Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян, А. Г. Барсегян, Об уравнениях переноса, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 2, 206–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8667>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:24:43

© 2014 г.

Н. Б. Енгибарян*, А. Г. Барсегян*

ОБ УРАВНЕНИЯХ ПЕРЕНОСА

Изучаются вопросы общей теории и методы решения линейных задач переноса в однородном полупространстве и в плоском слое конечной толщины. Предлагается развитие факторизационной трактовки операторного подхода. Рассматриваются нелинейные уравнения факторизации и обобщенное уравнение Амбарцумяна в сочетании с использованием возможностей двух аналитических полугрупп.

Ключевые слова: уравнения переноса в плоском слое, операторный подход, факторизация, аналитические полугруппы.

DOI: 10.4231/tmf8667

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории переноса изучается многократное рассеяние элементарных частиц (фотонов, нейтронов, гамма-квантов, электронов) в среде (см. монографии [1]–[3]). Задачи переноса возникают в астрофизике, физике атмосферы Земли и водных бассейнов, нейтронной физике, гамма-спектроскопии и в других областях. С точки зрения теории вероятностей явление переноса является сложной формой коллективного случайного блуждания в пространстве с возможностью взаимного превращения блуждающих частиц.

В стационарных задачах переноса искомая интенсивность излучения J может зависеть от координат точки, направления, энергии (или частоты) и других переменных. Расчет поля излучения при заданных свойствах среды и распределении первичных источников сводится к краевой задаче для кинетического интегродифференциального уравнения переноса. Широко используется интегральная форма уравнения переноса. Математические методы, развитые в рамках теории переноса, нашли применение в разных областях математического естествознания.

В. С. Владимиров внес фундаментальный вклад в математическую теорию переноса. Характерной чертой его работ было сочетание тонких теоретических построений и прикладных аспектов. Отметим два результата В. С. Владимирова концептуального характера.

*Институт математики Национальной Академии Наук Республики Армения, Ереван, Армения. E-mail: yengib@instmath.sci.am, anibarseghyan@mail.ru

В. С. Владимиров был одним из первых, кто должным образом оценил роль нелинейных функциональных уравнений в линейной теории переноса. В работе [4] была построена факторизация краевой задачи для линейного дифференциального уравнения путем решения задачи Коши для уравнения Риккати. Этот результат явился значительным вкладом в метод прогонки и в проблему факторизационной трактовки метода сложения слоев (инвариантного погружения) Амбарцумяна–Беллмана.

В односкоростной теории диффузии нейтронов и во многих других теориях угловое распределение рассеянного излучения описывается индикатрисой рассеяния $\chi(\mu)$, $\mu \in (-1, 1)$. Обычно предполагалось, что $\chi \in L_2(-1, 1)$. В своем капитальном труде [5] В. С. Владимиров предвидел и подчеркнул важность рассмотрения задач анизотропного рассеяния при естественном предположении $\chi \in L_1(-1, 1)$ (что соответствует физическому и вероятностному смыслу индикатрисы) и распространил теорему Функа–Хекке на этот случай. Данный результат не только представляет интерес с точки зрения расширения класса допустимых индикатрис, но он еще и стал ориентиром в следующем принципиальном вопросе: в какой норме следует работать с ядрами интегральных операторов, фигурирующих в уравнениях переноса? Правильный выбор функциональных пространств играет большую роль в вопросе эффективного решения уравнений переноса.

Операторный подход к уравнениям переноса, берущий свое начало из работы [6] (см. также работы [7], [8]), отличается простотой и общностью. Он часто подсказывает естественный путь решения задачи с использованием полугрупповых свойств некоторых семейств операторов, имеющих простой физический смысл.

Настоящая работа посвящена вопросам общей теории и методам решения линейных задач переноса в однородном полупространстве и в плоском слое конечной толщины. Развивается факторизационная трактовка [8] операторного формализма. Используются нелинейные уравнения факторизации и обобщенное уравнение Амбарцумяна в сочетании с (наиболее полным) учетом возможностей двух аналитических полугрупп. Таким образом удастся добиться разделения переменных при решении уравнения переноса в слое конечной толщины. При этом определяется не только выходящее из среды излучение (как в работах [6], [9]), но и внутреннее поле излучения при произвольном распределении внутренних и внешних источников. Из-за общности рассматриваемой ситуации некоторые фрагменты изложены без полных доказательств. Почти не затрагиваются вопросы реализации методов работы. Тем самым остается широкий простор для будущих исследований в данном направлении.

2. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА В ПЛОСКОМ СЛОЕ

Рассмотрим линейную стационарную задачу переноса в однородной плоскопараллельной среде толщины $r \leq \infty$. Обозначим через Ω единичную сферу направлений с мерой $d\omega$ (величина телесного угла). Пусть $n \in \Omega$ – внутренняя нормаль к плоской границе $z = 0$ среды, $(\omega\omega')$ – скалярное произведение векторов $\omega, \omega' \in \Omega$, а Ω^+ – верхняя полусфера: $\omega \in \Omega^+$, если $(\omega n) > 0$.

В условиях плоской симметрии рассматриваемой задачи искомая интенсивность излучения J зависит только от одной пространственной координаты – расстояния z от одной из плоских границ среды. Интенсивность зависит также от ω и от набора w других возможных характеристик частиц: энергии (или частоты) и др. Каждый

конкретный набор параметров w назовем *сортом* частицы. Пусть W – множество с мерой dw изменения набора w . Таким образом,

$$J = J(z, \omega, w) \geq 0, \quad z \in [0, r], \quad \omega \in \Omega, \quad w \in W.$$

В некоторых задачах, например в односкоростной теории переноса нейтронов, интенсивность J может зависеть только от геометрических переменных z и ω .

Элементарный акт рассеяния можно описать функцией перераспределения $R(\omega, w, \omega', w')$ по направлениям и “сортам”, которая имеет следующий вероятностный смысл:

$$R(\omega, w, \omega', w') = g(\omega, w, \omega', w')a(\omega, w), \quad a(\omega, w) = (\omega n)^{-1}\alpha(\omega) > 0,$$

где $\alpha(\omega)$ – объемный коэффициент поглощения для частиц сорта w , а величина $g(\omega, w, \omega', w')dw'dw$ есть условная вероятность того, что частица, имеющая при поглощении характеристики (ω', w') , после переизлучения будет иметь значения характеристик, лежащие в элементарном объеме $dw'dw$ в окрестности точки (ω, w) . Имеем

$$\lambda = \int_{\Omega \times W} g(\omega, w, \omega', w') dw'dw \leq 1. \quad (1)$$

Величина λ считается не зависящей от (ω', w') и представляет собой вероятность выживания частицы при элементарном акте рассеяния. Случай $\lambda = 1$ называется консервативным, а случай $\lambda < 1$ – диссипативным.

Мы будем предполагать, что функция перераспределения обладает следующим свойством симметрии:

$$(\omega n)R(\omega, w, \omega', w') = (\omega' n)R(\omega', w', \omega, w). \quad (2)$$

В теории переноса световых квантов данная симметрия отражает (локальный) принцип обратимости оптических явлений и выполняется в случае всех известных законов перераспределения. Свойство обратимости (2) имеет место также в односкоростной теории переноса нейтронов. В процессах диффузии нейтронов в замедлителях равенство (2) не выполняется.

Введем функции

$$J^+(z, \omega, w) = J(z, \omega, w), \quad J^-(z, \omega, w) = J(z, -\omega, w), \quad \omega \in \Omega^+,$$

представляющие собой интенсивности излучений, распространяющихся в сторону возрастания и убывания z соответственно. Рассмотрим интенсивности $J^\pm$ как вектор-функции $J^\pm(z)$, принимающие значения в конусе K положительных функций некоторого пространства функций, измеримых на множестве $Q = \Omega^+ \times W$. О выборе функциональных пространств речь пойдет ниже.

