Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Гарифуллин, А. В. Михайлов, Р. И. Ямилов, Дискретное уравнение на квадратной решетке с нестандартной структурой высших симметрий, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 1, 17–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8663>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:47:27

© 2014 г. Р. Н. Гарифуллин*, А. В. Михайлов†, Р. И. Ямилов*

ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ С НЕСТАНДАРТНОЙ СТРУКТУРОЙ ВЫСШИХ СИММЕТРИЙ

Уточнена природа интегрируемости недавно найденного дискретного уравнения на квадратной решетке, обладающего нестандартной симметрией. Найдена его L -А-пара и показано, что она также является необычной. Для этого дискретного уравнения построены иерархии высших симметрий и законов сохранения, из этого уравнения получены две интегрируемые системы гиперболического типа. Иерархии высших симметрий и законов сохранения также оказываются нестандартными по сравнению с известными уравнениями этого класса.

Ключевые слова: дискретные интегрируемые уравнения, высшие симметрии, законы сохранения, L -А-пара.

DOI: 10.4213/tmf8663

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было найдено уравнение

$$u_{n+1,m+1}(u_{n,m} - u_{n,m+1}) - u_{n+1,m}(u_{n,m} + u_{n,m+1}) + 2 = 0, \quad (1)$$

где n, m – произвольные целые числа. Было показано, что его высшая симметрия в направлении m имеет вид

$$\frac{d}{dt_2} u_{n,m} = (-1)^n \frac{u_{n,m+1}u_{n,m-1} + u_{n,m}^2}{u_{n,m+1} + u_{n,m-1}}. \quad (2)$$

Простейшая высшая симметрия в направлении n оказывается уравнением следующего вида:

$$\frac{d}{dt_1} u_{n,m} = h_{n,m}h_{n-1,m}(a_n u_{n+2,m} - a_{n-1} u_{n-2,m}), \quad (3)$$

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия.

E-mail: rustem@matem.anrb.ru, RvIYamilov@matem.anrb.ru

†University of Leeds, Department of Applied Mathematics, Leeds, UK.

E-mail: A.V.Mikhailov@leeds.ac.uk

где

$$h_{n,m} = u_{n+1,m}u_{n,m} - 1, \quad a_{n+2} = a_n.$$

Эта симметрия зависит от произвольной двухпериодической функции a_n , которая может быть представлена следующим образом:

$$a_n = \tilde{a} + \hat{a}(-1)^n, \quad (4)$$

где $\tilde{a}$, $\hat{a}$ – произвольные комплексные числа. Мы имеем здесь как автономный частный случай $a_n = 1$, так и неавтономный случай $a_n = (-1)^n$, все остальные возможные частные случаи являются их линейными комбинациями. Например, мы можем получить:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k + 1, \\ 1, & n = 2k. \end{cases} \quad (5)$$

Высшие симметрии (2), (3) сами по себе являются интегрируемыми уравнениями. Более точно, при каждом фиксированном n в случае (2) и любом фиксированном m в случае (3) мы имеем интегрируемое уравнение с одной непрерывной и одной дискретной переменной. Уравнение (1) порождает цепочки автопреобразований Беклунда для каждого из уравнений (2), (3) (подробнее см. в [2]). Симметрии (2), (3) совместны не только с уравнением (1), но и друг с другом на решениях дискретного уравнения (1). С другой стороны, уравнение (1) может быть получено как условие совместности высших симметрий (2), (3). По этим и многим другим причинам в работе рассматривается тройка уравнений (1)–(3) в совокупности вместо одного дискретного уравнения (1). Такой подход позволяет получить некие важные результаты, представленные в разделах 2, 3.

Практически все известные интегрируемые дискретные уравнения вида

$$F_{n,m}(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1}, u_{n+1,m+1}) = 0, \quad (6)$$

у которых существуют симметрии в каждом из направлений n и m , имеют высшие симметрии вида [2]–[5]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_1} u_{n,m} &= \Phi_{n,m}(u_{n+1,m}, u_{n,m}, u_{n-1,m}), \\ \frac{d}{dt_2} u_{n,m} &= \Psi_{n,m}(u_{n,m+1}, u_{n,m}, u_{n,m-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Помимо уравнения (1) нам известны только несколько исключений, полученных в работах [6]–[8]. В этих примерах простейшие высшие симметрии в обоих направлениях имеют более сложную структуру, чем (7): они зависят также от $u_{n\pm 2,m}$ или $u_{n,m\pm 2}$.

С точки зрения структуры высших симметрий уравнение (1) является единственным в своем роде, поэтому мы изучим его более детально. В разделе 2 мы строим L – A –пары для каждого из уравнений (1)–(3) и демонстрируем, что L – A –пара уравнения (1) также является нестандартной. В разделе 3, используя полученную тройку L – A –пар, мы находим для дискретного уравнения (1) две иерархии законов

сохранения. В разделе 4 построены мастер-симметрия для уравнения (2) и оператор рекурсии для уравнения (3), таким образом мы получаем иерархии высших симметрий дискретного уравнения в каждом из направлений n и m . В разделе 5 с использованием тройки уравнений (1)–(3) мы построили два примера непрерывных интегрируемых гиперболических систем.

2. L -А-ПАРЫ

При построении L -А-пары уравнения (1) мы используем следующее интересное свойство симметрии (3). Оказывается, она эквивалентна известной системе двух уравнений, найденной Цучидой (см. [9], (3.13)), и L -А-пара для этой системы известна и приводится в той же статье.

Система Цучиды после преобразования

$$v_k \rightarrow (-1)^k v_k, \quad w_k \rightarrow (-1)^{k+1} w_k$$

и добавления точечной симметрии может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_1} v_k &= (\alpha v_{k+1} - \beta v_{k-1})(v_k w_k - 1)(v_k w_{k+1} - 1), \\ \frac{d}{dt_1} w_k &= (\beta w_{k+1} - \alpha w_{k-1})(v_k w_k - 1)(v_{k-1} w_k - 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Эта система является интегрируемой дискретизацией одного из нелинейных уравнений Шредингера с производной, введенного в работе [10] (см. также [11]). Уравнение (3) при любом фиксированном m связано с системой (8) следующим образом:

$$v_k = u_{2k,m}, \quad w_k = u_{2k-1,m}, \quad \alpha = a_{2k}, \quad \beta = a_{2k-1}. \quad (9)$$

Отметим, что система (8) является линейной комбинацией двух совместных систем, соответствующих частным случаям $\alpha = 1, \beta = 0$ и $\alpha = 0, \beta = 1$. В этом смысле система (8) аналогична известной цепочке Абловица–Ладика, которая также является линейной комбинацией двух коммутирующих уравнений типа релятивистской цепочки Тоды (см., например, п. 5.2 в работе [12]).

Уравнения, связанные преобразованием (9), эквивалентны, и мы можем переносить обобщенные симметрии и законы сохранения с одного уравнения на другое (см. [13]). Мы получаем L -А-пару для уравнения (3) с помощью преобразования (9), переписывая известную L -А-пару уравнения (8), найденную в работе [9]. Эта L -А-пара стандартна и задается следующей парой совместных линейных уравнений:

$$T_k \Phi_k = U_k \Phi_k, \quad D_{t_1} \Phi_k = V_k \Phi_k, \quad (10)$$

где Φ_k является двухкомпонентной вектор-функцией, U_k, V_k – (2×2) -матрицы, зависящие от спектрального параметра, T_k – оператор сдвига по переменной k : $T_k h_k = h_{k+1}$.

