Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Джимбо, Т. Мива, Ф. А. Смирнов, Операторы рождения для спиновой цепочки Замолодчикова–Фатеева, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 1, 45–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8669>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 02:41:04

© 2014 г. М. Джимбо*, Т. Мива†, Ф. А. Смирнов‡

ОПЕРАТОРЫ РОЖДЕНИЯ ДЛЯ СПИНОВОЙ ЦЕПочки ЗАМОЛОДЧИКОВА–ФАТЕЕВА

В предыдущих работах изучалась проблема построения такого базиса в пространстве локальных операторов для анизотропной спиновой XXZ -цепочки спина $1/2$, в котором вакуумные средние имеют простой вид. Для этого были введены фермионные операторы рождения. В настоящей работе эта конструкция обобщена на случай спина 1. С помощью некоторой версии процедуры размножения найдены два дублета фермионных и один триплет бозонных операторов рождения. Доказано, что получающийся действием этих операторов базис удовлетворяет двойственным редуцированным квантовым уравнениям Книжника–Замолотчикова.

Ключевые слова: точно решаемые модели, магнетик Гейзенберга, корреляционные функции.

DOI: 10.4213/tmf8669

*Посвящается Людвигу Дмитриевичу Фаддееву
по случаю его восьмидесятилетия*

1. ВВЕДЕНИЕ

Боос и Корепин в серии работ [1], [2] выдвинули гипотезу о том, что корреляционные функции для бесконечной спиновой XXX -цепочки спина $1/2$ могут быть представлены в виде сумм произведений дзета-функции Римана, вычисленной в нечетных целых точках с рациональными коэффициентами. Это утверждение представляет собой существенный прогресс по сравнению с представлением корреляционных функций в виде кратных интегралов [3], [4]. Позднее эта гипотеза была обобщена на случай анизотропной XXZ -цепочки. Рассмотрение неоднородного случая [5] оказалось очень полезным.

*Department of Mathematics, Rikkyo University, Toshima-ku, Tokyo, Japan.
E-mail: jimbo@m.rikkyo.ac.jp

†Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University, Kyoto, Japan.
E-mail: tmiwa@math.kyoto-u.ac.jp

‡Sorbonne University, UPMC Univ Paris, CNRS, LP THE, Paris, France.
E-mail: smirnov@lpthe.jussieu.fr

Доказательство гипотезы Бооса–Корепина было изначальной мотивацией для серии работ Бооса, Такеямы и авторов настоящей работы [6]–[9]. В заключительной работе этой серии [10] гипотеза была доказана в значительно более общей форме. Именно, было показано, что корреляционные функции для XXZ -цепочки в обобщенном (в смысле [11]) ансамбле Гиббса выражаются через коэффициенты Тейлора двух функций, зависящих соответственно от одной и двух переменных. Эти функции определяются только термодинамическими характеристиками обобщенного ансамбля Гиббса. Мы полагаем, однако, что конструкция, использованная при доказательстве этого утверждения, намного важнее, чем исходная гипотеза сама по себе. Объясним это.

Для начала зафиксируем терминологию. Вместо того чтобы работать с XXZ -цепочкой, удобно рассматривать эквивалентную шестивершинную модель. В такой формулировке объект, изучавшийся в работе [10], представляет собой статистическую сумму на бесконечном цилиндре с дефектом, последний интерпретируется как вставка квазилокального оператора. Ассоциируя с каждой такой вставкой соответствующую корреляционную функцию, мы получаем функционал Z , определенный на пространстве квазилокальных операторов. Мы называем образующую цилиндра пространственным направлением, а его направляющую – мацубаровским направлением.

Основной результат, полученный в работе [9], состоит в правильном описании пространства квазилокальных полей. Именно, построены три однопараметрических семейства операторов: бозонное семейство $t^*(\zeta)$ и два фермионных семейства $b^*(\zeta)$ и $c^*(\zeta)$. Так как бозонный оператор $t^*(\zeta)$ довольно тривиален, мы называем эту конструкцию фермионной. Нас более всего интересуют квазилокальные операторы спина 0. Они получаются действием операторов b^* и c^* в равном количестве и произвольным числом операторов t^* на “первичное поле” $q^{2\alpha S(0)}$ (это обозначение объяснено в разделе 2). Например, выражение

$$b^*(\zeta_1)c^*(\zeta_2)(q^{2\alpha S(0)}) \quad (1.1)$$

следует понимать не как один квазилокальный оператор, а как семейство квазилокальных операторов разной длины, получаемых разложением Тейлора по $\zeta_1^2 - 1$, $\zeta_2^2 - 1$. С другой стороны, значения функционала Z на (1.1) дается ранее упомянутой функцией двух переменных $\omega(\zeta_1, \zeta_2)$. Эта ситуация напоминает конформную теорию поля (КТП): средние операторов разной длины описываются универсальной формулой. Это наблюдение объясняет упорство, с которым мы старались связать фермионную конструкцию с КТП в 2008–2009 годах.