Пусть A – оператор умножения на функцию $a(\omega, w) = (\omega n)^{-1}\alpha(\omega) > 0$,

$$Af(\omega, w) = a(\omega, w)f(\omega, w),$$

а $\check{R}^+$ и $\check{R}^-$ суть интегральные операторы с неотрицательными ядрами, описывающие перераспределение излучения при рассеянии соответственно “вперед” и “назад” при элементарном акте рассеяния,

$$\check{R}^\pm f(\omega, w) = \int_Q R(\pm\omega, w, \omega', w')f(\omega', w')d\omega'dw'.$$

Условие (2) можно записать в векторно-операторном виде $\eta(\check{R}^+ + \check{R}^-) = \lambda\eta A$, где η – функционал интегрирования по (ω, w) :

$$\eta f = \int_Q f(\omega, w) d\omega dw.$$

Интегродифференциальное уравнение переноса можно также записать в векторно-операторной форме

$$\pm \frac{dJ^\pm(z)}{dz} = -AJ^\pm(z) + \check{R}^+ J^\pm(z) + \check{R}^- J^\mp(z) + \varepsilon^\pm(z). \quad (3)$$

В случае слоя конечной толщины r к этому уравнению присоединяются граничные условия

$$J^+(0) = J_0, \quad J_0 = J_0(\omega, w), \quad \omega \in \Omega^+, \quad (4)$$

$$J^-(r) = 0. \quad (5)$$

В случае полупространства (когда $r = \infty$) условие (5) заменяется условием ограниченности или достаточно медленного роста функции $J^-(z)$ при $z \rightarrow \infty$.

Отрицательные слагаемые $-AJ^\pm(z)$ в правой части уравнения (3) учитывают ослабление излучения вследствие его поглощения в бесконечно тонком слое на глубине z , а интегральными членами вида $\check{R}^\pm J^\pm(z)$ описывается увеличение интенсивности вследствие добавления перераспределенного поглощенного излучения. Вектор-функции $\varepsilon^\pm(z)$ задают мощность внутренних источников энергии.

3. ОПЕРАТОРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

От краевой задачи (3)–(5) стандартным способом можно перейти к интегральной форме уравнения переноса (см. монографию [2]). Для простоты изложения мы ограничимся рассмотрением симметричного случая $\check{R}^\pm = \check{R}$. Тогда интегральное уравнение переноса в операторной форме имеет вид

$$S(z) = g(z) + \int_0^r e^{-A|z-t|} \check{R}S(t) dt, \quad (6)$$

где $S(z) = J^+(z) + J^-(z)$, а e^{-At} представляет собой оператор умножения на функцию $e^{-a(\omega, w)t}$. Свободный член g выражается через первичные источники J_0 и $\varepsilon^\pm$:

$$g(z) = e^{-Az} J_0 + \int_0^z e^{-A(z-t)} \varepsilon^+(t) dt + \int_z^r e^{-A(t-z)} \varepsilon^-(t) dt.$$

В случае задачи анизотропного рассеяния без изменения энергии условие симметрии (2) выполняется, когда индикатриса является четной функцией. При $r = \infty$ уравнение (6) превращается в операторное уравнение Винера–Хопфа

$$S(z) = g(z) + \int_0^\infty e^{-A|z-t|} \check{R}S(t) dt. \quad (7)$$

Чтобы получить наглядное представление о степени сложности этого уравнения, рассмотрим случай, когда w является скалярной величиной (энергией или частотой

частицы). Тогда (7) представляет собой интегральное уравнение с четырехкратным интегралом.

Переход к интегральной форме уравнения переноса полезен с разных точек зрения. Математически корректное изучение интегрального уравнения (7) значительно легче, чем уравнения в дифференциальной форме; есть возможность достаточно просто выбрать функциональные пространства, в которых действуют соответствующие операторы и в которых строится решение задачи; можно получить априорные оценки для погрешности при использовании приближенных методов решения.

4. О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ (6)

Введем следующие пространства функций $f(z, \omega, w)$, определенных на $(0, r) \times Q$, в которых будет рассмотрено интегральное уравнение (6):

1) весовое пространство $L_1((0, r) \times Q, a)$ суммируемых функций с нормой

$$\|f\| = \int_{(0,r) \times Q} |f(z, \omega, w)| a(\omega, w) dz d\omega dw = \int_0^r \eta A |f(z)| dz < \infty; \quad (8)$$

2) пространство $M((0, r) \times Q)$ функций, ограниченных (в существенном) на множестве $(0, r) \times Q$, с нормой

$$\|f\| = \text{ess sup } |f(z, \omega, w)|;$$

3) гильбертово пространство $L_2((0, r) \times Q, a)$ функций с нормой

$$\|f\| = \left(\int_{(0,r) \times Q} f^2(z, \omega, w) a(\omega, w) dz d\omega dw \right)^{1/2} < +\infty.$$

Далее под E_r мы будем подразумевать одно из этих пространств.

