Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шабат, Рациональная интерполяция и солитоны,
ТМФ, 2014, том 179, номер 3, 303–316

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:13:34

© 2014 г.

А. Б. Шабат^{*†}

РАЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И СОЛИТОНЫ

Рассматривается общая схема построения спектральных задач второго порядка, для которых квазиклассическое приближение является точным. Показано, что обратная спектральная задача сводится в этом случае к классической задаче об интерполяции мероморфных функций.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, квазиклассическое приближение, интерполяция мероморфных функций.

DOI: 10.4213/tmf8662

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы рассмотрим один из вариантов задачи о восстановлении коэффициентов дифференциального уравнения второго порядка с квадратичным потенциалом

$$\psi_{xx} = U\psi, \quad U = U(x, k) = k^2 + ku_1(x) + u_2(x), \quad (1)$$

по так называемым спектральным данным. Роль спектральных данных в этом случае играют коэффициенты пропорциональности двух специальных решений уравнения (1) в нулях их вронскиана. Для определения этих специальных решений (функций Йоста) $\psi^\pm(x, k)$ используются их высокочастотные разложения, которые строятся при помощи уравнения Риккати

$$f_x + f^2 = k^2 + ku_1 + u_2 = U, \quad f^\pm = \begin{cases} k + f_0 + f_1 k^{-1} + \dots, \\ -k + g_0 + g_1 k^{-1} + \dots, \end{cases} \quad (2)$$

соответствующего рассматриваемой спектральной задаче (1). Для уравнения Риккати коэффициенты высокочастотных разложений находятся однозначно по простым рекуррентным формулам. Например, в случае функции $U(x, k) = k^2 + u(x)$, соответствующей спектральной задаче для оператора Шредингера, мы получаем

$$f_x + f^2 = k^2 + u \implies f^+ = k + \frac{u}{2k} - \frac{u_x}{(2k)^2} + \frac{u_{xx} - u^2}{(2k)^3} + \dots,$$

^{*}Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева, Карачаевск, Россия. E-mail: shabatab@mail.ru

[†]Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия

а в общем случае (2) находим, что

$$2f_{n+1} + \sum_{i+j \leq n} f_i f_j + f_{n,x} = 0, \quad 2f_0 = u_1, \quad 2f_1 = u_2 - \frac{1}{4}u_1^2 - \frac{1}{2}u_{1,x}. \quad (3)$$

Коэффициенты g_j второго решения уравнения (2) определяются указанными выше формулами для “сопряженной” к (1) спектральной задачи:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x, k) &= U(x, -k), & f^-(x, k) &= -k + g_0(x) + \dots = \tilde{f}^+(x, -k), \\ 2g_0 &= -u_1, & 2g_1 &= -u_2 + \frac{1}{4}u_1^2 - \frac{1}{2}u_{1,x}, & 2g_2 &= g_{1,x} + 2g_0g_1, & \dots \end{aligned}$$

Этими же формулами в виде дифференциальных многочленов от функций $u_i(x)$, $i = 1, 2$, определяется (см. п. 2.2) структура уравнений с частными производными, к которым применим метод обратной спектральной задачи для уравнений (1).

В случае общего положения ряды в (2) по обратным степеням спектрального параметра являются асимптотическими, и требование их сходимости выделяет весьма специальный класс задач, обладающих нетривиальными симметричными свойствами. Важно отметить также, что формулы (2) используются при построении квазиклассических приближенных решений $\psi^\pm$ спектральной задачи (1):

$$D \ln \psi^\pm = \frac{\psi_x^\pm}{\psi^\pm} = f^\pm. \quad (4)$$

Другими словами, мы рассматриваем случаи, когда квазиклассические формулы дают точное решение задачи (1) и сопряженной к ней спектральной задачи с потенциалом $\tilde{U}(x, k) = U(x, -k)$.

Предположение о сходимости рядов в (2) позволяет выбрать функции $\psi^\pm$ из формулы (4) в качестве *собственных функций* изучаемой спектральной задачи, а нули их вронскиана

$$W(k) = \psi^+ \psi_x^- - \psi_x^+ \psi^- \quad (5)$$

рассматривать как собственные значения. Таким образом возникает упрощенный вариант обратной спектральной задачи, в котором требуется восстановить пару функций $\psi^\pm$ из формулы (4) по коэффициентам их пропорциональности C_j в нулях $k = k_j$ вронскиана (5):

$$\left. \frac{\psi^+(x, k)}{\psi^-(x, k)} \right|_{k=k_j} = C_j, \quad W(k_j) = 0. \quad (6)$$

Интересно, что линейное уравнение (1) при таком подходе переходит в нелинейное уравнение с производной Шварца.

Справедливо следующее утверждение (лемма Шварца).