В совместной работе с Боосом [12] мы показали, что фермионная конструкция допускает скейлинговый предел. В результате получается фермионный базис для КТП с центральным зарядом, меньшим единицы. При этом функционал Z описывает трехточечные функции. Все это имеет далеко идущие последствия. Наша конструкция допускает обобщение на случай неоднородной в обоих направлениях модели. В скейлинговом пределе это дает одноточечные функции в модели синус-Гордон. Мы используем результаты, полученные в КТП, для нормировки операторов. Этот шаг необходим для приложения одноточечных функций к вычислению ультрафиолетовой асимптотики корреляционных функций по операторному произведению.

Все это объяснено в деталях в работах [13], [14]. Таким образом, фермионный базис позволяет вычислить одноточечные функции для модели синус-Гордон. Важность этой задачи подчеркивалась в работе [15]. В дальнейшем Негро и один из авторов настоящей работы показали [16], [17], что фермионный базис дает решение соотношений отражения для теории Лиувилля [18]. Это еще одно свидетельство в пользу фермионного базиса.

Еще одно обстоятельство заслуживает внимания, поскольку является общим для всех интегрируемых моделей. Функция $\omega(\zeta_1, \zeta_2)$ дает не только значение функционала Z на семействе квазилокальных операторов (1.1), но также значение аналогичного функционала для неоднородной пространственной цепочки со всего лишь двумя узлами и с прежним мацубаровским направлением. Все это обсуждалось в работах [9], [10], но мы решили повторить соответствующие рассуждения в разделе 2 в более самосогласованной форме.

Перейдем к предмету настоящей работы. Представляется интересным обобщить наши предыдущие результаты на интегрируемую анизотропную спиновую цепочку спина 1, которая была найдена Замолотчиковым и Фатеевым [19], или, говоря на более близком нам языке, на 19-вершинную модель классической статистической физики. Мы избегаем использования термина XXZ -модель спина 1, так как, будучи популярным среди специалистов по интегрируемым моделям, он может ввести в заблуждение общую аудиторию физиков. Первое, что следует сделать в этом направлении, – это обобщить гипотезу Бооса–Корепина, т. е. показать, что корреляционные функции на конечном числе узлов не требуют кратных интегралов, которые становятся совершенно необозримыми в этом случае [20]. В существенном это было сделано Клюмпером, Нарвахом и Сузуки в недавней работе [21]. В действительности конструкция [10] позволяет рассматривать случай спина 1 в мацубаровском направлении. Поэтому единственное, что нужно сделать, – это применить процедуру размножения в пространственном направлении. Это требует доказательства сокращения некоторых сингулярностей. В работе [21] это делается на примерах. На физическом уровне строгости сокращение должно иметь место, так как рассматривается изначально хорошо определенный объект. Таким образом, работа [21] дает солидное свидетельство того, что корреляционные функции в бесконечном мацубаровском объеме выражаются в терминах некоторых элементарных функций, дзета-функции не появляются в этом случае.

Тем не менее нам интересно обобщение нашей предыдущей конструкции. Именно, мы хотим получить конструкцию пространства квазилокальных операторов в терминах, зависящих от параметров семейств операторов, аналогичных фермионам для спина $1/2$. Наши цели включают в себя описание суперсимметричной КТП, построение одноточечных функций для суперсимметричной модели синус-Гордон, решение соотношений отражения для суперсимметричной модели Лиувилля. В настоящей работе мы делаем скромный шаг в этом направлении: мы показываем, что на решетке пространство квазилокальных операторов порождается бозоном $\mathbf{t}^*(\zeta)$, имеющим, как и в предыдущем случае, простую природу, четырьмя фермионами $\mathbf{b}^*(\zeta)$, $\bar{\mathbf{b}}^*(\zeta)$, $\mathbf{c}^*(\zeta)$, $\bar{\mathbf{c}}^*(\zeta)$ и тремя бозонами $\mathbf{j}^+(\zeta)$, $\mathbf{j}^0(\zeta)$, $\mathbf{j}^-(\zeta)$. Точнее, как и для спина $1/2$, мы должны рассматривать разложения Тейлора этих операторов по $\zeta^2 - 1$.