Рассмотрим фигурирующий в уравнении (6) интегральный оператор $\widehat{K}_r$ с ядерной функцией $\check{K}(z) = e^{-A|z|} \check{R}$:

$$(\widehat{K}_r f)(z) = q(z) = \int_0^r e^{-A|z-t|} \check{R} f(t) dt, \quad r \leq \infty. \quad (9)$$

В любом из пространств E_r имеет место оценка

$$\|\widehat{K}_r\| \leq \lambda. \quad (10)$$

Проверим справедливость оценки в случае пространства $L_1((0, r) \times Q, a)$. Пусть функция $f \in L_1((0, r) \times Q, a)$. Из определения (9) с учетом (8) получим

$$\begin{aligned} \|\widehat{K}_r f\| &= \eta A \int_0^r |q(z)| dz \leq \eta \int_0^r A \left(\int_{-r}^r e^{-A|y|} dy \right) \check{R} |f(t)| dt = \\ &= 2\eta \int_0^r (\check{I} - e^{-Ar}) \check{R} |f(t)| dt, \end{aligned} \quad (11)$$

поэтому

$$\|\widehat{K}_r f\| \leq 2\eta \int_0^r \check{R} |f(t)| dt = \lambda \eta \int_0^r A |f(t)| dt = \lambda \|f\|,$$

что и доказывает оценку (10) в $L_1((0, r) \times Q, a)$.

Используя свойство симметрии (4), можно получить оценку (10) в пространстве $M((0, r) \times Q)$, а в пространстве $L_2((0, r) \times Q, a)$ эта оценка следует из интерполяционной теоремы Рисса. Пространство $L_2((0, r) \times Q, a)$ представляет интерес в задаче переноса излучения в спектральных линиях.

Из оценки (10) следует, что уравнение (6) однозначно разрешимо в пространстве E_r , если $g \in E_r$ и $\lambda < 1$. На основании соотношения (11) при некоторых дополнительных условиях удастся доказать, что оператор $\hat{K}_r$ является сжимающим в E_r также при $r < \infty$, $\lambda = 1$. Так обстоит дело, когда функция α “оторвана” от нуля: $\alpha(\omega) \geq \alpha_0 > 0$ для всех ω . Консервативный случай уравнения (6) является особым. Имеется немало результатов, связанных с разрешимостью скалярного или матричного уравнения Винера–Хопфа в консервативном случае (см., например, работу [8]).

5. УРАВНЕНИЕ АМБАРЦУМЯНА

Перейдем к построению решения уравнения (7). Под *операторной алгебраизацией* задачи переноса или ее отдельных фрагментов мы будем подразумевать сведение к таким линейным или нелинейным операторным уравнениям, в которых геометрическая переменная z либо отсутствует, либо участвует в качестве параметра. Подходы, излагаемые в настоящей работе, позволяют достичь большой степени операторной алгебраизации при решении рассматриваемых задач переноса. Ключевую роль в этом вопросе играет уравнение Амбарцумяна

$$A\check{\rho} + \check{\rho}A = (\check{I} + \check{\rho})\check{R}(\check{I} + \check{\rho}). \quad (12)$$

Рассмотрим вкратце вопрос разрешимости этого уравнения, следуя работам [7] и [8].