Из преобразования (9) видно, что сдвиг v_k, w_k по переменной k соответствует двойному сдвигу $u_{n,m}$ по n . Поэтому мы получаем L -А-пару для уравнения (3) в несколько иной форме:

$$T_n^2 \Psi_{n,m} = N_{n,m} \Psi_{n,m}, \quad D_{t_1} \Psi_{n,m} = A_{n,m} \Psi_{n,m}. \quad (11)$$

Здесь T_n – оператор сдвига по переменной n , а матрицы $N_{n,m}$, $A_{n,m}$ имеют вид

$$N_{n,m} = \begin{pmatrix} h_{n,m}(1-\lambda) - 2\lambda & u_{n+1,m}(\lambda-1) \\ -2\lambda u_{n,m} h_{n+1,m} & h_{n+1,m}(\lambda-1) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$A_{n,m} = \begin{pmatrix} h_{n-1,m} \left(a_{n-1} u_{n+1,m} u_{n-2,m} + a_n \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right) + & -a_n u_{n-1,m} \frac{\lambda-1}{\lambda+1} - a_{n-1} u_{n+1,m} \\ & + a_{n-1} \frac{2\lambda}{\lambda-1} \\ 2\lambda h_{n-1,m} \left(\frac{u_{n,m} a_n}{1+\lambda} + \frac{u_{n-2,m} a_{n-1}}{\lambda-1} \right) - & h_{n,m} (a_n u_{n-1,m} u_{n+2,m} - a_{n-1}) \\ & - a_n u_{n,m} u_{n-1,m} \frac{2\lambda}{1+\lambda} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Оператор $T_n^2 - N_{n,m}$, возникающий в первом из уравнений (11), является дискретным аналогом оператора Шредингера с матричными коэффициентами. Условие совместности уравнений (11) имеет вид

$$D_{t_1} N_{n,m} = (T_n^2 A_{n,m}) N_{n,m} - N_{n,m} A_{n,m}, \quad (14)$$

и это соотношение эквивалентно уравнению (3). В терминах (4×4) -матриц L – A -пара может быть переписана в стандартном виде:

$$T_n \begin{pmatrix} \Psi_{n,m} \\ \Psi_{n+1,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ N_{n,m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{n,m} \\ \Psi_{n+1,m} \end{pmatrix},$$

$$D_{t_1} \begin{pmatrix} \Psi_{n,m} \\ \Psi_{n+1,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n,m} & 0 \\ 0 & A_{n+1,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{n,m} \\ \Psi_{n+1,m} \end{pmatrix}.$$

Что касается симметрии (2), то при любом фиксированном $n \in \mathbb{Z}$, переходя к $z_m = i^m u_{n,m}$ и используя растяжение времени, мы получаем хорошо известное уравнение [14], [15]

$$\frac{dz_m}{dt_2} = \frac{z_{m+1} z_{m-1} + z_m^2}{z_{m+1} - z_{m-1}}. \quad (15)$$

Для уравнений этого типа вспомогательная линейная задача известна [4] и является стандартной:

$$T_m \Psi_{n,m} = M_{n,m} \Psi_{n,m}, \quad D_{t_2} \Psi_{n,m} = B_{n,m} \Psi_{n,m}. \quad (16)$$

Здесь $M_{n,m}(u_{n,m}, u_{n,m+1})$, $B_{n,m}(u_{n,m-1}, u_{n,m}, u_{n,m+1})$ – (2×2) -матрицы, и условие совместности имеет вид

$$D_{t_2} M_{n,m} = (T_m B_{n,m}) M_{n,m} - M_{n,m} B_{n,m}. \quad (17)$$

Первые линейные дискретные уравнения из (11), (16) задают пару Лакса для дискретного уравнения (1), если в них совпадают вектор-функции $\Psi_{n,m}$ и спектральные параметры λ . После замены вектор-функции с помощью матрицы $\Omega_{n,m}$ матрица $M_{n,m}$ изменяется в соответствии с калибровочным преобразованием

$$\widetilde{M}_{n,m} = \Omega_{n,m+1}^{-1} M_{n,m} \Omega_{n,m}.$$

Матрица $\Omega_{n,m}$ и замена спектрального параметра могут быть найдены прямым вычислением, но мы предпочитаем другой, более простой путь. Мы используем соотношение

$$(T_n^2 M_{n,m}) N_{n,m} = (T_m N_{n,m}) M_{n,m}, \quad (18)$$

эквивалентное (1), известную матрицу $N_{n,m}$ и ищем матрицу $M_{n,m}(u_{n,m}, u_{n,m+1})$. В результате мы получаем

$$M_{n,m} = \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1-\lambda}{u_{n,m} + u_{n,m+1}} \\ \lambda(u_{n,m+1} - u_{n,m}) & \frac{\lambda(u_{n,m} - u_{n,m+1})}{u_{n,m} + u_{n,m+1}} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Соответствующая матрица $B_{n,m}$, задающая L - A -пару для уравнения (2), строится при помощи условия (17):

$$B_{n,m} = \frac{(-1)^n}{u_{n,m+1} + u_{n,m-1}} \times \\ \times \begin{pmatrix} (1-\lambda)(u_{n,m-1} - u_{n,m}) & 1-\lambda \\ \lambda(u_{n,m}^2 - u_{n,m+1}^2) & \lambda(u_{n,m} + u_{n,m+1}) - (u_{n,m} + u_{n,m-1}) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Отметим, что дискретная L - A -пара (18) тоже может быть переписана в стандартном виде:

$$(T_n \widetilde{M}_{n,m}) \widetilde{N}_{n,m} = (T_m \widetilde{N}_{n,m}) \widetilde{M}_{n,m} \quad (21)$$

в терминах (4×4) -матриц $\widetilde{M}_{n,m}, \widetilde{N}_{n,m}$ блочной структуры. Сформулируем полученные результаты.

ТЕОРЕМА 1. *L - A -пары для уравнений (1)–(3) задаются соответственно соотношениями (18), (17), (14), в которых (2×2) -матрицы имеют вид (12), (13), (19), (20).*

Практически для всех известных интегрируемых дискретных уравнений вида (6) L - A -пара задается соотношением (21) с (2×2) -матрицами $\widetilde{M}_{n,m}, \widetilde{N}_{n,m}$. Известны два исключения [6], [7], в которых L - A -пара имеет тот же вид (21), но задается матрицами размера 3×3 . Эти уравнения являются дискретными аналогами уравнения Цицейки [16]

$$u_{xy} = e^u + e^{-2u},$$

для которого L - A -пара определяется уравнениями

$$D_x \Psi = L \Psi, \quad D_y \Psi = A \Psi$$

с (3×3) -матрицами L, A [17]. Наше уравнение (1) является еще одним исключением: его L - A -пара (18) задается (2×2) -матрицами и может быть переписана в форме (21) с матрицами размера 4×4 .

Мы проверили, что дискретное уравнение (1) не имеет стандартной L - A -пары (21) в терминах (2×2) -матриц. Более точно, мы зафиксировали матрицу $\widetilde{M}_{n,m} = M_{n,m}$ из (19) и искали (2×2) -матрицу $\widetilde{N}_{n,m}(u_{n-1,m}, u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n+2,m})$. Используя эквивалентность L - A -пары (21) дискретному уравнению (1), мы показали, что матрицы $\widetilde{N}_{n,m}$ такого вида не существует.