ЛЕММА 1. Пусть ψ_1, ψ_2 – произвольные решения линейного дифференциального уравнения $\psi_{xx} = U(x)\psi$ второго порядка. Тогда их отношение $\varphi = \psi_1/\psi_2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{3\varphi_{xx}^2}{4\varphi_x^2} - \frac{\varphi_{xxx}}{2\varphi_x} = U(x), \quad (7)$$

а произведение $\Phi = \psi_1\psi_2$ – билинейному уравнению

$$4U(x)\Phi^2 + \Phi_x^2 - 2\Phi\Phi_{xx} = W^2, \quad (8)$$

где $W = \psi_1\psi_{2,x} - \psi_{1,x}\psi_2$ – вронскиан рассматриваемых решений уравнения (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f_i = \psi_{i,x}/\psi_i$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\frac{W}{\Phi} = f_2 - f_1, \quad \frac{\Phi_x}{\Phi} = f_2 + f_1, \quad (9)$$

следовательно,

$$f_1 = \frac{\Phi_x - W}{2\Phi}, \quad f_2 = \frac{\Phi_x + W}{2\Phi}.$$

Подстановка любой из этих двух формул для f_i в уравнение Риккати дает требуемое уравнение (8) для $\Phi = \psi_1\psi_2$. Чтобы вывести уравнения (7) для $\varphi = \psi_1/\psi_2$, остается заметить, что

$$\varphi = \frac{\psi_1}{\psi_2} \implies \varphi_x = \frac{W}{\psi_2^2}, \quad \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x} = -2f_2.$$

Лемма доказана.

Оба уравнения (7) и (8) обладают по сравнению с исходной спектральной задачей (1) дополнительными симметриями, связанными с известными свойствами инвариантности производной Шварца [1]. Отметим также, что функция $1/\varphi_x$ является решением уравнения (8) с нулевой правой частью, а функции ψ_1^2 , ψ_2^2 , $\psi_1\psi_2$ при $W \neq 0$ образуют фундаментальную систему решений линейного уравнения третьего порядка

$$A_{xxx} = 4UA_x + 2U_xA, \quad U(x) = k^2 + ku_1(x) + u_2(x). \quad (10)$$

Легко проверить, с другой стороны, что уравнение (8) получается из (10) интегрированием последнего после умножения на функцию $A(x)$. Другими словами, уравнение (8) является первым интегралом уравнения (10), а роль константы интегрирования играет вронскиан $W(k)$. Отметим, что в квазиклассическом приближении вместо (4) используется формула

$$\psi^\pm = \sqrt{\Phi} \exp\left(\pm \int \frac{W}{2\Phi} dx\right), \quad (11)$$

где Φ удовлетворяет уравнению (8); обычно предполагается, что Φ является многочленом по спектральному параметру k . Непосредственная связь уравнения (8) с исходным уравнением (1) установлена выше при помощи уравнения Риккати (2).

При $U(x, k) = k^2 + u(x)$ частный случай задачи (6), соответствующий безотражательным потенциалам $u(x)$, обсуждался в 1974 г. на семинаре И. М. Гельфанда в МГУ [2]¹⁾. Стимулом для возвращения к задаче (6) является недавний цикл работ, в которых исследуются различные способы построения точных решений эволюционного уравнения Шредингера с кубической нелинейностью (уравнения НШ). Эти уравнения моделируют разрушительные волны, возникающие в результате нелинейного взаимодействия уединенных волн. Элементарному на первый взгляд вопросу о приведении соответствующей уравнению НШ спектральной задачи

$$\psi_x^1 - k\psi^1 = u(x)\psi^2, \quad \psi_x^2 + k\psi^2 = v(x)\psi^1. \quad (12)$$

к “каноническому виду” (1) уделяется далее особое внимание.

¹⁾ см. также <http://www.claymath.org/publications/GelfandNotes/>.

2. УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И СИММЕТРИИ

Рассмотрим линейные преобразования $\psi \rightarrow \hat{\psi}$, действующие на решения уравнения (1) следующим образом:

$$\psi_{xx} = U(x)\psi, \quad \hat{\psi} = A\psi_x + B\psi \implies \hat{\psi}_{xx} = \hat{U}(x)\hat{\psi}. \quad (13)$$

Дифференцируя формулу для $\hat{\psi}$ и пользуясь исходным уравнением $\psi_{xx} = U(x)\psi$, получаем

$$\hat{\psi}_x = \hat{A}\psi_x + \hat{B}\psi, \quad \hat{A} = A_x + B, \quad \hat{B} = B_x + UA. \quad (14)$$

Повторное дифференцирование дает, таким образом,

$$\hat{\psi}_{xx} = (\hat{A}_x + \hat{B})\psi_x + (\hat{B}_x + U\hat{A})\psi.$$

Записав уравнение для $\hat{\psi}$ в виде

$$\hat{\psi}_{xx} = \hat{U}\hat{\psi} = \hat{U}(A\psi_x + B\psi),$$

мы получаем

$$\hat{U} = U + \frac{A_{xx}}{A} + 2\frac{B_x}{A}, \quad B_{xx} + 2A_xU + AU_x = B(\hat{U} - U). \quad (15)$$

При $\hat{U} \neq U$ эти соотношения определяют преобразования Дарбу–Лапласа, которые мы сейчас не рассматриваем. При $\hat{U} = U$, полагая $B = -A_x/2$, мы находим

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\psi}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{A_x}{2} & A \\ UA - \frac{A_{xx}}{2} & \frac{A_x}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_x \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где в силу соотношений (15) функция $A = A(x, k)$ должна удовлетворять уравнению третьего порядка (10). Обозначив через $[A] = (a_{ij})$ матрицу в (16), построенную по скалярной функции $A = A(x, k)$, мы находим (ср. с уравнением (8)), что

$$-4 \det[A] = A_x^2 + 4U(x, k)A^2 - 2AA_{xx}.$$

Матричными симметриями спектральной задачи (1) назовем решения $C = (c_{ij})$ уравнения

$$C_x = [U]C - C[U], \quad [U] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ U & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