Под основным решением уравнения (12) понимается решение $\check{\rho}$, которое является пределом итерационной процедуры, определяемой с помощью равенств

$$\rho_0 = 0, \quad A\check{\rho}_{n+1} + \check{\rho}_{n+1}A = (I + \check{\rho}_n)\check{R}(I + \check{\rho}_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (13)$$

Рекуррентное построение последовательности $\check{\rho}_n$ осуществляется путем решения уравнений вида

$$A\check{X} + \check{X}A = \check{B}. \quad (14)$$

Если $\check{B}$ – интегральный оператор с ядром $B(\omega, w, \omega', w')$, то $\check{X}$ – интегральный оператор с ядром

$$X(\omega, w, \omega', w') = \frac{B(\omega, w, \omega', w')}{a(\omega, w) + a(\omega', w')}.$$

Итерационная процедура (13) определяет последовательность $\check{\rho}_n$ интегральных операторов с ядрами $\rho_n(\omega, w, \omega', w') \geq 0$, которая монотонно возрастает по n . Используя соотношения (1) и (2), индукцией по n получаем оценку $\eta\check{\rho}_n \leq \lambda\eta$, т. е.

$$\int_{\Omega \times W} \rho_n(\omega, w, \omega', w') d\omega dw \leq \lambda, \quad (15)$$

и свойство симметрии

$$(\omega n)\rho_n(\omega, w, \omega', w') = (\omega' n)\rho_n(\omega', w', \omega, w). \quad (16)$$

Используя эти формулы, мы можем показать, что последовательность $\check{\rho}_n$ монотонно сходится к интегральному оператору $\check{\rho}$, действующему в пространствах $E = E_\infty$, причем сходимость является сильной в весовом пространстве $L_1(Q, a)$ и слабой в пространстве $M(Q)$. Ядро ρ оператора $\check{\rho}$ обладает следующими свойствами, вытекающими из формул (15) и (16):

$$\int_{\Omega \times W} \rho(\omega, w, \omega', w') d\omega dw \leq \lambda,$$

другими словами, $\eta\check{\rho} \leq \lambda\eta$, и

$$(\omega n)\rho(\omega, w, \omega', w') = (\omega' n)\rho(\omega', w', \omega, w).$$

Оператор $\check{\rho}$ имеет следующий физический смысл: он является оператором отражения излучения из полупространства.

6. ФАКТОРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ (7)

С помощью оператора $\check{\rho}$ можно построить треугольную (формально вольтеррову) факторизацию уравнения (7) на полупрямой. Такая возможность была использована при решении проблемы Милна с анизотропным рассеянием в статье [8].

Рассмотрим следующую факторизацию:

$$\hat{I} - \hat{K} = (\hat{I} - \hat{V}_-)(\hat{I} - \hat{V}_+), \quad (17)$$

где $\hat{I}$ – единичный оператор, который действует в пространствах вектор-функций $f(z, \omega, w)$, оператор $\hat{K} = \hat{K}_\infty$ определяется формулой (9), а $\hat{V}_\pm$ – действующие в пространствах E_∞ искомые формально вольтерровы операторы свертки:

$$(\hat{V}_+ f)(z) = \int_0^z \check{V}_+(z-t)f(t) dt, \quad (\hat{V}_- f)(z) = \int_z^\infty \check{V}_-(t-z)f(t) dt, \quad z \geq 0. \quad (18)$$

Оператор-функции $\check{V}_\pm(z)$, фигурирующие в этих формулах в качестве ядерных функций, определяются из следующих нелинейных уравнений факторизации [8]:

$$\begin{aligned} \check{V}_-(z) &= e^{-Az} \check{R} + \int_0^\infty \check{V}_-(z+t) \check{V}_+(t) dt, \\ \check{V}_+(z) &= e^{-Az} \check{R} + \int_0^\infty \check{V}_-(t) \check{V}_+(z+t) dt, \end{aligned} \quad z > 0. \quad (19)$$

Прямой подстановкой (формально) проверяется, что данная система имеет решение вида

$$\check{V}_+(z) = (\check{I} + \check{\rho})e^{-Az} \check{R}, \quad \check{V}_-(z) = e^{-Az} (\check{I} + \check{\rho}) \check{R}, \quad z > 0, \quad (20)$$