Символически операторы рождения для спина 1 получаются из операторов рождения для спина $1/2$ по формулам

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}^+(\zeta) &= b^*(\zeta q^{1/2})b^*(\zeta q^{-1/2}), \\
 \mathbf{j}^-(\zeta) &= -c^*(\zeta q^{1/2})c^*(\zeta q^{-1/2}), \\
 \mathbf{j}^0(\zeta) &= b^*(\zeta q^{1/2})c^*(\zeta q^{-1/2}) + c^*(\zeta q^{1/2})b^*(\zeta q^{-1/2}), \\
 \mathbf{b}^*(\zeta) &= b^*(\zeta q^{1/2})t^*(\zeta q^{-1/2}) + b^*(\zeta q^{-1/2}), \\
 \bar{\mathbf{b}}^*(\zeta) &= b^*(\zeta q^{1/2}) + t^*(\zeta q^{1/2})b^*(\zeta q^{-1/2}), \\
 \mathbf{c}^*(\zeta) &= c^*(\zeta q^{1/2})t^*(\zeta q^{-1/2}) + c^*(\zeta q^{-1/2}), \\
 \bar{\mathbf{c}}^*(\zeta) &= c^*(\zeta q^{1/2}) + t^*(\zeta q^{1/2})c^*(\zeta q^{-1/2}).
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Точный смысл этих формул проясняется в п. 3.2. В действительности мы сначала определяем соответствующие операторы для неоднородной цепочки с эволюционными параметрами, ассоциированными с каждым узлом, а затем используем их для определения операторов рождения для однородного случая.

Нашим главным средством служит конструкция матрешки (см. формулы (3.3), (3.4) ниже). Относительно определений (1.2) есть два важных вопроса. Во-первых, надо доказать, что комбинации в правых частях (1.2) хорошо определены. Это относится к оператору $\mathbf{j}^0(\zeta)$, для которого каждый член в правой части сингулярен и только сумма имеет смысл. Во-вторых, произведение операторов рождения в случае спина 1 имеет сингулярности на диагонали. Эта новая черта, отсутствовавшая для спина $1/2$, приводит к проблемам с определением операторов рождения для однородной цепочки. Мы оказываемся вынуждены вычитать сингулярности, заменяя наивное произведение нормально упорядоченным. Существует некоторая неоднозначность в выборе функций, использующихся при вычитании. Мы фиксируем эту неоднозначность, требуя, чтобы в случае бесконечного мацубаровского направления для всех квазилокальных операторов, построенных действием наших операторов рождения, средние обращались в нуль. Такое требование необходимо для согласованности с КТП, как объяснено в работе [12].

Средние, по существу, даются функцией $\omega(\zeta, \xi)$. Наиболее естественный способ удовлетворить вышеупомянутому требованию состоит в вычислении этой функции в пределе бесконечной мацубаровской длины. Для этого могут быть использованы некоторые формулы из работы [21]. Мы оставляем исследование функции $\omega(\zeta, \xi)$ для другой публикации, предпочитая иной, интересный сам по себе, способ.

Рассмотрим предел бесконечного мацубаровского объема для пространственной цепочки с неоднородностями на конечном интервале. Известно, что матрица плотности в этом случае удовлетворяет редуцированным квантовым уравнениям Книжника–Замолодчикова (кКЗ) [3]. Мы покажем, что наши операторы рождения удовлетворяют дуальным редуцированным уравнениям кКЗ. Этот факт позволяет зафиксировать нормировку в случае бесконечного мацубаровского объема.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 объясняется, что для квазилокальных операторов некоторого вида вычисление средних на бесконечной однородной пространственной цепочке может быть сведено к вычислению средних для конечной пространственной цепочки. В разделе 3 мы кратко напоминаем нашу конструкцию для спина $1/2$ и описываем процедуру размножения, позволяющую

получить операторы рождения для спина 1. В разделе 4 показано, что операторы рождения удовлетворяют редуцированному уравнению кКЗ. Раздел 5 содержит краткое заключение. Приложение А посвящено краткому обзору нашей предыдущей конструкции. Приложение Б содержит доказательство некоторого технического утверждения.

Повсеместно в этой работе мы фиксируем $q = e^{\pi i \nu}$, где $0 < \nu < 1$.

2. ФУНКЦИОНАЛ СРЕДНЕГО НА КВАЗИЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ДЛЯ КВАНТОВОЙ ЦЕПОЧКИ: “БЕСКОНЕЧНАЯ ОДНОРОДНАЯ” ИЗ “КОНЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ”

Начнем с простой конструкции, которую мы поясним для вершинных моделей, связанных с алгеброй $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, но которая, по существу, не зависит от конкретной модели. Наша цель состоит в том, чтобы построить семейство квазилокальных операторов на *бесконечной однородной* цепочке, используя индуктивный предел матриц монодромии. Далее в этой работе мы используем нормированный след Tr , определенный на d -мерном пространстве как

$$\text{Tr}(x) = \frac{1}{d} \text{tr}(x),$$

где $\text{tr}(x)$ – обычный след.