В отличие от решений уравнения третьего порядка (10), матричные симметрии $C = (c_{ij})$ можно не только складывать, но и перемножать. Из-за наличия коммутатора в правой части уравнения (17) след матричной симметрии является постоянной, которую можно положить равной нулю, не ограничивая общности. Определитель матричной симметрии играет, как и вронскиан в случае уравнения (10), роль первого интеграла дифференциального уравнения (17). Вырожденные матричные симметрии с нулевым определителем не исключаются при этом из рассмотрения²⁾.

²⁾Переход к уравнению (17) обусловлен включением в теорию спектральной задачи (12).

ПРИМЕР 1. Соответствующее спектральной задаче (1) дифференциальное выражение $\mathcal{L} = -D^2 + k^2 + u_1 k + u_2$ можно записать в двух видах:

$$\mathcal{L} = u_2 - \frac{1}{4}u_1^2 + \begin{cases} (z + D)(z - D) - z_x, \\ (z - D)(z + D) + z_x, \end{cases} \quad z = z(k, x) = k + \frac{1}{2}u_1(x).$$

Условие факторизуемости дифференциального выражения $\mathcal{L}$ приводит нас к линейному по k решению уравнения Риккати (2):

$$2u_2 = \frac{1}{2}u_1^2 \pm u_{1,x} \implies U = z^2 \pm z_x. \quad (18)$$

При этом вырожденная матричная симметрия (a_{ij}) с нулевым следом определяется (ср. с формулой (4)) путем интегрирования уравнения

$$\frac{a_{12,x}}{a_{12}} = \pm(2k + u_{1,x}).$$

Расписав поэлементно матричное уравнение, получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Элемент c_{12} любой матричной симметрии $C = (c_{ij})$ является решением $A = c_{12}$ соответствующего уравнения третьего порядка (10). Матричные симметрии с нулевым следом однозначно определяются этим элементом и имеют вид, указанный в формуле (17).

Чтобы сделать выбор решения уравнения третьего порядка однозначным, мы переходим от функций независимой переменной x к дифференциальным переменным u_1, u_2 , т.е. аргументами являются теперь коэффициенты уравнения (1) и их производные по x . Мотивировкой здесь служит однозначная разрешимость в квазиклассическом приближении уравнения Риккати (2) и формула (9) из доказательства леммы Шварца:

$$A(k) = \frac{2k}{f^+ - f^-} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{(2k)^j} = 1 - \frac{1}{2k}u_1 + \dots \quad (19)$$

Говоря точнее, коэффициенты a_j этого формального степенного ряда однозначно определяются подстановкой (19) в уравнения

$$4U(x)A^2 + A_x^2 - 2AA_{xx} = 4k^2 \implies A_{xxx} = 4UA_x + 2U_xA, \quad U(x) = k^2 + ku_1 + u_2,$$

в результате приравнивания одинаковых степеней параметра k . Характерным свойством коэффициентов a_j является однородность соответствующих многочленов от дифференциальных переменных u_1, u_2 :

$$\deg a_j = j, \quad \deg(u_1^\alpha u_2^\beta) = \alpha + 2\beta, \quad \deg(u_1^\alpha u_2^\beta)_x = \alpha + 2\beta + 1. \quad (20)$$

Эта однородность является следствием специального выбора вронскиана в правой части уравнения (8), и непосредственное вычисление первых коэффициентов ряда $A(k)$ дает

$$A(k) = 1 - \frac{1}{2k}u_1 + \frac{1}{4k^2}\left(\frac{3}{2}u_1^2 - 2u_2\right) + \frac{1}{8k^3}\left(6u_1u_2 - \frac{5}{2}u_1^3 - u_{1,xx}\right) + \dots \quad (21)$$

Отметим, что рассматриваемое формальное решение уравнения (10) единственно с точностью до умножения на формальный степенной ряд по обратным степеням спектрального параметра с числовыми коэффициентами. В этом смысле рассматриваемые формальные решения определяются только выбором вронскиана в правой части уравнения (8) и “не зависят” от аналитических свойств функций u_1, u_2 , рассматриваемых как функции исходной независимой переменной x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Условимся говорить, что уравнение (1) удовлетворяет условию *ультрарегулярности*, если ряд (19) сходится при $|k| > R$. При этом решение (19) уравнения (10) и соответствующее бесследовое матричное решение $C = |A|$ уравнения (17) мы будем называть *специальными*.

Подчеркнем снова, что в рамках этого определения произвольное решение Φ уравнения (8), рассматриваемое как функция дифференциальных переменных u_1, u_2 , можно получить, умножив специальное решение уравнения третьего порядка (10) на соответствующий нормировочный множитель, зависящий только от спектрального параметра k .