где ρ – основное решение уравнения Амбарцумяна (12). Здесь мы используем тот факт, что решение уравнения (14) задается формулой

$$\check{X} = \int_0^\infty e^{-At} B e^{-At} dt.$$

Оценим нормы операторов $\widehat{V}_{\pm}$, заданных формулами (18). На этом пути будет дано некоторое обоснование того, что эти операторы действуют в пространствах E_{∞} . Аналогично выводу неравенства (10) с использованием формул (20) получается оценка $\|\widehat{V}_{-}\| \leq \lambda$ для нормы в пространстве $L_1((0, \infty) \times Q, a)$ оператора $\widehat{V}_{-}$, заданного в (18). Аналогично, эта оценка в случае пространства $M((0, \infty) \times Q)$ переносится на оператор $\widehat{V}_{+}$: мы имеем $\|\widehat{V}_{+}\| \leq \lambda$ в пространстве $M((0, \infty) \times Q)$.

Из обратимости операторов $\widehat{I} - \widehat{K}$ и $\widehat{I} - \widehat{V}_{-}$ в $L_1((0, \infty) \times Q, a)$ следует обратимость оператора $\widehat{I} - \widehat{V}_{+}$ в этом пространстве. Аналогичным образом делаем вывод об обратимости оператора $\widehat{I} - \widehat{V}_{-}$ в пространстве $M((0, \infty) \times Q)$.

Итак, в диссипативном случае $\lambda < 1$ операторы $I - \widehat{V}_{\pm}$ обратимы в пространствах E_{∞} , и тем самым имеет место каноническая факторизация (17).

7. РЕЗОЛЬВЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ

Для применения факторизации (17) к решению уравнения (7) в диссипативном случае достаточно построить обратные операторы $(I - \widehat{V}_{\pm})^{-1} = I + \widehat{\Phi}_{\pm}$, где

$$(\widehat{\Phi}_{+}f)(z) = \int_0^z \check{\Phi}_{+}(z-t)f(t) dt, \quad (\widehat{\Phi}_{-}f)(z) = \int_z^{\infty} \check{\Phi}_{-}(t-z)f(t) dt, \quad z > 0.$$

Резольвентные оператор-функции $\check{\Phi}_{\pm}$ определяются из операторных уравнений типа Вольтерра

$$\check{\Phi}_{\pm}(z) = \check{V}_{\pm}(z) + \int_0^z \check{V}_{\pm}(z-t)\check{\Phi}_{\pm}(t) dt. \quad (21)$$

Из обратимости операторов $I - \widehat{V}_{\pm}$ в пространствах E_{∞} вытекает существование решений $\check{\Phi}_{\pm}$ уравнений (21) (в диссипативном случае):

$$\check{\Phi}_{-}(z) = e^{-G_{-}z}(\check{I} + \check{\rho})\check{R}, \quad \check{\Phi}_{+}(z) = (\check{I} + \check{\rho})e^{-G_{+}z}\check{R}, \quad (22)$$

где

$$G_{+} = A - \check{R}(\check{I} + \check{\rho}), \quad G_{-} = A - (\check{I} + \check{\rho})\check{R}.$$

Мы ограничимся формальным выводом формул (22). Рассмотрим второе из уравнений (21) (относительно $\check{\Phi}_{-}$). Подставляя вместо $\check{V}_{-}$ его выражение (20), получаем

$$\check{\Phi}_{-}(z) = e^{-Az}(\check{I} + \check{\rho})\check{R} + \int_0^z e^{-A(z-t)}(\check{I} + \check{\rho})\check{R}\check{\Phi}_{-}(t) dt, \quad z > 0. \quad (23)$$

Умножая обе части этого уравнения на оператор e^{Az} и дифференцируя по z , приходим к уравнению

$$e^{Az}A\check{\Phi}_{-}(z) + e^{Az}\frac{d\check{\Phi}_{-}(z)}{dz} = e^{Az}(\check{I} + \check{\rho})\check{R}\check{\Phi}_{-}(z)$$

с начальным условием (вытекающим из (23))

$$\check{\Phi}_{-}(0) = (\check{I} + \check{\rho})\check{R}.$$

Отсюда легко получаем выражение из (22) для $\check{\Phi}_{-}$. Формула из (22) для $\check{\Phi}_{+}$ получается сходным образом.