Рассмотрим вершинную модель на квадратной решетке на бесконечном цилиндре. Узлы вдоль образующей (*пространственное направление*) нумеруются индексом j , а узлы вдоль направляющей (*мацубаровское направление*) нумеруются индексом $\mathbf{m}$. Полное число узлов в мацубаровском направлении обозначается $\mathbf{n}$. Пусть больцмановские веса даются R -матрицей в тензорном произведении двух эволюционных представлений квантовой группы $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Мы рассматриваем однородную в пространственном направлении модель, так что с каждым пространственным узлом ассоциируется d -мерное представление с эволюционным параметром, равным единице. В мацубаровском направлении допускается полная неоднородность: представления могут иметь разные размерности $d_{\mathbf{m}}$ и разные эволюционные параметры $\tau_{\mathbf{m}}$. В дальнейшем мы будем использовать вспомогательную модель, меняя пространственную цепочку на конечную неоднородную при прежних мацубаровских данных.

Мы рассматриваем статистическую сумму на цилиндре с локальным оператором, вставленным в пространственную цепочку. Дадим точное определение.

Рассмотрим конечномерную алгебру $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ и ее аффинизацию $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$. Определим следующие пространства:

$$\mathfrak{H}_{\mathbf{S}} = \bigotimes_{j=-\infty}^{\infty} \mathbb{C}^d, \quad \mathfrak{H}_{\mathbf{M}} = \bigotimes_{\mathbf{m}=1}^{\mathbf{n}} \mathbb{C}^{d_{\mathbf{m}}}.$$

Первое из определений кажется довольно проблематичным, но мы сможем избежать связанные с ним сложности, работая скорее с операторами, действующими на $\mathfrak{H}_{\mathbf{S}}$, чем с самим этим пространством. Среди этих операторов есть хорошо определенные квазилокальные операторы, которые мы собираемся определить. Обозначим через H картановский генератор $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ и рассмотрим комплексное число α . Обозначим через H_j картановский генератор, действующий на $V_j = \mathbb{C}^d$: j -й копии тензорного произведения в пространственном направлении. Мы будем рассматривать

“примарные операторы”

$$q^{\alpha H(0)}, \quad H(k) = \sum_{j=-\infty}^k H_j$$

и их потомков

$$q^{\alpha H(0)} \mathcal{O},$$

где оператор $\mathcal{O}$ действует нетривиально только на конечном числе узлов. Такие операторы мы называем квазилокальными.

Рассмотрим еще одно комплексное число κ , которое мы будем спаривать с полным спином

$$H(\infty) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} H_j.$$

Статистическая сумма со вставкой квазилокального оператора определяется следующим образом. Рассмотрим матрицу монодромии в мадубаровском направлении

$$T_{j,\mathbf{M}}(\zeta) = \prod_{\mathbf{m}=1}^{\mathbf{n}} R_{j,\mathbf{m}}\left(\frac{\zeta}{\tau_{\mathbf{m}}}\right) = R_{j,\mathbf{n}}\left(\frac{\zeta}{\tau_{\mathbf{n}}}\right) \cdots R_{j,1}\left(\frac{\zeta}{\tau_1}\right)$$

и прямоугольную пространственно-мадубаровскую матрицу монодромии

$$T_{\mathbf{S},\mathbf{M}} = \prod_{j=-\infty}^{\infty} T_{j,\mathbf{M}}(1) = \dots T_{-1,\mathbf{M}}(1) T_{0,\mathbf{M}}(1) T_{1,\mathbf{M}}(1) \dots$$

Пусть $T_{\mathbf{M}}(\zeta, \kappa) = \text{Tr}_j(T_{j,\mathbf{M}}(\zeta) q^{\kappa H_j})$ обозначает соответствующую трансфер-матрицу (напомним, что мы используем нормированный след). Главный объект нашего исследования есть

$$Z_{\mathbf{n}}^{\kappa} \{q^{\alpha H(0)} \mathcal{O}\} = \frac{\text{Tr}_{\mathbf{M}} \text{Tr}_{\mathbf{S}} (T_{\mathbf{S},\mathbf{M}} q^{\kappa H(\infty) + \alpha H(0)} \mathcal{O})}{\text{Tr}_{\mathbf{M}} \text{Tr}_{\mathbf{S}} (T_{\mathbf{S},\mathbf{M}} q^{\kappa H(\infty) + \alpha H(0)})}. \quad (2.1)$$

Это определяет линейный функционал на пространстве квазилокальных операторов. Мы предполагаем без потери общности, что $[H(\infty), \mathcal{O}] = 0$, так как числитель обращается в нуль, если $\mathcal{O}$ несет ненулевой спин s , т. е. $[H(\infty), \mathcal{O}] = 2s\mathcal{O}$. Значения этого функционала зависят не только от κ и $\mathbf{n}$, но и от возможных неоднородностей в мадубаровском направлении. Мы не пишем явно эту зависимость для краткости обозначений.