Уравнение (2) с $a_n \equiv 1$ при любом фиксированном $m \in \mathbb{Z}$ является автономной цепочкой вида

$$\frac{d}{dt} u_n = G(u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}). \quad (22)$$

В этом классе уравнений оно занимает особое место, аналогичное месту уравнения (1) в классе (6). Большинство известных интегрируемых уравнений (22) являются высшими симметриями уравнений типа Вольтерра [14], [15] и имеют L - A -пары вида

$$D_t L = (T_n A) L - L A \quad (23)$$

с (2×2) -матрицами L, A . Остальные известные нам интегрируемые цепочки являются аналогами уравнения Ито–Нариты–Богоявленского (см., например, [18]–[20])

$$\frac{d}{dt} u_n = u_n (u_{n+2} + u_{n+1} - u_{n-1} - u_{n-2}), \quad (24)$$

у которых L - A -пара (23) задается матрицами размера 3×3 . Наше уравнение (2) с $a_n \equiv 1$ имеет L - A -пару вида

$$D_t L = (T_n^2 A) L - L A \quad (25)$$

с (2×2) -матрицами. Она может быть переписана в виде (23) с матрицами размера 4×4 .

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В этом разделе мы строим законы сохранения для дискретного уравнения (1), используя схему, предложенную Михайловым [21]. Этот подход предполагает существенное использование тройки совместных L - A -пар (18), (17), (14) для дискретного уравнения (1) и его высших симметрий (2), (3). Имеется альтернативный подход, который также позволяет решить эту задачу [22].

Метод, который мы используем для построения законов сохранения, предполагает формальную диагонализацию всех матриц, определяющих тройку L - A -пар (18), (17), (14). При этом удобно начинать эту диагонализацию с линейных дифференциальных уравнений, входящих в (11), (16). Для этого используются известные результаты теории линейных дифференциальных уравнений [23] (см. также [24]).

Вектор-функция $\Psi_{n,m}$ может быть преобразована с помощью матрицы $\Omega_{n,m}$:

$$\tilde{\Psi}_{n,m} = \Omega_{n,m} \Psi_{n,m}.$$

При этом матрицы, определяющие L - A -пары (14), (17), (18), преобразуются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{n,m} &= \Omega_{n,m}^{-1} B_{n,m} \Omega_{n,m} - \Omega_{n,m}^{-1} \partial_{t_2} \Omega_{n,m}, \\ \tilde{M}_{n,m} &= \Omega_{n,m+1}^{-1} M_{n,m} \Omega_{n,m}, \\ \tilde{N}_{n,m} &= \Omega_{n+2,m}^{-1} N_{n,m} \Omega_{n,m}, \\ \tilde{A}_{n,m} &= \Omega_{n,m}^{-1} A_{n,m} \Omega_{n,m} - \Omega_{n,m}^{-1} \partial_{t_1} \Omega_{n,m}. \end{aligned} \quad (26)$$

Формальная диагонализация строится эффективно в окрестности полюсов матриц линейных дифференциальных операторов. Матрицы $B_{n,m}$ и $A_{n,m}$ имеют полюсы в точках $\lambda = \infty$ и $\lambda = \pm 1$ соответственно. Сформулируем лемму о диагонализации матрицы $B_{n,m}$ в окрестности ее полюса (см., например, [24], с. 86).

ЛЕММА 1. Если главная часть $\partial B_{n,m}/\partial \lambda$ матрицы $B_{n,m}$ имеет различные собственные значения, то существует формальный ряд

$$\Omega_{n,m} = \Omega_{n,m}^* \left(E + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j} \Omega_{n,m}^{(-j)} \right),$$

такой, что E – единичная матрица и $\Omega_{n,m}^{(-j)}$, $j \geq 1$, являются антидиагональными матрицами. При этом матрица $\tilde{B}_{n,m}$, полученная при помощи первой из формул (26), имеет вид

$$\tilde{B}_{n,m} = \lambda B_{n,m}^{(1)} + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} B_{n,m}^{(-j)},$$

где $B_{n,m}^{(l)}$ – диагональные матрицы.

Здесь мы имеем дело с формальными рядами. Вопросы сходимости этих рядов не обсуждаются. Для построения любого конечного числа законов сохранения достаточно знать конечное число коэффициентов формальных рядов.

Матрица $\partial B_{n,m}/\partial \lambda$ имеет различные собственные значения, поэтому существует преобразование, приводящее ее к диагональному виду. В качестве матрицы $\Omega_{n,m}^*$ можно взять любую из матриц этого преобразования, в частности

$$\Omega_{n,m}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u_{n,m} - u_{n,m-1} & u_{n,m} + u_{n,m-1} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

При этом находится $B_{n,m}^{(1)}$:

$$B_{n,m}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Для нахождения матриц $\Omega_{n,m}^{(l)}$ и $B_{n,m}^{(l)}$ с $l \leq 0$ перепишем первое из уравнений (26) в виде

$$\Omega_{n,m} \tilde{B}_{n,m} = B_{n,m} \Omega_{n,m} - \partial_{t_2} \Omega_{n,m}$$

и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях λ . Соотношение, соответствующее λ^1 , выполняется тождественно за счет выбора $\Omega_{n,m}^*$ и $B_{n,m}^{(1)}$. Соотношения при других степенях λ задают рекуррентные формулы для остальных коэффициентов $\tilde{B}_{n,m}$ и $\Omega_{n,m}$, из которых эти коэффициенты находятся явным образом. В частности,

$$\Omega_{n,m}^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(u_{n,m+1} + u_{n,m+2})(u_{n,m} - u_{n,m-1})}{(u_{n,m} + u_{n,m-2})(u_{n,m+1} + u_{n,m-1})} \\ \frac{(u_{n,m} - u_{n,m-1})(u_{n,m-1} - u_{n,m-2})}{(u_{n,m} + u_{n,m-2})(u_{n,m+1} + u_{n,m-1})} & 0 \end{pmatrix},$$

другие коэффициенты мы не приводим по причине их громоздкости.

Используя уравнение (17) и формулу (28) для $B_{n,m}^{(1)}$, мы можем доказать по индукции, что матрица $\widetilde{M}_{n,m}$ является диагональной. Из (26) мы находим

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{n,m} = & -\lambda \frac{u_{n,m+1} + u_{n,m-1}}{u_{n,m} + u_{n,m+1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \\ & - \begin{pmatrix} \frac{(u_{n,m+2} + u_{n,m+1})u_{n,m-1} - u_{n,m}(u_{n,m+1} + u_{n,m+2})}{(u_{n,m+2} + u_{n,m})(u_{n,m} + u_{n,m+1})} & 0 \\ 0 & \frac{u_{n,m+1} - u_{n,m}}{u_{n,m} + u_{n,m+2}} \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

Используя уравнение (18) и коэффициент ряда $\widetilde{M}_{n,m}$ при λ , мы можем доказать при помощи индукции, что матрица $\widetilde{N}_{n,m}$ также является диагональной. Из (26) мы получаем

$$\begin{aligned} \widetilde{N}_{n,m} = & -\lambda \begin{pmatrix} 1 + u_{n+1,m}u_{n,m-1} & 0 \\ 0 & 1 - u_{n+1,m}u_{n,m+1} \end{pmatrix} - \\ & - \frac{u_{n,m+1} - u_{n,m-1}}{u_{n,m+1} + u_{n,m-1}} \begin{pmatrix} 1 + u_{n+1,m}u_{n,m-1} & 0 \\ 0 & -1 + u_{n+1,m}u_{n,m+1} \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