2.1. Матричные симметрии. Перепишав систему уравнений (12) в виде

$$\Psi_x = V(x, k)\Psi, \quad V = \begin{pmatrix} k & u \\ v & -k \end{pmatrix}, \quad (22)$$

попытаемся перенести определение 1 с уравнения (17) на аналогичное уравнение для матричных симметрий $\hat{\Psi} = B\Psi$ спектральной задачи (22):

$$\frac{dB}{dx} = VB - BV. \quad (23)$$

Для приведения системы уравнений (12) к скалярному уравнению второго порядка достаточно исключить из этой системы одну из компонент решения $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ и привести полученное уравнение к каноническому виду (1). Точнее, положив

$$\psi^\pm = \begin{cases} \frac{\psi^2}{\sqrt{v}}, \\ \frac{\psi^1}{\sqrt{u}}, \end{cases} \quad z^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{v_x}{v} + k, \\ \frac{1}{2} \frac{u_x}{u} - k \end{cases} \quad (24)$$

и перепишав уравнения (12) в симметризованном виде

$$(D_x + z^+) \psi^+ = \sqrt{uv} \psi^-, \quad (D_x + z^-) \psi^- = \sqrt{uv} \psi^+, \quad (25)$$

мы получаем

$$(D_x - z)(D_x + z)\psi = uv\psi \iff \psi_{xx} = U(x, k)\psi, \quad U = z^2 - z_x + uv, \quad (26)$$

где $z = z^\pm$ и $\psi = \psi^\pm$ определены в (24). Таким образом,

$$\begin{aligned} U^+ &= k^2 + k \frac{v_x}{v} + uv + \frac{3}{4} \frac{v_x^2}{v^2} - \frac{1}{2} \frac{v_{xx}}{v}, \\ U^- &= k^2 - k \frac{u_x}{u} + uv + \frac{3}{4} \frac{u_x^2}{u^2} - \frac{1}{2} \frac{u_{xx}}{u}, \end{aligned} \quad (27)$$

и формулы (25) связывают решения двух спектральных задач вида (1) с потенциалами $U^\pm$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $u = v$ потенциалы (27) в уравнении (26) удовлетворяют условию $U^-(x, k) = U^+(x, -k)$, и соответствующие уравнения Риккати переходят друг в друга при замене $k \rightarrow -k$:

$$f_x + f^2 = k^2 \pm k \frac{u_x}{u} + u^2 + \frac{3}{4} \frac{u_x^2}{u^2} - \frac{1}{2} \frac{u_{xx}}{u}.$$

Приведенные выше формулы позволяют связать решение (19) со специальным решением $B(k) \equiv B(x, k)$ уравнения для матричных симметрий (23) спектральной задачи (22). Это решение имеет следующий вид:

$$B(k) = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + B_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{(2k)^j}, \quad \text{tr } B(k) = 0, \quad \det B(k) = -k^2. \quad (28)$$

Как и в случае уравнения (17), коэффициенты B_n этого формального ряда определяются указанными выше нормировочными условиями однозначно и являются однородными функциями, $\deg B_n = n + 1$ (ср. с формулами (20)), от дифференциальных переменных u и v . Обозначим через $A^\pm$ специальные решения вида (19), соответствующие потенциалам (27). Опуская промежуточные вычисления, мы приведем только окончательные формулы для элементов матрицы $B(k) = (b_{ij})(k)$:

$$b_{12}(k) = uA^- = u + \frac{1}{2k}u_x + \frac{1}{4k^2}(u_{xx} - 2u^2v) + \frac{1}{8k^3}(u_{xxx} - 6uvu_x) + \dots, \quad (29)$$

$$b_{21}(k) = vA^+ = v - \frac{1}{2k}v_x + \frac{1}{4k^2}(v_{xx} - 2uv^2) - \frac{1}{8k^3}(v_{xxx} - 6uvv_x) + \dots, \quad (30)$$

$$b_{11}(k) = \left(z^+ + \frac{1}{2}D_x\right)A^+ = -\left(z^- + \frac{1}{2}D_x\right)A^- = k - \frac{uv}{2k} + \frac{uv_x - vu_x}{(2k)^2} + \dots. \quad (31)$$

Отметим, что формальные ряды $A^\pm$ получаются подстановкой в коэффициенты базисного ряда (21) вместо (u_1, u_2) новых дифференциальных переменных (u, v) . Например, в случае A^+ эти дифференциальные подстановки определяются формулами

$$u_1 \equiv \frac{v_x}{v}, \quad u_2 \equiv \frac{3}{4} \left(\frac{v_x}{v} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{v_{xx}}{v} + uv = uv + \frac{1}{4} u_1^2 - \frac{1}{2} u_{1,x}.$$

2.2. Условия совместности и симметрии. Известно (см., например, работу [3]), что формальные степенные ряды (21) и (28) по обратным степеням спектрального параметра k можно использовать в качестве производящих функций соответствующих иерархий эволюционных уравнений. В терминах исходной спектральной задачи (1) соответствующая иерархия записывается в виде

$$U_{t_n} = 2UA_{n,x} + U_xA_n - \frac{1}{2}A_{n,xxx}, \quad A_n = k^n + a_1k^{n-1} + \dots + a_n \equiv (k^n A(k))_+, \quad (32)$$