В общем случае $Z_{\mathbf{n}}^{\kappa} \{q^{\alpha H(0)} \mathcal{O}\}$ хорошо определен: бесконечности сокращаются. Действительно, предположим, что $T_{\mathbf{M}}(1, \kappa)$ имеет единственный собственный вектор $|\kappa\rangle$, отвечающий максимальному по абсолютной величине собственному значению $T(1, \kappa)$. Предположим, что существует аналогичный собственный ковектор $\langle \kappa + \alpha |$ трансфер-матрицы $T_{\mathbf{M}}(1, \kappa + \alpha)$ с собственным значением $T_{\mathbf{M}}(1, \kappa + \alpha)$. Наложим условие общего положения:

$$\langle \kappa + \alpha | \kappa \rangle \neq 0. \quad (2.2)$$

Предположим, что

$$q^{\alpha H(0)} \mathcal{O} = q^{\alpha H(j-1)} X_{[j,k]},$$

где $X_{[j,k]}$ действует как единичный оператор вне интервала $[j, k]$, $k \geq j$. Мы будем говорить, что оператор локализован на $[j, k]$. Имеем

$$Z_{\mathbf{n}}^{\kappa} \{q^{\alpha H(0)} \mathcal{O}\} = \frac{T(1, \kappa + \alpha)^{j-1}}{T(1, \kappa)^k} \cdot \frac{\langle \kappa + \alpha | \text{Tr}_{[j,k]}(T_{[j,k], \mathbf{M}} q^{\kappa H_{[j,k]}} X_{[j,k]}) | \kappa \rangle}{\langle \kappa + \alpha | \kappa \rangle}, \quad (2.3)$$

где

$$T_{[j,k], \mathbf{M}} = \prod_{p=j}^{\curvearrowright} T_{p, \mathbf{M}}(1), \quad H_{[j,k]} = \sum_{p=j}^k H_p.$$

Стрелка над произведением означает, что множители расставлены в порядке возрастания по j .

Очевидно, что с помощью простого переопределения операторов мы можем ограничиться рассмотрением случая $j = 1$, т.е. считать, что оператор $\mathcal{O}$ локализован на интервале $[1, k]$. Возникает вопрос: существует ли способ строить операторы $\mathcal{O}$, полезный для вычисления функционала (2.3) и принимающий во внимание интегрируемость?

Рассмотрим дополнительное пространство V_c такой же размерности, как у пространств V_j в пространственном направлении. Снабдим V_c параметром ζ . Введем присоединенную R -матрицу:

$$\mathbb{R}_{c,j}(\zeta)(\bullet) = R_{c,j}(\zeta) \bullet R_{c,j}(\zeta)^{-1}.$$

Определим следующий, довольно формальный, объект:

$$\mathbb{T}_{c,[1,\infty]}(\zeta) = \prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{R}_{c,j}(\zeta). \quad (2.4)$$

Рассмотрим линейный оператор

$$y_{c,[1,k]}: \text{End}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k) \rightarrow \text{End}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \otimes V_c).$$

Наша цель состоит в том, чтобы придать смысл коэффициенту $y^{(j)}$ в разложении

$$\text{Tr}_c(\mathbb{T}_{c,[1,\infty]}(\zeta) y_{c,[1,k]}(X_{[1,k]})) = \sum_{j=0}^{\infty} (\zeta^2 - 1)^j y^{(j)}(X_{[1,k]}) \quad (2.5)$$

как оператору, отображающему $X_{[1,k]} \in \text{End}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)$ в

$$y^{(j)}(X_{[1,k]}) \in \text{End}(V_{[1,\infty]}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \text{End}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_l).$$

Здесь предел в правой части индуктивен по отношению к включению

$$\text{End}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_l) \otimes \text{id} \subset \text{End}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_{l+1}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Рассмотренный выше индуктивный предел $l \rightarrow \infty$ относится к правому концу интервала $[1, l]$. В работе [9] это называлось правой редукцией. Что касается левой редукции $k \rightarrow -\infty$ для интервала $[k, m]$, нам нечего добавить к сказанному в работе [9].

В дальнейшем мы будем рассматривать функции ζ как функции $w = \zeta^2 - 1$. Например, мы понимаем ветвь $\zeta^a = (1 + w)^{a/2}$ таким образом, что эта функция равна единице при $w = 0$.