Матрицы $\widetilde{M}_{n,m}$, $\widetilde{N}_{n,m}$ диагональны, и их элементы являются формальными рядами по степеням λ^{-1} . Уравнение (18) для этих матриц может быть переписано в виде

$$(T_n^2 - 1) \ln \widetilde{M}_{n,m} = (T_m - 1) \ln \widetilde{N}_{n,m}, \quad (29)$$

причем мы используем обозначения

$$\ln \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \alpha & 0 \\ 0 & \ln \beta \end{pmatrix}.$$

Следующие диагональные элементы разлагаются в формальные ряды:

$$(\ln \widetilde{M}_{n,m})_{1,1} = \ln \lambda + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} p_{n,m}^{(j)}, \quad (\ln \widetilde{N}_{n,m})_{1,1} = \ln \lambda + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} q_{n,m}^{(j)},$$

и мы получаем иерархию законов сохранения:

$$(T_n^2 - 1)p_{n,m}^{(j)} = (T_m - 1)q_{n,m}^{(j)}, \quad j \geq 0. \quad (30)$$

Эти законы сохранения могут быть переписаны в стандартном виде:

$$(T_n - 1)p_{n,m} = (T_m - 1)q_{n,m}, \quad (31)$$

поскольку $T_n^2 - 1 = (T_n - 1)(T_n + 1)$.

Первые два закона сохранения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} p_{n,m}^{(0)} &= \ln \frac{u_{n,m+1} + u_{n,m-1}}{u_{n,m} + u_{n,m+1}}, & q_{n,m}^{(0)} &= \ln(1 + u_{n+1,m}u_{n,m+1}); \\ p_{n,m}^{(1)} &= \frac{(u_{n,m+1} + u_{n,m+2})(u_{n,m} - u_{n,m-1})}{(u_{n,m+2} + u_{n,m})(u_{n,m+1} + u_{n,m-1})}, & q_{n,m}^{(1)} &= \frac{u_{n,m+1} - u_{n,m-1}}{u_{n,m+1} + u_{n,m-1}}. \end{aligned}$$

Из вторых диагональных элементов мы получаем такие же законы сохранения (в соответствии с приведенным ниже комментарием), за исключением первого шага, на котором имеем

$$\hat{p}_{n,m}^{(0)} = \ln \frac{u_{n,m} - u_{n,m+1}}{u_{n,m} + u_{n,m+2}}, \quad \hat{q}_{n,m}^{(0)} = \ln(1 - u_{n+1,m} u_{n,m+1}).$$

Все плотности законов сохранения $p_{n,m}^{(j)}$ этой иерархии зависят от конечного числа функций из множества

$$u_{n,m+k}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (32)$$

Для законов сохранения этого типа мы формулируем лемму 2 и определяем понятие порядка закона сохранения. Это позволяет нам различать законы сохранения между собой и выделять среди них тривиальные.

Определим сначала формальную вариационную производную в направлении m от плотности $p_{n,m}$:

$$\frac{\delta_m p_{n,m}}{\delta_m u_{n,m}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_m^{-k} \frac{\partial p_{n,m}}{\partial u_{n,m+k}}.$$

Эта сумма всегда конечна, так как $p_{n,m}$ зависит от конечного числа функций (32). Для любой сохраняющейся плотности $p_{n,m}$ имеем

$$\frac{\delta_m p_{n,m}}{\delta_m u_{n,m}} = P_{n,m}(u_{n,m-M}, u_{n,m-M+1}, \dots, u_{n,m+M-1}, u_{n,m+M}).$$

Используя функцию $r_{n,m}$, зависящую от конечного числа функций (32), мы можем перейти к эквивалентному закону сохранения

$$(T_n^2 - 1)\tilde{p}_{n,m} = (T_m - 1)\tilde{q}_{n,m}$$

по правилу

$$\tilde{p}_{n,m} = p_{n,m} + (T_m - 1)r_{n,m}, \quad \tilde{q}_{n,m} = q_{n,m} + (T_n^2 - 1)r_{n,m}. \quad (33)$$

ЛЕММА 2. При помощи преобразования эквивалентности (33) плотность любого закона сохранения (30) может быть приведена к одному из следующих трех видов:

- 1) $\tilde{p}_{n,m} = 0 \Leftrightarrow P_{n,m} = 0$;
- 2) $\tilde{p}_{n,m} = \tilde{p}_{n,m}(u_{n,m}), \tilde{p}'_{n,m} \neq 0 \Leftrightarrow M = 0, P_{n,m}(u_{n,m}) \neq 0$;
- 3) $\tilde{p}_{n,m} = \tilde{p}_{n,m}(u_{n,m}, u_{n,m+1}, \dots, u_{n,m+M}), \partial^2 \tilde{p}_{n,m} / \partial u_{n,m} \partial u_{n,m+M} \neq 0 \Leftrightarrow M > 0, \partial P_{n,m} / \partial u_{n,m-M} \neq 0, \partial P_{n,m} / \partial u_{n,m+M} \neq 0$.

В случае 1 леммы 2 закон сохранения называется *тривиальным*. В случаях 2 и 3 мы называем его *нетривиальным законом сохранения порядка M* , мы будем писать $\text{ord } p_{n,m} = M$. Видно, что законы сохранения различного порядка не эквивалентны в смысле преобразования (33). Например, мы имеем следующее свойство: число переменных функции $p_{n,m}(u_{n,m}, u_{n,m+1}, \dots, u_{n,m+k}), k > 0$, может быть уменьшено с помощью преобразования (33) тогда и только тогда, когда $\partial^2 p_{n,m} / \partial u_{n,m} \partial u_{n,m+k} \equiv 0$ для всех $n, m \in \mathbb{Z}$.

Эта теория полностью аналогична теории для дискретно-дифференциальных законов сохранения вида

$$D_t p_m = (T_m - 1)q_m.$$

Подробное обсуждение этой теории вместе с доказательствами приводится, например, в [13], [15]. Соответствующая теория для дискретных законов сохранения вида (31) обсуждается в работе [25].

Мы видим, что

$$\text{ord } p_{n,m}^{(0)} = 2, \quad \text{ord } p_{n,m}^{(1)} = 3, \quad \text{ord } \hat{p}_{n,m}^{(0)} = 2.$$

Таким образом, плотность $p_{n,m}^{(1)}$ отличается от двух других. Плотности $p_{n,m}^{(0)}$ и $\hat{p}_{n,m}^{(0)}$ могут быть, в принципе, эквивалентными с точностью до полной разности и умножения на константу. Однако если мы построим новый закон сохранения следующим образом:

$$\begin{aligned} \check{p}_{n,m}^{(0)} &= \hat{p}_{n,m}^{(0)} + p_{n,m}^{(0)} + (T_m - 1)(p_{n,m}^{(0)} + \ln(u_{n,m} + u_{n,m+1})) = \ln \frac{u_{n,m} - u_{n,m+1}}{u_{n,m} + u_{n,m+1}}, \\ \check{q}_{n,m}^{(0)} &= \hat{q}_{n,m}^{(0)} + q_{n,m}^{(0)} + (T_n^2 - 1)(p_{n,m}^{(0)} + \ln(u_{n,m} + u_{n,m+1})) = \ln(h_{n,m}h_{n+1,m}), \end{aligned} \quad (34)$$

то мы увидим, что $\text{ord } \check{p}_{n,m}^{(0)} = 1$. Таким образом, мы имеем три различных нетривиальных закона сохранения, порядок которых равен 1, 2 и 3.