где $A(k)$ – формальный ряд (19). В формуле (32) и далее нижний индекс в $(\cdot)_+$ означает отбрасывание в ряде отрицательных степеней k . На обычном языке уравнения (32) аналогично случаю дискретных симметрий (см. соотношения (13), (14)) возникают как условия совместности пары уравнений

$$\psi_{xx} = U\psi, \quad D_t(\psi) = A_n\psi_x - \frac{1}{2}A_{n,x}\psi. \quad (33)$$

Первое из уравнений (32) определяет при этом *поток*, т.е. эволюцию потенциала исходной спектральной задачи (1), необходимую для выполнения условия равенства смешанных производных функции ψ по x и t . Так как

$$u_1 = -2a_1, \quad u_2 = 3a_1^2 - 2a_2,$$

эти функции можно исключить из уравнений (32) и переписать иерархию в виде уравнений на коэффициенты a_j производящей функции (19) с произвольными номерами j , а не только для $j = 1, 2$:

$$D_n(A) = \langle k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n, A \rangle, \quad \langle a, b \rangle \stackrel{\text{def}}{=} ab_x - ba_x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (34)$$

В этой связи отметим также, что правая часть формулы для $D_n \psi$ заменится вронскианом $\langle a, b \rangle$, если переписать формулу (33) в переменных леммы Шварца из введения.

Следующая полезная модификация уравнений (32) связана с отказом от формальных рядов и обобщением иерархии на отрицательные времена. Это приводит нас к уравнению

$$D_\tau A(k) = \frac{\langle A(k), A(\lambda) \rangle}{k - \lambda}, \quad (35)$$

в котором искомая функция $A(k)$ предполагается локально аналитической по спектральному параметру k . Коммутативность бесконечного семейства дифференцирований, соответствующих различному выбору значений второго дополнительного спектрального параметра λ в формуле (35), является непосредственным следствием тождества Якоби для вронскиана (см. работу [4], теорема 1). В частности, положив $\lambda = 0$, мы получаем в дополнение к дифференцированиям (34) коммутирующее с ними дифференцирование

$$D_{-1}A(k) = \frac{1}{k} \langle A(k), A(0) \rangle. \quad (36)$$

Отметим, что свойство локальной аналитичности функции $A(k)$ по спектральному параметру является по существу другой формулировкой условия ультрарегулярности из определения 1.

В случае спектральной задачи (12) уравнения иерархии (связанной с (32) формулами (29)–(31)) записываются в виде

$$V_{t_n} = [\sigma, B_n], \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (37)$$

Здесь B_n суть коэффициенты формального ряда (28), являющегося специальным решением симметричного уравнения (23). Как и в случае иерархии (32), уравнения (37) совпадают с условиями совместности пары полиномиальных по k уравнений:

$$\Psi_x = V\Psi, \quad \Psi_{t_n} = B^{(n-1)}\Psi; \quad B^{(n-1)} = ((2k)^{n-1}B(k))_+.$$

В частности, при $n = 1$ мы имеем $B^{(0)} = k\sigma + B_0 = V$, а при $n = 2$ мы получаем (см. формулы (28), (29))

$$B^{(1)} = 2kV + \begin{pmatrix} -uv & u_x \\ -v_x & uv \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} u_{t_2} &= 2(u_{xx} + 2u^2v), \\ v_{t_2} &= -2(v_{xx} + 2v^2u). \end{aligned} \quad (38)$$

На неформальном языке рассматриваемые здесь эволюционные уравнения возникают (ср. с соотношениями (33), (23)) при исследовании задачи о совместности пары “спектральных задач”

$$\Psi_x = V(k)\Psi, \quad \Psi_\tau = W(k)\Psi \implies V_\tau = W_x + WV - VW. \quad (39)$$

Последнее уравнение определяет поток, т.е. эволюцию потенциала исходной спектральной задачи (12), необходимую для выполнения условия равенства смешанных производных функции Ψ по x и τ .

Известное в геометрии как уравнение синус-гордон, гиперболическое уравнение возникает при дополнении к иерархии (37) потока (36) с отрицательным временем $t_{-1} = y$ (потoku $u_{t_0} = u$, $v_{t_0} = -v$ с нулевым номером отвечает группа растяжений). Используя уравнения (39) и полагая в них

$$V = \begin{pmatrix} k & u \\ v & -k \end{pmatrix}, \quad W = \frac{1}{2k} \begin{pmatrix} c & a \\ b & -c \end{pmatrix},$$

мы получаем $V_y + VW = W_x + WV$ или, в компонентах,

$$u_y = -a, \quad v_y = b, \quad a_x = -2uc, \quad b_x = 2vc, \quad c_x = bu - av = (uv)_y. \quad (40)$$

Отсюда следует, что

$$u_{xy} = 2uc, \quad v_{xy} = 2vc, \quad D_x(c^2 + ab) = 0.$$

Полагая $c^2 + ab = \text{const}$, что соответствует постоянству определителя матрицы $2kW$, получаем

$$u_{xy} = 2u\sqrt{1 + u_y v_y}, \quad v_{xy} = 2v\sqrt{1 + u_y v_y}. \quad (41)$$

Эта пара гиперболических уравнений допускает редукцию $v = \pm u$, которая при $b = a$, $v = -u$ дает уравнение синус-гордон. Действительно,

$$a = b, \quad u = -v, \quad c^2 + ab = 1 \implies w_{xy} = 2 \sin w, \quad u = -\frac{1}{2}w_x. \quad (42)$$

При этом $a = b = \sin w$, $c = \cos w$.