Будет удобно использовать

$$\check{\mathbb{R}}_{i,j}(\zeta) = \mathbb{R}_{i,j}(\zeta)\mathbb{P}_{i,j},$$

где $\mathbb{P}_{i,j}$ обозначает присоединенное представление перестановки.

Имеем

$$\check{\mathbb{R}}_{i,j}(\zeta)|_{\zeta^2=1} = I,$$

откуда получаем

$$\check{\mathbb{R}}_{i,j}(\zeta) = I + (\zeta^2 - 1)\mathbf{r}_{i,j}(\zeta),$$

где оператор $\mathbf{r}_{i,j}(\zeta)$ регулярен в точке $\zeta^2 = 1$ и обладает следующим свойством.

СВОЙСТВО 1. *Имеем*

$$\mathbf{r}_{i,j}(\zeta)(X) = 0,$$

если оператор X действует как единичный на i -й и j -й компонентах тензорного произведения.

Используя это свойство и следуя [9], доказываем, что для всех конечных $l > k$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_c(\mathbb{T}_{c,[1,l]}(\zeta)y_{c,[1,k]}(X_{[1,k]})) &= \\ &= \sum_{j=k}^{l-1} (\zeta^2 - 1)^{j-k} \mathbf{r}_{j+1,j}(\zeta) \cdots \mathbf{r}_{k+2,k+1}(\zeta) \mathbb{T}_{k+1,[1,k]}(\zeta) (y_{k+1,[1,k]}(X_{[1,k]})) + \\ &+ O((\zeta^2 - 1)^{l-k}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

как ряды Тейлора по $\zeta^2 - 1$.

Обратим внимание на основное свойство (2.6): в последовательных произведениях матриц $\mathbf{r}_{j+1,j}(\zeta), \dots, \mathbf{r}_{k+2,k+1}(\zeta)$ нет пропусков. Это следствие свойства 1.

Таким образом, индуктивный предел для степенных рядов по $\zeta^2 - 1$ хорошо определен: каждый коэффициент стабилизируется для достаточно больших l :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_c(\mathbb{T}_{c,[1,\infty)}(\zeta)y_{c,[1,k]}(X_{[1,k]})) &= \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} (\zeta^2 - 1)^{j-k} \mathbf{r}_{j+1,j}(\zeta) \cdots \mathbf{r}_{k+2,k+1}(\zeta) \mathbb{T}_{k+1,[1,k]}(\zeta) y_{k+1,[1,k]}(X_{[1,k]}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Заметим, что можно позволить, чтобы функция $y_{k+1,[1,k]}$ зависела аналитически от ζ , единственным ограничением при этом является отсутствие сингулярности в $\zeta^2 = 1$, другими словами, возможность разложения в ряд Тейлора.

Описанная выше конструкция допускает итерации. Рассмотрим пространства $V_{c_1}, \dots, V_{c_k}$ с эволюционными параметрами $\zeta_1, \dots, \zeta_k$. Рассмотрим далее

$$f_{c_1, \dots, c_k} \in \mathrm{End}(V_{c_1} \otimes \cdots \otimes V_{c_k}).$$

Тогда имеем k -параметрическое семейство локальных операторов

$$\mathrm{Tr}_{c_1, \dots, c_k}(\mathbb{T}_{c_1,[1,\infty]}(\zeta_1) \cdots \mathbb{T}_{c_k,[1,\infty]}(\zeta_k)(f_{c_1, \dots, c_k})). \quad (2.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно допустить, чтобы функция $f_{c_1, \dots, c_k}$ зависела аналитически от ζ_j , если она не имеет сингулярностей при $\zeta_j^2 = 1$, а также на диагоналях $\zeta_i^2 = \zeta_j^2$, т. е. если разложение Тейлора возможно.

Следуя [10] (см. лемму 3.1 в указанной работе), мы вычисляем значение функционала Z_n^κ на локальных операторах, заданных такими производящими функциями:

$$\begin{aligned} Z_n^\kappa \{ q^{\alpha H(0)} \text{Tr}_{c_1, \dots, c_k} (\mathbb{T}_{c_1, [1, \infty]}(\zeta_1) \cdots \mathbb{T}_{c_k, [1, \infty]}(\zeta_k) (f_{c_1, \dots, c_k})) \} = \\ = \frac{\langle \kappa + \alpha | \text{Tr}_{c_1, \dots, c_k} (T_{c_1, \mathbf{M}}(\zeta_1, \kappa) \cdots T_{c_k, \mathbf{M}}(\zeta_k, \kappa) f_{c_1, \dots, c_k}) | \kappa \rangle}{\langle \kappa + \alpha | \kappa \rangle \prod_{p=1}^k T(\zeta_p, \kappa)}, \end{aligned}$$

где и левая, и правая части понимаются как ряды Тейлора по $\zeta_j^2 - 1$.