Для построения законов сохранения в направлении n используется линейное дифференциальное уравнение из (11) и диагонализация начинается с матрицы $A_{n,m}$. Матрица $A_{n,m}$ (13) имеет полюсы при $\lambda = \pm 1$, и мы можем провести формальную диагонализацию в терминах формальных рядов по степеням $\lambda + 1$ или $\lambda - 1$, воспользовавшись аналогом леммы 1. В обоих случаях результаты совпадают, и мы ограничимся случаем $\lambda = -1$. В этом случае

$$\begin{aligned} \Omega_{n,m} &= \begin{pmatrix} u_{n-1,m} & 1 \\ -h_{n-1,m} & u_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda+1}{2} \frac{1-h_{n,m}h_{n+1,m}}{u_{n+1,m}} + \dots \\ \frac{\lambda+1}{2} u_{n-3,m}h_{n-1,m}h_{n-2,m} + \dots & 1 \end{pmatrix}, \\ \widetilde{N}_{n,m} &= \\ &= \begin{pmatrix} 2 + (\lambda + 1)(h_{n,m}u_{n-1,m}u_{n+2,m} - h_{n-1,m} - 2) & 0 \\ 0 & -(\lambda + 1)h_{n,m}h_{n+1,m} \end{pmatrix} + \dots, \\ \widetilde{M}_{n,m} &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 - (\lambda + 1) \frac{u_{n,m}(1+u_{n,m+1}u_{n-1,m})}{u_{n,m}+u_{n,m+1}} & 0 \\ 0 & \frac{u_{n,m+1}-u_{n,m}}{u_{n,m+1}+u_{n,m}} \left(1 + (\lambda + 1) \frac{h_{n-1,m}u_{n,m+1}}{u_{n,m+1}+u_{n,m}} \right) \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

В главном члене разложения порядка $(\lambda + 1)^0$ получаем закон сохранения (34), в следующих порядках $(\lambda + 1)^1$ и $(\lambda + 1)^2$ получаем законы сохранения

$$\begin{aligned} \check{p}_{n,m}^{(1)} &= \frac{2h_{n-1,m}u_{n,m+1}}{u_{n,m+1} + u_{n,m}}, \\ \check{q}_{n,m}^{(1)} &= u_{n-1,m}(u_{n+2,m}h_{n,m} - u_{n,m}), \\ \check{p}_{n,m}^{(2)} &= 4h_{n-1,m} \left(\frac{h_{n-1,m}(u_{n+2,m}h_{n,m} + u_{n,m})}{u_{n,m} + u_{n,m+1}} - \frac{u_{n,m}^2 h_{n-1,m}}{(u_{n,m} + u_{n,m+1})^2} \right) + \\ &\quad + 4h_{n-1,m} - 4u_{n-1,m}u_{n+2,m}h_{n-1,m}h_{n,m}, \end{aligned}$$

$$\check{q}_{n,m}^{(2)} = 2u_{n-1,m}u_{n+4,m}h_{n,m}h_{n+1,m}h_{n+2,m} + (h_{n-1,m}h_{n+1,m} - u_{n-1,m}u_{n+2,m} - 1)^2 - 2h_{n-1,m}h_{n+1,m} - (h_{n+1,m} + 2)^2.$$

Таким способом мы можем получить иерархию законов сохранения вида (30), в которых функция $q_{n,m}^{(j)}$ зависит от конечного числа функций из множества

$$u_{n+k,m}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (35)$$

Теория в этом случае аналогична той, которую мы обсуждали выше для законов сохранения в направлении m . Удобно переписать законы сохранения (30) в стандартной форме (31), где

$$p_{n,m} = (T_n + 1)p_{n,m}^{(j)}, \quad q_{n,m} = q_{n,m}^{(j)}.$$

В этом случае функция $q_{n,m}$ играет роль плотности закона сохранения. Мы вводим формальную вариационную производную в направлении n :

$$\frac{\delta_n q_{n,m}}{\delta_n u_{n,m}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_n^{-k} \frac{\partial q_{n,m}}{\partial u_{n+k,m}} = Q(u_{n-N,m}, u_{n-N+1,m}, \dots, u_{n+N,m})$$

и определяем порядок закона сохранения, как в предыдущем случае. Преобразование эквивалентности теперь имеет вид

$$\tilde{q}_{n,m} = q_{n,m} + (T_n - 1)s_{n,m}, \quad \tilde{p}_{n,m} = p_{n,m} + (T_m - 1)s_{n,m}, \quad (36)$$

где $s_{n,m}$ зависит от конечного числа функций (35).

Для законов сохранения, приведенных выше, мы имеем

$$\text{ord } \check{q}_{n,m}^{(0)} = 1, \quad \text{ord } \check{q}_{n,m}^{(1)} = 3, \quad \text{ord } \check{q}_{n,m}^{(2)} = 5.$$

Функция $\check{q}_{n,m}^{(0)}$ зависит от трех переменных, поэтому мы можем уменьшить их число и получить

$$\check{p}_{n,m}^{(0)} = \ln \left(\frac{u_{n,m} - u_{n,m+1}}{u_{n,m} + u_{n,m+1}} \right)^2, \quad \check{q}_{n,m}^{(0)} = 2 \ln h_{n,m}.$$

Дальнейшего упрощения можно достичь, вводя зависящий от n квадратный корень из единицы:

$$\bar{p}_{n,m}^{(0)} = \ln \left((-1)^n \frac{u_{n,m} - u_{n,m+1}}{u_{n,m} + u_{n,m+1}} \right), \quad \bar{q}_{n,m}^{(0)} = \ln h_{n,m}. \quad (37)$$

Отметим, что можно перейти от закона сохранения (34) к (37), применяя оператор $(T_n + 1)^{-1}$ к обеим его частям и принимая во внимание, что $(-1)^n$ принадлежит ядру оператора $T_n + 1$.

Таким образом, мы можем построить законы сохранения в направлении m любого натурального порядка, а в случае направления n мы получаем законы сохранения нечетного порядка. Законы сохранения четного порядка, по-видимому, не существуют, и мы можем доказать это в случае порядка 2. Более точно, мы рассматриваем сохраняющуюся плотность вида $q_{n,m}(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n+2,m})$ и допускаем явную зависимость от n, m . Соответствующая функция $p_{n,m}$ должна зависеть от $u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1}$. Мы используем наиболее слабое предположение, что $\partial^2 q_{n,m} / \partial u_{n,m} \partial u_{n+2,m} \neq 0$ хотя бы в одной точке n, m , и доказываем, что такого закона сохранения не существует.

4. МАСТЕР-СИММЕТРИЯ И ОПЕРАТОР РЕКУРСИИ ДЛЯ ВЫСШИХ СИММЕТРИЙ

В этом разделе мы обсуждаем проблему построения высших симметрий для дискретного уравнения (1). Имеются две иерархии симметрий в направлениях n и m . Рассмотрим сначала случай направления m и построим симметрии, аналогичные (2).

Как отмечалось выше, симметрия (2) эквивалентна известному уравнению (15) типа уравнения Вольтерра. Уравнения, аналогичные (15), обладают мастер-симметриями, которые генерируют для них высшие симметрии и законы сохранения [12]. Более подробное обсуждение можно найти в работах [2], [15], работа [2] содержит конкретные примеры. Здесь мы всего лишь переписываем известную мастер-симметрию уравнения (15) в переменных уравнения (2).