В принципе иерархию (37), как и (32), можно продолжить на последующие отрицательные времена, если использовать коэффициенты разложения по положительным степеням k полиномиального решения уравнения (23) для матричных симметрий (см. работу [5]). Существование решений $\tilde{B}(k)$ такого типа предполагается в определении 1, и рассматриваемая выше матрица $C = 2kW$ для первого отрицательного времени $t_{-1} = y$ соответствует $\tilde{B}(0)$. Действительно, после умножения уравнения (40) на k мы получаем $2kV_y + VC = C_x + CV$, что при $k = 0$ совпадает с симметричным уравнением (23).

3. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА

При построении точных решений выписанных выше эволюционных уравнений обычно предполагается существование полиномиального по спектральному параметру k решения

$$\Phi = \psi^+ \psi^- = k^N + f_1 k^{N-1} + f_2 k^{N-2} + \dots + f_N \quad (43)$$

уравнения третьего порядка, которое определяет симметрии (см., например, работу [6]). Коэффициенты такого полиномиального решения совпадают с коэффициентами формального ряда (19) с точностью до умножения на соответствующий “вронскиан”, тем самым на потенциал $U(x, k)$ налагаются дополнительные условия, более сильные, чем сходимости ряда (19). В этом полиномиальном случае уравнение симметрии эквивалентно условию стационарности иерархии эволюционных уравнений (32) относительно одного из потоков. Существенно, что такой выбор обеспечивает автоматическое выполнение условий совместности соответствующей переопределенной системы уравнений (см. ниже соотношение (52)) для коэффициентов f_j многочлена (43). Эта совместность является следствием коммутативности дифференцирований, определенных посредством производящей функции (19).

В упрощенном варианте сформулированная во введении интерполяционная задача (6) сводится к задаче линейной алгебры при помощи следующего дополнительного предположения:

$$\psi^+(k, x) = e^{kx} P(k, x), \quad \psi^-(k, x) = e^{-kx} Q(k, x), \quad (44)$$

где P и Q – многочлены от k степени $m \geq 0$ и $n \geq 1$ соответственно,

$$P = p_0 k^m + p_1 k^{m-1} + \dots + p_m, \quad Q = q_0 k^n + q_1 k^{n-1} + \dots + q_n. \quad (45)$$

Замена переменных (44) приводит задачу к $N + 1$ (здесь $N = m + n$) уравнениям

$$\frac{P(k)}{Q(k)} = \frac{p_0 k^m + p_1 k^{m-1} + \dots + p_m}{q_0 k^n + q_1 k^{n-1} + \dots + q_n} = \rho_j \quad \text{при} \quad k = k_j, \quad j = 1, \dots, N + 1, \quad (46)$$

относительно $N + 2$ неизвестных коэффициентов многочленов P и Q . Последнее $(N + 2)$ -е условие

$$p_0 q_0 = 1 \quad (47)$$

связано с нормировкой старшего коэффициента многочлена (ср. с леммой Шварца):

$$\Phi = \psi^+ \psi^- = PQ = k^N + f_1 k^{N-1} + f_2 k^{N-2} + \dots + f_N.$$

ПРИМЕР 2. При $n = m = 1$, положив $a_j = P(k_j)$ и $b_j = Q(k_j)$ для $j = 1, 2, 3$, мы находим, опираясь на интерполяционную формулу Лагранжа, что

$$P(k) = a_1 \frac{k - k_2}{k_{12}} - a_2 \frac{k - k_1}{k_{12}}, \quad k_{12} a_3 + k_{23} a_1 + k_{31} a_2 = 0, \quad k_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} k_i - k_j.$$

Записав аналогичные формулы для знаменателя $Q(k) = q_0 k + q_1$, мы получаем из уравнений (46)

$$a_j = \rho_j b_j, \quad \frac{P(k_3)}{Q(k_3)} = \frac{a_1 k_{32} + a_2 k_{13}}{b_1 k_{32} + b_2 k_{13}} = \rho_3.$$

Привлекая нормировочное условие (47), находим таким образом, что

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{k_{23}}{k_{13}} \frac{\rho_1 - \rho_3}{\rho_2 - \rho_3}, \quad (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) = k_{12}^2.$$

Нетрудно теперь выразить коэффициенты многочленов P и Q через данные ρ_j интерполяционной задачи (46) и найти после этого коэффициенты соответствующего многочлена $\Phi(k) = k^2 + f_1 k + f_2$.