По формулам (22) операторы $\check{F}_{\pm}$ определяются через операторы $e^{-G_{\pm}z}$. Такие семейства операторов образуют аналитические полугруппы. Эти полугруппы неравномерны, поскольку их генераторы $-G_{\pm}$ не являются ограниченными операторами в пространствах E . Оператор $e^{-G_{+}z}$ имеет следующий физический смысл: в условиях задачи (3)–(5) (на полупрямой) без внутренних источников этот оператор осуществляет отображение $J_0 \rightarrow J_{+}(z)$. При тех же условиях полугруппа операторов $e^{-G_{-}z}$ осуществляет отображение $J^{-}(z) \rightarrow J^{-}(0)$. Эта полугруппа была построена в работе [6] из физических соображений. Аналогичная полугруппа для конечномерной модели задач переноса (описываемой краевой задачей для системы дифференциальных уравнений) была рассмотрена в работе [10]. Заметим, что полугруппы операторов $e^{-G_{\pm}z}$ имеют смысл также в консервативном случае $\lambda = 1$.

8. ФАКТОРИЗАЦИЯ НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ

Пусть $\hat{T}$ – оператор на всей прямой, заданный равенством

$$(\hat{T}f)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A|z-t|} \check{R}f(t) dt.$$

Рассмотрим следующие две факторизации:

$$I - \hat{T} = (I - \hat{V}_{-})(I - \hat{V}_{+}), \quad I - \hat{T} = (I - \hat{U}_{+})(I - \hat{U}_{-}), \quad (24)$$

где для $-\infty < z < \infty$

$$\begin{aligned} (\hat{V}_{+}f)(z) &= \int_{-\infty}^z \check{V}_{+}(z-t)f(t) dt, & (\hat{V}_{-}f)(z) &= \int_z^{\infty} \check{V}_{-}(t-z)f(t) dt, \\ (\hat{U}_{+}f)(z) &= \int_{-\infty}^z \check{U}_{+}(z-t)f(t) dt, & (\hat{U}_{-}f)(z) &= \int_z^{\infty} \check{U}_{-}(t-z)f(t) dt. \end{aligned}$$

Используя нелинейные уравнения факторизации вида (19) для задач (24), можно убедиться, что ядерные оператор-функции $\check{V}_{\pm}$ совпадают с одноименными функциями (20), дающими факторизацию (17) на полупрямой, а ядерные оператор-функции $\check{U}^{\pm}$ суть $\check{U}^{\pm} = \check{V}^{\mp}$.

Факторизации (24) можно использовать при решении задач переноса в бесконечной среде. В настоящей работе мы рассматриваем их с точки зрения применения к решению уравнения (6) на конечном промежутке.

9. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ: МЕТОД ДВУСТОРОННЕГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

Решение уравнения переноса (6) в слое конечной толщины сложнее решения уравнения в полупространстве. Причиной этого является наличие двух граничных плоскостей у слоя конечной толщины. В работе [6] был найден способ использования уравнения Амбарцумяна (12) для полупространства при построении операторов отражения и прохождения слоя конечной толщины.

В работе [11] предложен метод двустороннего продолжения решения задач переноса, сводящихся к скалярному интегральному уравнению

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_0^r K(\tau-t)S(t) dt, \quad r < \infty, \quad (25)$$

с четной ядерной функцией K , представленной в виде суперпозиции экспонент:

$$K(\tau) = \int_a^b e^{-\tau s} d\sigma(s) dt, \quad 0 \leq a < b \leq \infty, \quad (26)$$

где σ – неубывающая функция, удовлетворяющая условию

$$2 \int_a^b \frac{d\sigma(s)}{s} \leq 1.$$

К уравнению (25) сводится ряд известных задач теории переноса. В данном случае для решения задачи требуется решить два (скалярных) интегральных уравнения с ганкелевыми (суммарными) ядрами.