Для мастер-симметрии такого рода сначала мы должны ввести обобщение уравнения (2), зависящее от параметра τ , который будет играть роль времени мастер-симметрии:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_2^{(1)}} u_{n,m} &= \frac{(-1)^n}{\operatorname{ch} \tau} \frac{u_{n,m}^2 + u_{n,m-1} u_{n,m+1}}{u_{n,m-1} + u_{n,m+1}} + \\ &+ \operatorname{th} \tau \frac{u_{n,m}(u_{n,m+1} - u_{n,m-1})}{u_{n,m-1} + u_{n,m+1}} = \Psi_{n,m}^{(1)}(\tau). \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнение (38) при $\tau = 0$ совпадает с уравнением (2). Соответствующая мастер-симметрия имеет вид

$$\frac{d}{d\tau} u_{n,m} = m \Psi_{n,m}^{(1)}(\tau) = \Psi_{n,m}^*. \quad (39)$$

Она порождает иерархию симметрий

$$\frac{d}{dt_2^{(j)}} u_{n,m} = \Psi_{n,m}^{(j)}(\tau) \quad (40)$$

в соответствии с формулой

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m}^{(j+1)}(\tau) &= [\Psi_{n,m}^*, \Psi_{n,m}^{(j)}(\tau)] = D_\tau \Psi_{n,m}^{(j)}(\tau) - D_{t_2^{(j)}} \Psi_{n,m}^* = \\ &= \frac{\partial \Psi_{n,m}^{(j)}(\tau)}{\partial \tau} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\Psi_{n,m+k}^* \frac{\partial \Psi_{n,m}^{(j)}(\tau)}{\partial u_{n,m+k}} - \Psi_{n,m+k}^{(j)}(\tau) \frac{\partial \Psi_{n,m}^*}{\partial u_{n,m+k}} \right). \end{aligned}$$

Для всех уравнений (40) величина τ является внешним параметром, и эти уравнения совместны для любого значения этого параметра. По этой причине мы можем положить $\tau = 0$ в уравнениях (40) и получаем иерархию высших симметрий для уравнения (2). Полученные уравнения являются высшими симметриями также и для дискретного уравнения (1).

Например, при $j = 2$, $\tau = 0$

$$\frac{d}{dt_2^{(2)}} u_{n,m} = \Psi_{n,m}^{(2)}(0) = \frac{(u_{n,m+2} - u_{n,m-2})(u_{n,m+1}^2 - u_{n,m}^2)(u_{n,m}^2 - u_{n,m-1}^2)}{(u_{n,m} + u_{n,m-2})(u_{n,m+1} + u_{n,m-1})^2(u_{n,m+2} + u_{n,m})}.$$

Прямым вычислением можно проверить, что это уравнение совместно не только с (2), но и с дискретным уравнением (1).

В случае направления n мы используем оператор рекурсии для построения высших симметрий. Уравнение (3) эквивалентно известной системе (8), для которой оператор рекурсии был построен в работе [26]. Используя соотношения (9), мы только переписываем этот оператор в скалярном виде, пригодном для уравнения (3).

В этом случае удобно строить оператор рекурсии R в виде

$$R = H \circ S, \quad (41)$$

где оператор H является гамильтоновым, а S – симплектический оператор. Эти операторы имеют вид

$$S = (-1)^n \left(\frac{1}{h_{n,m}} T_n + \frac{1}{h_{n-1,m}} T_n^{-1} \right), \quad (42)$$

$$\begin{aligned} H = & h_{n,m} h_{n-1,m} (c_n u_{n+2,m} - c_{n-1} u_{n-2,m}) (T_n - 1)^{-1} (-1)^n u_{n,m} + \\ & + (-1)^n u_{n,m} T_n (T_n - 1)^{-1} h_{n,m} h_{n-1,m} (c_n u_{n+2,m} - c_{n-1} u_{n-2,m}) - \\ & - (-1)^n h_{n-1,m} h_{n,m} (c_n h_{n+1,m} T_n + c_{n-1} h_{n-2,m} T_n^{-1}), \end{aligned} \quad (43)$$

где c_n – произвольная двухпериодическая функция, зависящая от n .

Эти операторы удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt_1} + S \circ f_{n,m}^* + f_{n,m}^{*\perp} \circ S &= 0, \\ \frac{dH}{dt_1} &= f_{n,m}^* \circ H + H \circ f_{n,m}^{*\perp}. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь $f_{n,m}^*$, $f_{n,m}^{*\perp}$ – операторы, определяемые правой частью $f_{n,m}$ уравнения (3):

$$\frac{d}{dt_1} u_{n,m} = f_{n,m}. \quad (45)$$

Дискретный аналог производной Фреше $f_{n,m}^*$ функции $f_{n,m}$ имеет вид

$$f_{n,m}^* = \sum_{k=-2}^2 \frac{\partial f_{n,m}}{\partial u_{n+k,m}} T_n^k,$$

а сопряженный ему оператор $f_{n,m}^{*\perp}$ определяется формулой

$$f_{n,m}^{*\perp} = \sum_{k=-2}^2 \frac{\partial f_{n+k,m}}{\partial u_{n,m}} T_n^k.$$

Из (44) следует, что оператор $R = H \circ S$ удовлетворяет следующему уравнению Лакса:

$$\frac{dR}{dt_1} = [f_{n,m}^*, R], \quad (46)$$

где $[A, B] = A \circ B - B \circ A$. Все эти формулы стандартны и могут быть найдены, например, в работе [15] для случая автономных уравнений (45) и в работе [13] для неавтономного случая.

Уравнения (44) и (46) можно считать определениями симплектического, гамильтонова и рекурсионного операторов (см., например, [25]). Гамильтонов оператор H и симплектический оператор S обеспечивают связь между законами сохранения и высшими симметриями уравнения (3). Оператор R , удовлетворяющий (46), позволяет строить законы сохранения и высшие симметрии уравнения (3). Например, из (46) мы получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t_1^{(k)}} u_{n,m} = R^{k-1}(f_{n,m}) = f_{n,m}^{(k)}, \quad k \geq 2, \quad (47)$$

являются высшими симметриями уравнений (3), (45). В случае $k = 2$

$$\begin{aligned} f_{n,m}^{(2)} &= \hat{f}_{n,m}^{(2)} - (c_n + c_{n-1})f_{n,m} + (c_n a_{n-1} - c_{n-1} a_n)(-1)^n u_{n,m}, \\ \hat{f}_{n,m}^{(2)} &= h_{n,m} h_{n-1,m} (b_n h_{n+1,m} h_{n+2,m} u_{n+4,m} - b_{n-1} h_{n-2,m} h_{n-3,m} u_{n-4,m} + \\ &\quad + u_{n,m} (b_n u_{n+2,m} h_{n-2,m} u_{n-3,m} - b_{n-1} u_{n-2,m} h_{n+1,m} u_{n+3,m}) + \\ &\quad + (u_{n-1,m} h_{n,m} - u_{n+1,m})(b_n u_{n+2,m}^2 - b_{n-1} u_{n-2,m}^2) - \\ &\quad - u_{n,m} (b_n u_{n-1,m} u_{n+2,m} - b_{n-1} u_{n+1,m} u_{n-2,m})), \end{aligned} \quad (48)$$

где $b_n = a_n c_n$. Эта симметрия была найдена в работе [1]. Можно проверить, что она также является высшей симметрией дискретного уравнения (1).

По формуле (47) строятся симметрии вида

$$\frac{\partial}{\partial t_1^{(k)}} u_{n,m} = f_{n,m}^{(k)}(u_{n+2k,m}, u_{n+2k-1,m}, \dots, u_{n-2k+1,m}, u_{n-2k,m}),$$

которые можно назвать симметриями четных порядков $2k$. В работе [1] было показано, что симметрии первого порядка не существует. Вероятно, в этом случае не существует высших симметрий нечетных порядков.