Чтобы убедиться, что построенные по многочленам $P(k)$ и $Q(k)$ функции (44) удовлетворяют одному и тому же линейному дифференциальному уравнению второго порядка $\psi'' = U\psi$, достаточно проверить, что в общем случае их вронскиан

$$\langle \psi^+, \psi^- \rangle = \psi^+ \psi_x^- - \psi^- \psi_x^+ = PQ_x - P_x Q - 2kPQ \quad (48)$$

не меняется при изменении x . При этом, так как $\rho_j = c_j e^{-2k_j x}$, должны выполняться соотношения

$$\frac{d\rho_j}{dx} + 2k_j \rho_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N+1 = m+n+1. \quad (49)$$

Напомним, что в рассматриваемой задаче коэффициенты C_j пропорциональности функций (44) в узлах $k = k_j$ считаются заданными.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что выполнены условия (47), (49) и соответствующая интерполяционной задаче линейная система алгебраических уравнений относительно коэффициентов многочленов $P(k)$ и $Q(k)$ является невырожденной. Тогда функции $\psi^\pm$ из формулы (44) являются решениями уравнения вида (1), а их вронскиан (48) выражается следующей формулой:*

$$\langle \psi^+, \psi^- \rangle = \psi^+ \psi_x^- - \psi^- \psi_x^+ = -2 \prod_{j=1}^{N+1} (k - k_j). \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (45) следует, что вронскиан является многочленом степени $N+1$ по переменной k со старшим коэффициентом, равным -2 . Этот многочлен обращается в нуль во всех $N+1$ узлах интерполяции $k = k_j$ в силу уравнений (49), поскольку эти уравнения обеспечивают пропорциональность функций (44). Указанные нули однозначно определяют рассматриваемый многочлен, и поэтому справедлива формула (50).

Воспользуемся теперь общей формулой для построения линейного дифференциального уравнения второго порядка по его фундаментальной системе решений $\psi_1 = \psi^+$, $\psi_2 = \psi^-$:

$$\psi_{xx} - V\psi_x - U\psi = \frac{\langle \psi_1, \psi_2, \psi \rangle}{\langle \psi_1, \psi_2 \rangle}, \quad \langle \psi_1, \psi_2, \psi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi \\ \psi_1' & \psi_2' & \psi' \\ \psi_1'' & \psi_2'' & \psi'' \end{pmatrix}.$$

При $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_x = 0$ мы имеем

$$U(x, k) = \frac{\langle \psi_x^+, \psi_x^- \rangle}{\langle \psi^+, \psi^- \rangle}. \quad (51)$$

Остается заметить, что вронскианы $\langle \psi_x^+, \psi_x^- \rangle$ и $\langle \psi^+, \psi^- \rangle$ являются многочленами по переменной k степени $N+3$ и $N+1$ соответственно, а числитель обращается в нуль во всех нулях знаменателя, так как условия (46) гарантируют в точках $k = k_j$ пропорциональность не только функций $\psi^\pm(x)$, но и их производных $\psi_x^\pm(x)$. Теорема доказана.

При классификации различных решений интерполяционной задачи возникает вопрос о выборе узлов $k = k_j$, а также вида правой части в билинейном уравнении (8). В полиномиальном случае (43) непосредственная подстановка многочлена $\Phi(k)$ степени N в левую часть билинейного уравнения порождает в правой части многочлен степени $\hat{N} = 2(N + 1)$:

$$4U(x)\Phi^2 + \Phi_x^2 - 2\Phi\Phi_{xx} = 4k^{\hat{N}} + 4k^{\hat{N}-1}(2f_1 + u_1) + 4\sum_{j=2}^{\hat{N}} C_j k^{\hat{N}-j}. \quad (52)$$

Все коэффициенты полученного таким образом многочлена должны быть постоянными:

$$C_2 = 2f_2 + u_2 + f_1^2 + 2f_1u_1 = \text{const}, \dots, C_{2N+2} = u_2f_N^2 + \frac{1}{4}f_{N,x}^2 - \frac{1}{2}f_Nf_{N,xx} = \text{const}.$$

Уравнение (52) представляет собой переопределенную и довольно сложную систему из $2(N + 1)$ полиномиальных уравнений относительно $N + 2$ неизвестных u_1 , u_2 и f_j , $j = 1, 2, \dots, N$. Первые два уравнения этой системы позволяют выразить коэффициенты уравнения (1) в терминах коэффициентов решения (43):

$$u_1 = -2f_1 + \alpha, \quad u_2 = 3f_1^2 - 2f_2 + \beta. \quad (53)$$

Таким образом, мы имеем $2N$ уравнений для N коэффициентов многочлена (43). С другой стороны, подстановка того же многочлена $\Phi(k)$ степени N в соответствующее уравнение третьего порядка (10) дает с учетом соотношений (53) замкнутую систему из N дифференциальных уравнений для N функций $f_1, f_2, \dots, f_N$. В частности, в рассмотренном выше примере 2 для $\Phi = k^2 + f_1k + f_2$, полагая $\alpha = 0$ в (53) (что соответствует сдвигу k и не ограничивает общности), мы получаем

$$\begin{aligned} f_{1,xxx} &= 4(2f_1^3 - 3f_1f_2 + \beta f_1)_x, \\ f_{2,xxx} &= 4(3f_1^2f_{2,x} + 3f_1f_2f_{1,x} - f_{2,x}f_2 + \beta f_{2,x}). \end{aligned} \quad (54)$$

Формулы примера 2 описывают семейство решений этих уравнений в элементарных функциях. Гипотетически это семейство исчерпывает множество таких решений с точностью до вырождений, соответствующих кратным корням вронскиана (48).