В результате значение Z_n^κ на производящей функции (2.8) выражается через матричные элементы матриц $T_{c_j, \mathbf{M}}(\zeta_j, \kappa)$. Другими словами, вычисление для *бесконечной однородной* цепочки $\otimes_{j=1}^\infty \mathbb{C}^d$ сводится к вычислению для *конечной неоднородной* цепочки $\otimes_{j=1}^\infty \mathbb{C}^d$ с неоднородностями $\zeta_1, \dots, \zeta_k$. Это занятное наблюдение, но чтобы оно стало действительно полезным, необходимо указать хороший способ вычисления матричных элементов. До сих пор это было сделано для случая спина 1/2. В следующем разделе мы кратко напомним соответствующую конструкцию и обобщим ее на случай спина 1.

3. БАЗИС КВАЗИЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ СПИНА 1

3.1. Случай спина 1/2. В случае спина 1/2 “хороший” базис операторов $\{f_{c_1, \dots, c_k}\}$ для конечной цепочки был найден в работе [9]. Кратко напомним соответствующую конструкцию.

Рассмотрим пространство

$$\mathcal{W}^{(\alpha)} = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{W}_{\alpha-s, s},$$

где $\mathcal{W}_{\alpha-s, s}$ состоит из квазилокальных операторов $q^{(\alpha-s)H(0)} \mathcal{O}$ таких, что $\mathcal{O}$ имеет спин s . Нам потребуется также слегка модифицированное ядро Коши

$$\psi(\zeta, \alpha) = \zeta^\alpha \frac{\zeta^2 + 1}{2(\zeta^2 - 1)} \quad (3.1)$$

и его “первообразная” по отношению к q -разностному оператору

$$\Delta_\zeta f(\zeta) = f(q\zeta) - f(q^{-1}\zeta).$$

Мы фиксируем возможный произвол в выборе квазиконстант, положив сначала для $0 < \text{Re } \alpha < 1/\nu$

$$\Delta_\zeta^{-1} \psi(\zeta, \alpha) = -\frac{1}{8i} V P \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^{ik+\alpha} \frac{\text{cth}(\pi k/2)}{\text{sh}[\pi \nu(k - i\alpha)]} dk \quad (3.2)$$

и затем аналитически продолжая по α .

Рассмотрим двумерные вспомогательные пространства $V_{c_j}(\zeta_j)$ с эволюционными параметрами ζ_j , $j = 1, 2, \dots$. Наша конструкция основывается на следующих, введенных в работе [9], линейных отображениях:

$$g_{c_k}^{\epsilon}(\zeta_k): \text{End}(V_{c_1}(\zeta_1) \otimes \dots \otimes V_{c_{k-1}}(\zeta_{k-1})) \rightarrow \text{End}(V_{c_1}(\zeta_1) \otimes \dots \otimes V_{c_k}(\zeta_k)),$$

где $\epsilon_k \in \{\pm, 0\}$. В приложении А мы резюмируем определения операторов $g_c^{\epsilon}(\zeta)$ и их свойства. Оператор $g_{c_k}^{\epsilon_k}(\zeta_k)$ зависит от предыдущих ϵ_j и ζ_j , $1 \leq j \leq k-1$. Для краткости мы не пишем эти аргументы явно. Иногда мы пишем операторы в другом порядке, например

$$g_{c_1}^{\epsilon_1}(\zeta_1)g_{c_2}^{\epsilon_2}(\zeta_2)(I) \in \text{End}(V_{c_2}(\zeta_2) \otimes V_{c_1}(\zeta_1)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Операторы $g_c^{\epsilon}(\zeta)$, которыми мы пользуемся в настоящей работе, немного отличаются от определенных в работе [9]. Последние обозначаются $g_{\text{rat},c}^{\epsilon}(\zeta)$ в приложении А.2. Коэффициенты операторов $g_{\text{rat},c}^{\epsilon}(\zeta)$ – рациональные функции эволюционных параметров (с точностью до общего степенного множителя). В противоположность этому $g_c^{\epsilon}(\zeta)$ содержат трансцендентную функцию (3.2). Однако именно операторы $g_c^{\epsilon}(\zeta)$ хорошо ведут себя в пределе КТП [12], что указывает на их универсальность.