Мы видим, что высшие симметрии для уравнений (3) и (1) зависят от произвольных двухпериодических функций переменной n . То же самое верно для гамильтонова и рекурсионного операторов. Такая ситуация необычна в случае скалярных дискретно-дифференциальных уравнений типа (3) и, вероятно, возникает впервые. Поэтому систему Щучиды (8) можно считать аналогом релятивистской цепочки Тоды, у которой симметрии и эти операторы также зависят от двух параметров. Подобные свойства симметрий обсуждались в работе [12], а свойства операторов исследовались в [27].

5. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В этом разделе мы получаем две интегрируемые гиперболические системы уравнений вместе с L - A -парами из высших симметрий дискретного уравнения (1).

Рассмотрим две совместные симметрии вида (3) с $a_n = \chi_n$ и $a_n = \chi_{n-1}$, где $\chi_n = (1 + (-1)^n)/2$, а именно уравнения

$$\begin{aligned} \partial_x u_{n,m} &= h_{n,m} h_{n-1,m} (\chi_n u_{n+2,m} - \chi_{n-1} u_{n-2,m}), \\ \partial_y u_{n,m} &= h_{n,m} h_{n-1,m} (\chi_{n-1} u_{n+2,m} - \chi_n u_{n-2,m}). \end{aligned} \quad (49)$$

Из (11), (13) можно получить следующие системы линейных уравнений:

$$D_x \Psi_{n,m} = A_{n,m}^{(1)} \Psi_{n,m}, \quad D_y \Psi_{n,m} = A_{n,m}^{(2)} \Psi_{n,m}, \quad (50)$$

где $A_{n,m}^{(1)}$ и $A_{n,m}^{(2)}$ совпадают с матрицей $A_{n,m}$, в которую подставлено $a_n = \chi_n$ и $a_n = \chi_{n-1}$ соответственно. Эта система линейных уравнений совместна на решениях системы (49). Теперь мы изменяем матрицы $A_{n,m}^{(1)}$ и $A_{n,m}^{(2)}$, выражая функции $u_{n\pm 2,m}$ через $u_{n,m}$, $u_{n\pm 1,m}$, а также $\partial_x u_{n,m}$ или $\partial_y u_{n,m}$. Мы делаем это, используя следствия системы (49)

$$\begin{aligned} \chi_n u_{n+2,m} &= \frac{\chi_n \partial_x u_{n,m}}{h_{n,m} h_{n-1,m}}, & \chi_{n-1} u_{n-2,m} &= -\frac{\chi_{n-1} \partial_x u_{n,m}}{h_{n,m} h_{n-1,m}}, \\ \chi_{n-1} u_{n+2,m} &= \frac{\chi_{n-1} \partial_y u_{n,m}}{h_{n,m} h_{n-1,m}}, & \chi_n u_{n-2,m} &= -\frac{\chi_n \partial_y u_{n,m}}{h_{n,m} h_{n-1,m}}. \end{aligned} \quad (51)$$

В результате мы получаем матрицы, которые зависят только от $u_{n,m}$, $u_{n+1,m}$, $u_{n-1,m}$, и, используя эти матрицы, мы можем получить из (50) систему трех уравнений для трех неизвестных функций.

Чтобы избежать явной зависимости от n , следует перейти к четным или нечетным n . В случае нечетных $n = 2k - 1$ введем следующие обозначения:

$$p = u_{2k-1,m}, \quad q = u_{2k,m}, \quad r = u_{2k-2,m}. \quad (52)$$

Тогда матрицы примут вид

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{qp_x}{1-pq} + \frac{2\lambda}{\lambda-1} & -q \\ \frac{2\lambda p_x}{(\lambda-1)(1-pq)} & 1-pq \end{pmatrix}, \quad (53)$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{(\lambda-1)(pr-1)}{1+\lambda} & \frac{(1-\lambda)r}{1+\lambda} \\ \frac{2\lambda p(pr-1)}{1+\lambda} & \frac{rp_y}{pr-1} - \frac{2\lambda pr}{1+\lambda} \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Соответствующие линейные уравнения можно записать в виде

$$D_x \Psi = A^{(1)} \Psi, \quad D_y \Psi = A^{(2)} \Psi,$$

и их условие совместности выглядит следующим образом:

$$D_x A^{(2)} - D_y A^{(1)} = [A^{(1)}, A^{(2)}]. \quad (55)$$

Это матричное уравнение эквивалентно гиперболической системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial x \partial y} + \frac{p_x p_y}{p^2(pq-1)(pr-1)} + (pq-1)(pr-1) &= 0, \\ (pr-1)q_y + qrp_y - r(pq-1)(pr-1) &= 0, \\ (pq-1)r_x + qrp_x + q(pq-1)(pr-1) &= 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Таким образом, мы получили интегрируемую систему (56) трех гиперболических уравнений вместе с L - A -парой (53)–(55). Если $u_{n,m}(x, y)$ – общее решение уравнений (49), то функции (52) удовлетворяют системе (56) при любых k, m .

При четных значениях $n = 2k$ мы получаем ту же самую гиперболическую систему с точностью до инволюции $x \leftrightarrow y$. В обоих случаях, независимо от четности n , первое из уравнений (56) может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 \ln u_{n,m}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial_x u_{n,m} \partial_y u_{n,m}}{u_{n,m}^2 (u_{n,m} u_{n-1,m} - 1)(u_{n,m} u_{n+1,m} - 1)} + (u_{n,m} u_{n-1,m} - 1)(u_{n,m} u_{n+1,m} - 1) = 0, \quad (57)$$

и это – не что иное, как $(2+1)$ -мерная цепочка (m – внешний параметр), подобная $(2+1)$ -мерному обобщению цепочки Тоды [17]. Любое совместное решение $u_{n,m}(x, y)$ уравнений (49) является также решением цепочки (57). Вопрос об интегрируемости цепочки (57) в настоящей работе не исследовался и остается открытым.

Для получения второй гиперболической системы уравнений рассматривается следующая пара высших симметрий:

$$\begin{aligned} \partial_x u_{n,m} &= h_{n,m} h_{n-1,m} (\chi_n u_{n+2,m} - \chi_{n-1} u_{n-2,m}), \\ \partial_z u_{n,m} &= (-1)^n \frac{u_{n,m}^2 + u_{n,m+1} u_{n,m-1}}{u_{n,m+1} + u_{n,m-1}}, \end{aligned} \quad (58)$$

совместная на решениях дискретного уравнения (1). Соответствующая вспомогательная линейная задача имеет вид

$$D_x \Psi_{n,m} = A_{n,m}^{(1)} \Psi_{n,m}, \quad D_z \Psi_{n,m} = B_{n,m} \Psi_{n,m}.$$

Здесь матрица $A_{n,m}^{(1)}$ определена, как в предыдущем случае, матрица $B_{n,m}$ задается формулой (20).

