϕ от z_m , координаты максимума струнного профиля: евклидова сигнатура (а), лоренцева сигнатура (б). Штриховая, штрихпунктирная и сплошная кривые отвечают $a = 6$, $a = 9$ и $a = 15$. Здесь $M = 4$.

Рис. 10. Зависимость потенциала V от координаты максимума струнного профиля z_m (без добавления конечных контрчленов). Жирные линии соответствуют численно взятому интегралу (39), тонкие – аналитической формуле (41). Сплошные и штриховые линии соответствуют $M = 4$ и $M = 16$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сравнение численных расчетов и аналитических формул

Здесь мы сравниваем аналитические выражения для поведения струнного профиля и потенциала с численными расчетами для разных сигнатур, значений параметра вращения a и массы M .

На рис. 9 приведено сравнение результатов, полученных с помощью аналитической формулы (33), и численного вычисления интеграла (22) для разных значений параметра вращения и разных сигнатур. Отметим, что в случае лоренцевой сигнатуры аналитическое приближение хуже, чем в евклидовом случае.

Рис. 10 демонстрирует сравнение потенциала (41) и взятого численно интеграла (39) для различных значений параметра вращения.

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 14-01-00707_a) и Программой поддержки молодых ученых – кандидатов наук (грант МК-2510.2014.1 (Д. С. Агеев)).

Список литературы

- [1] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal, U. A. Wiedemann, *Gauge/string duality, hot QCD and heavy ion collisions*, [arXiv: 1101.0618](#).
- [2] I. Aref'eva, *PoS, ICMP* (2012), 025, 29 pp.
- [3] O. DeWolfe, S. S. Gubser, C. Rosen, D. Teaney, *Heavy ions and string theory*, [arXiv: 1304.7794](#).
- [4] A. Nata Atmaja, K. Schalm, *JHEP*, **04** (2011), 070, 20 pp., [arXiv: 1012.3800](#).
- [5] B. McInnes, *Nucl. Phys. B*, **864**:3 (2012), 722–744, [arXiv: 1206.0120](#).
- [6] I. Aref'eva, A. Bagrov, A. S. Koshelev, *JHEP*, **07** (2013), 170, 15 pp., [arXiv: 1305.3267](#).
- [7] S. W. Hawking, C. J. Hunter, M. Taylor, *Phys. Rev. D*, **59**:6 (1999), 064005, 13 pp., [arXiv: hep-th/9811056](#).
- [8] S. W. Hawking, H. S. Reall, *Phys. Rev. D*, **61**:2 (2000), 024014, 10 pp., [arXiv: hep-th/9908109](#).
- [9] D. Giataganas, *PoS, Corfu* (2012), 122, 36 pp., [arXiv: 1306.1404](#).
- [10] H. Liu, K. Rajagopal, U. A. Wiedemann, *JHEP*, **03** (2007), 066, 64 pp., [arXiv: hep-th/0612168](#).
- [11] J. M. Maldacena, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:22 (1998), 4859–4862, [arXiv: hep-th/9803002](#).
- [12] F. Jugeau, *PoS, ICMP* (2012), 015, 8 pp., [arXiv: 1211.0502](#).
- [13] A. Brandhuber, N. Itzhaki, J. Sonnenschein, S. Yankielowicz, *Phys. Lett. B*, **434**:1 (1998), 36–40, [arXiv: hep-th/9803137](#).
- [14] S.-J. Rey, S. Theisen, J.-T. Yee, *Nucl. Phys. B*, **527**:1–2 (1998), 171–186, [arXiv: hep-th/9803135](#).
- [15] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.
- [16] I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, *On large N conformal theories, field theories in anti-De Sitter space and singletons*, [arXiv: hep-th/9803028](#); *Phys. Lett. B*, **433**:1–2 (1998), 49–55, [arXiv: hep-th/9804182](#).
- [17] J. L. Albacete, Y. V. Kovchegov, A. Taliotis, *Phys. Rev. D*, **78**:11 (2008), 115007, 5 pp., [arXiv: 0807.4747](#).

Поступила в редакцию 18.02.2014