Остановимся кратко на вопросе о выборе удобных “динамических” переменных при исследовании точных решений иерархии (32) эволюционных уравнений, связанной со спектральной задачей (1). В рассматриваемой нами интерполяционной задаче (46), (47) (ср. с работой [7]) такими переменными являются значения многочленов $P(k)$ и $Q(k)$ в узлах $k = k_j$:

$$a_j = P(k_j), \quad b_j = Q(k_j), \quad j = 1, \dots, n + m + 1.$$

Пример 2 наглядно демонстрирует связанные с этим преимущества. Независимая переменная x является при этом внешним параметром задачи, и мы не останавливаемся здесь на очевидной модификации уравнений (49), соответствующей эволюционным уравнениям (32) и (37). Для восстановления потенциала представляется естественным использовать формулы (53).

Конкурирующий набор переменных (см. работы [5], [6], [8], [9]) составляют корни x_j многочлена $\Phi(k) = P(k)Q(k)$, которые называются иногда дополнительным спектром обратной задачи. Используя билинейное уравнение (52), запишем

$$4U(x)\Phi^2 + \Phi_x^2 - 2\Phi\Phi_{xx} = R(k), \quad \Phi = \prod_{j=1}^N (k - x_j(x)). \quad (55)$$

Положив в последнем уравнении $k = x_j$, находим, что для всех j

$$\Phi_x|_{k=x_j} = -D_x(x_j)\Phi'(x_j) = \pm\sqrt{R(x_j)},$$

где Φ_x и Φ' обозначают производные многочлена $\Phi = \Phi(x, k)$ по x и k соответственно. В силу теоремы 1 полученная таким образом замкнутая динамическая система для N корней $x_j(x)$ многочлена $\Phi(k) = P(k)Q(k)$ полностью определяется в нашем случае выбором узлов интерполяции $k = k_j$. Особый интерес в вещественнозначной ситуации представляет случай чередования знаков в последовательности

$$\Phi(k_j) = a_j b_j = \rho_j b_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

которое контролируется знаками констант C_j в формуле (6). Более или менее очевидно, что это позволяет контролировать положение точек дополнительного спектра и выделяет класс регулярных решений рассматриваемой интерполяционной задачи. Именно так обстоит дело в случае обратной задачи рассеяния для оператора Шредингера

$$L\psi = \lambda\psi \iff \psi_{xx} = (u(x) + k^2)\psi, \quad \lambda \equiv -k^2, \quad (56)$$

с вещественным потенциалом $u(x)$ таким, что $u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. При этом должны также выполняться условия [9], [10]

$$n = m, \quad p_0 = q_0 = 1, \quad Q(k) = P(-k)(-1)^n.$$

С точки зрения приложений (см. работы [11], [12]) к задаче о “волнах-убийцах”, упоминавшейся во введении, наибольший интерес представляет специальный случай спектральной задачи (22)

$$V^*(-\bar{k}) = -V(k) \iff u + \bar{v} = 0,$$

приводящий к условиям типа $\Psi^*(-k) = \Psi^{-1}(k)$. В недавно опубликованной работе [12] исследован широкий класс таких потенциалов, удовлетворяющих краевому условию (ср. с работами [13], [14])

$$u(x) \rightarrow -Ae^{\pm 2i\alpha}, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Приведенная в работе [12] классификация соответствующих солитоноподобных решений уравнения НШ заслуживает, по-видимому, дальнейшего анализа и обобщения с точки зрения интерполяционной задачи (6).

Благодарности. Работа выполнена в рамках Программы РАН “Нелинейная динамика” при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 2012-1.5-12-000-1003-011 и 13-01-12460-офи_м-2013), а также Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5377.2012.2).

Список литературы

- [1] E. Hille, *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, John Wiley & Sons, New York–London–Sydney, 1976.
- [2] А. Б. Шабат, “Об одной интерполяционной задаче”, Доклад на X Международной научной конференции “Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования” (14–20 июля 2013, Владикавказ – Нов. Цей, Россия).
- [3] A. B. Shabat, “Symmetries of Spectral Problems”, *Integrability, Lecture Notes in Physics*, **767**, ed. A. V. Mikhailov, Springer, Berlin, 2009, 139–173.
- [4] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **153**:1 (2007), 29–45.
- [5] Л. Мартинес Алонсо, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **140**:2 (2004), 216–229.
- [6] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, *УМН*, **31**:1(187) (1976), 55–136.
- [7] G. A. Baker, Jr., P. Graves-Morris, “Extensions of Padé approximants”, *Padé Approximants*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **59**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, 335–414.
- [8] J. Drach, *Compt. Rend. Acad. Sci.*, **168** (1919), 337–340.
- [9] А. Б. Шабат, “О потенциалах с нулевым коэффициентом отражения”, *Динамика сплошной среды*, т. 5, Институт гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск, 1970, 130–145.
- [10] В. Э. Адлер, “ N -солитонное решение уравнения Кортевега–де Фриза”, *Асимптотические методы математической физики*, БНЦ УрО АН СССР, Уфа, 1989, 3–8.
- [11] D. H. Peregrine, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **25**:1 (1983), 16–43.
- [12] V. E. Zakharov, A. A. Gelash, *Phys. Rev. Lett.*, **111**:7 (2013), 054101.
- [13] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ*, **61**:1 (1971), 118–134.
- [14] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ*, **64**:5 (1973), 1627–1639.

Поступила в редакцию 18.02.2014