Матрица $A_{n,m}^{(1)}$ преобразовывается при помощи формул (51), в матрице $B_{n,m}$ мы исключаем $u_{n,m-1}$, используя второе из уравнений (58). Для устранения явной зависимости от n перейдем к нечетным $n = 2k - 1$ и введем обозначения

$$p = u_{2k-1,m}, \quad q = u_{2k,m}, \quad r = u_{2k-1,m+1}. \quad (59)$$

В результате мы получаем ту же самую матрицу $A^{(1)}$ (53) и следующую матрицу B :

$$B = \frac{1}{p-r} \begin{pmatrix} (\lambda-1)(p_z+p) & \frac{(1-\lambda)(p_z+r)}{p+r} \\ \lambda(p+r)(p_z+p) & \frac{(p-r)(p_z-p)}{p+r} - \lambda(p_z+r) \end{pmatrix}.$$

В этом случае вместо (55) мы приходим к матричному соотношению

$$D_x B - D_z A^{(1)} = [A^{(1)}, B]. \quad (60)$$

Соотношение (60) эквивалентно следующей гиперболической системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial x \partial z} + \frac{(p_z-p)(p-r)p_x}{p^2(p+r)(pq-1)} + \frac{(p_z+p)(p+r)(pq-1)}{(p-r)p} &= 0, \\ (p^2-r^2)q_z - 2(qr-1)p_z - q(p^2+r^2) + 2r &= 0, \\ (pq-1)r_x - (qr-1)p_x - (p+r)(pq-1)(qr-1) &= 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Имеются четыре варианта гиперболических систем в зависимости от выбора четного или нечетного n и исключения функции $u_{n,m+1}$ или $u_{n,m-1}$ в матрице $B_{n,m}$. Однако все эти системы являются эквивалентными с точностью до простых точечных преобразований.

Случай высших симметрий (49), совместных друг с другом без дополнительных предположений, аналогичен примерам, рассмотренным в работах [12], [28]. Вторым случаем высших симметрий (58), которые совместны на решениях дискретного уравнения (1), по-видимому, является новым.

Во втором случае мы также можем построить $(2 + 1)$ -мерную цепочку, подобную (57). Однако она является неавтономной и весьма громоздкой, и по этим причинам мы ее не выписываем.

В системах (56), (61) мы можем исключить r или q , используя соответственно второе или третье уравнение. В этом случае мы получим гиперболические системы двух уравнений, аналогичные системам, представленным в работах [12], [28]. Однако эти системы содержат квадратные корни и имеют сложный вид.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы построили L - A -пару для дискретного уравнения (1) и продемонстрировали, что это уравнение отличается от известных примеров с точки зрения L - A -пар.

Большинство известных интегрируемых дискретных уравнений вида (6) имеет L - A -пару вида

$$(T_n - N_{n,m})\Psi_{n,m} = 0, \quad (T_m - M_{n,m})\Psi_{n,m} = 0 \quad (62)$$

с (2×2) -матрицами $N_{n,m}$, $M_{n,m}$. Имеются также дискретные аналоги уравнения Цицейки с (3×3) -матрицами в L - A -паре (62). L - A -пара нашего уравнения (1) имеет вид

$$(T_n^2 - N_{n,m})\Psi_{n,m} = 0, \quad (T_m - M_{n,m})\Psi_{n,m} = 0 \quad (63)$$

с (2×2) -матрицами.

В разделе 4 мы построили для уравнения (1) две иерархии высших симметрий в обоих направлениях m и n . Эти иерархии оказываются разнотипными: в направлении m имеются симметрии любого натурального порядка, тогда как в направлении n мы имеем только симметрии четного порядка. Для других известных примеров обе иерархии однотипны.

Иерархии законов сохранения, построенные в разделе 3, также оказываются разнотипными. В направлении m существуют законы сохранения любого натурального порядка, а в направлении n – только нечетного порядка.

Уравнение (3) с $a_n = 1$ относится к классу автономных уравнений вида (22) и является младшим членом своей иерархии. Можно было ожидать, что оно окажется аналогом цепочки Ито–Нариты–Богоявленского (24). Наше исследование показало, что уравнение (3) с $a_n = 1$ тесно связано с известной интегрируемой системой Пучиды (8), которая по своим симметричным свойствам близка к релятивистской цепочке Тоды.

Другие известные интегрируемые цепочки вида (22) имеют L – A -пары (23) с (2×2) - или (3×3) -матрицами. Наш пример уравнения (3) с $a_n = 1$ отличается от них тем, что L – A -пара имеет вид (25) с матрицами размера 2×2 .

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (гранты № 12-01-31208, 13-01-00070, 14-01-97008-р-поволжье_а) и Министерством образования и науки РФ (соглашение 8499).

Список литературы

- [1] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov, *J. Phys. A*, **45**:34 (2012), 345205, 23 pp.
- [2] D. Levi, M. Petrera, C. Scimiterna, R. Yamilov, *SIGMA*, **4** (2008), 077, 14 pp.
- [3] D. Levi, R. I. Yamilov, *J. Phys. A*, **44**:14 (2011), 145207, 22 pp., arXiv: 1011.0070.
- [4] P. Xenitidis, “Integrability and symmetries of difference equations: the Adler–Bobenko–Suris case”, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems* (Protaras, Cyprus, October 26–30, 2008), University of Cyprus, Nicosia, 2009, 226–242, arXiv: 0902.3954.
- [5] P. D. Xenitidis, V. G. Papageorgiou, *J. Phys. A*, **42**:45 (2009), 454025, 13 pp.
- [6] V. E. Adler, “On a discrete analog of the Tzitzeica equation”, arXiv: 1103.5139.
- [7] A. V. Mikhailov, P. Xenitidis, *Lett. Math. Phys.*, **104**:4 (2013), 431–450, arXiv: 1305.4347.
- [8] C. Scimiterna, M. Hay, D. Levi, *On the integrability of a new lattice equation found by multiple scale analysis*, arXiv: 1401.5691.
- [9] T. Tsuchida, *J. Phys. A*, **35**:36 (2002), 7827–7847, arXiv: nlin/0105053.
- [10] M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, *J. Math. Phys.*, **21**:5 (1980), 1006–1015.
- [11] V. S. Gerdjikov, M. I. Ivanov, *Bulgar. J. Phys.*, **10**:2 (1983), 130–143.
- [12] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.
- [13] D. Levi, R. Yamilov, *J. Math. Phys.*, **38**:12 (1997), 6648–6674.
- [14] Р. И. Ямилов, *УМН*, **38**:1(229) (1983), 155–156.
- [15] R. Yamilov, *J. Phys. A*, **39**:45 (2006), R541–R623.
- [16] G. Tzitzéica, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **25**:1 (1907), 180–187.
- [17] А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ*, **30**:7 (1979), 443–448.
- [18] O. I. Bogoyavlensky, *Phys. Lett. A*, **134**:1 (1988), 34–38.
- [19] Y. Itoh, *Proc. Japan Acad.*, **51** (1975), 374–379.
- [20] K. Narita, *J. Phys. Soc. Japan*, **51**:5 (1982), 1682–1685.
- [21] A. V. Mikhailov, “Formal diagonalisation of Darboux transformation and conservation laws of integrable PDEs, PDΔEs, and PΔEs”, Доклад на Международном научном семинаре “Геометрические структуры в интегрируемых системах” (Москва, МГУ, 30 октября–2 ноября 2012), 2012; http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=eng&presentid=5934.
- [22] И. Т. Хабибуллин, М. В. Янгубаева, *ТМФ*, **177**:3 (2013), 441–467.
- [23] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1968.
- [24] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, “Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза”, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Нов. достиж., **24**, ВИНТИ, М., 1984, 81–180.
- [25] А. В. Михайлов, Дж. П. Ванг, П. Ксенитидис, *ТМФ*, **167**:1 (2011), 23–49.
- [26] Ф. Ханизаде, А. В. Михайлов, Дж. П. Ванг, *ТМФ*, **177**:3 (2013), 387–440.
- [27] Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **151**:1 (2007), 66–80.
- [28] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *Алгебра и анализ*, **2**:2 (1990), 183–208.