Метод двустороннего продолжения допускает распространение на широкие классы интегральных и дискретных уравнений свертки. Опишем вкратце способ его применения к уравнению (6) при $r < \infty$. Рассматриваются два продолжения $f^\pm$ решения S уравнения (6):

$$\begin{aligned} f^+(z) &= \int_0^r e^{-A|z-t|} \check{R}S(t) dt, & z > r, \\ f^-(z) &= \int_0^r e^{-A|z-t|} \check{R}S(t) dt, & z < 0. \end{aligned}$$

Если заданы $\check{\rho}$ и e^{-G-z} , то задача сводится к решению уравнений

$$F^\pm(z) = q^\pm(z) \mp \int_0^\infty U(z+t+r) F^\pm(t) dt, \quad z > 0, \quad (27)$$

где $U(z) = e^{-G-z}(I - \rho^2)R$. Функции $F_\pm$ простым образом связаны с $f_\pm$, а функции $q^\pm$ выражаются через исходный свободный член g .

Обратим внимание на следующие особенности уравнений (27). Ядро $U(z+t+r)$ является универсальным в том смысле, что зависит от r только через слагаемое в аргументе. Норма интегрального оператора с ядром $U(z+t+r)$ убывает с возрастанием r , что облегчает решение уравнений (27) при больших значениях r . Полугрупповое свойство семейства операторов e^{-G-z} позволяет разделить переменные в уравнениях (27): имеем

$$F^\pm(z) = q^\pm(z) \mp e^{-G-z} H^\pm, \quad (28)$$

где

$$H^\pm = \int_0^\infty e^{-G-t} e^{-G-r} (I - \rho^2) R F^\pm(t) dt.$$

Применяя к обеим частям уравнения (28) оператор $e^{-G-t} e^{-G-r} (I - \rho^2) R$ и интегрируя по z от 0 до ∞ , приходим к следующим линейным алгебраическим уравнениям относительно $H^\pm$:

$$H^\pm = \gamma^\pm \mp B H^\pm,$$

где

$$\begin{aligned} B &= \int_0^\infty e^{-G-z} e^{-G-r} (I - \rho^2) R e^{G-z} dz, \\ \gamma^\pm &= \int_0^\infty e^{-G-z} e^{-G-r} (I - \rho^2) R q^\pm(z) dz. \end{aligned}$$

Оператор B можно определить из уравнения $G_- B + B G_- = e^{-G-r} (I - \rho^2) R$.

Итак, использование полугруппового свойства семейства операторов $e^{-G-\tau}$ приводит к полной алгебраизации уравнений (27).

В случае уравнения (25) с ядром (26) аналогичное разделение переменных не имеет места, поскольку переход от исходного уравнения переноса к уравнению (25) (с целью упрощения задачи) “портит” полугрупповое свойство ядерной функции. По этой причине применение метода двустороннего продолжения к уравнению (25) требует решения соответствующего характеристического уравнения.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного Комитета по науке Министерства образования и науки Республики Армения (научный проект № SCS 13-1A271).

Список литературы

- [1] С. Чандрасекар, *Перенос лучистой энергии*, ИЛ, М., 1953.
- [2] В. В. Соболев, *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет*, Гостехиздат, М., 1956.
- [3] Д. И. Нагирнер, *Лекции по теории переноса излучения*, Изд-во С.-Петерб. ун-та, СПб., 2001.
- [4] В. С. Владимиров, *ПММ*, **19**:3 (1955), 315–324.
- [5] В. С. Владимиров, “Математические задачи односкоростной теории переноса частиц”, *Тр. МИАН СССР*, **61**, Изд-во АН СССР, М., 1961, 3–158.
- [6] Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, *Докл. АН СССР*, **217**:3 (1974), 533–535.
- [7] Н. Б. Енгибарян, Э. А. Мелконян, “Перенос излучения в плоском слое и уравнения Амбарцумяна”, *Принцип инвариантности и его приложения*, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1989, 326–333.
- [8] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, *Итоги науки и техн. Сер. Матем. анализ*, **22**, ВИНТИ, М., 1984, 175–244.
- [9] В. А. Амбарцумян, *Научные труды*, **1**, ред. В. В. Соболев, Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1960.
- [10] A. Shimizu, K. Aoki, *Application of Invariant Embedding to Reactor Physics*, Acad. Press, New York, 1972.
- [11] Н. Б. Енгибарян, А. Г. Барсегян, *Астрофизика*, **55**:4 (2012), 627–639.

Поступила в редакцию 24.02.2014,
после доработки 13.03.2014