Следуя [9], введем операторы $x^{\epsilon*}(\zeta)$, действующие на $\mathcal{W}^{(\alpha)}$:

$$x^{\epsilon*}(\zeta)(q^{(\alpha-s)H(0)}\mathcal{O}) = q^{(\alpha-s-\epsilon)H(0)} \text{Tr}_c(\mathbb{T}_{c,[n+1,\infty)}(\zeta)g_c^{\epsilon}(\zeta)(\mathcal{O}_{[1,n]})),$$

где оператор $\mathcal{O}$ локализован на интервале $[1, n]$ и имеет спин s . Обычно мы пишем

$$b^*(\zeta) = x^{+*}(\zeta), \quad c^*(\zeta) = x^{-*}(\zeta), \quad t^*(\zeta) = x^{0*}(\zeta).$$

В работах [9], [10] мы использовали жирные буквы, но в этой работе мы оставляем их для случая спина 1. Можно заключить, что операторы $x^{\epsilon*}(\zeta)$ хорошо определены на $\mathcal{W}^{(\alpha)}$, полагая $\mathbb{T}_{c,[1,k]}(\zeta)y_{c,[1,k]} = g_c^{\epsilon}(\zeta)$ в (2.7).

Имеем коммутационные соотношения

$$x^{\epsilon_1*}(\zeta_1)x^{\epsilon_2*}(\zeta_2) = (-1)^{\epsilon_1\epsilon_2}x^{\epsilon_2*}(\zeta_2)x^{\epsilon_1*}(\zeta_1).$$

Мы строим операторы в однородном случае, используя последовательно принцип матрешки, т. е. применяя

$$g_{c_k}^{\epsilon_k}(\zeta_k) \cdots g_{c_1}^{\epsilon_1}(\zeta_1)(I). \quad (3.3)$$

Известно, что выражение (3.3) регулярно при $\zeta_j^2 = 1$ и на диагоналях $\zeta_j^2 = \zeta_k^2$, $j \neq k$ (см. лемму 3.8 в [9]).

Последовательное применение операторов $x^{\epsilon*}(\zeta)$ дает (положим $n = 0$ в (A.22))

$$\begin{aligned} & x^{\epsilon_k*}(\zeta_k) \cdots x^{\epsilon_1*}(\zeta_1)(q^{\alpha H(0)}) = \\ & = \text{Tr}_{c_1, \dots, c_k}(\mathbb{T}_{c_1,[1,\infty)}(\zeta_1) \cdots \mathbb{T}_{c_k,[1,\infty)}(\zeta_k)g_{c_k}^{\epsilon_k}(\zeta_k) \cdots g_{c_1}^{\epsilon_1}(\zeta_1)(I))q^{(\alpha - \sum \epsilon_p)H(0)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Мы называем эту формулу “одетой матрешкой”, так как она позволяет определить действие операторов на $\text{End}(\mathfrak{H}_S)$, “одевая” матрешку во вспомогательных пространствах $\text{End}(V_{c_1} \otimes \dots \otimes V_{c_k})$ присоединенным действием матриц монодромии, затем вспомогательные пространства истребляются взятием следа.

Ценность всей конструкции состоит в том, что для квазилокальных операторов (3.4) средние описываются явно. Главная формула работы [10] (формула (1.12) в указанной работе) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\langle \kappa + \alpha | \text{Tr}_{c_1, \dots, c_k} (T_{c_1, \mathbf{M}}(\zeta_1) \cdots T_{c_k, \mathbf{M}}(\zeta_k) g_{c_k}^{\epsilon_k}(\zeta_k) \cdots g_{c_1}^{\epsilon_1}(\zeta_1)(I)) | \kappa \rangle}{\prod_{p=1}^k T(\zeta_p, \kappa) \langle \kappa + \alpha | \kappa \rangle} = \\ & = \prod_{j: \epsilon_j=0} \rho(\zeta_j) \times \det(\omega(\zeta_r, \zeta_s)) \Big|_{\substack{r: \epsilon_r=+, \\ s: \epsilon_s=-}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь $\rho(\zeta)$ – отношение левого и правого собственных значений мацубаровской трансфер-матрицы

$$\rho(\zeta) = \frac{T(\zeta, \kappa + \alpha)}{T(\zeta, \kappa)},$$

а функция $\omega(\zeta, \xi)$ дается в приложении A. Здесь мы только перечисляем ее важнейшие свойства.

Функция $\omega(\zeta, \xi)$ состоит из двух частей:

$$\omega(\zeta, \xi) = \omega_{\text{reg}}(\zeta, \xi) + \omega_{\text{trans}}(\zeta, \xi).$$

Первая часть $(\xi/\zeta)^\alpha \omega_{\text{reg}}(\zeta, \xi)$ является мероморфной функцией ζ^2 и ξ^2 с простыми полюсами, расположенными только в нулях $T(\zeta, \kappa)T(\xi, \kappa)$. Вторая часть дается формулой

$$\begin{aligned} \omega_{\text{trans}}(\zeta, \xi) = & \frac{1}{4} \frac{1}{T(\zeta, \kappa)T(\xi, \kappa)} \left(a(\xi)d(\zeta)\psi\left(q\frac{\zeta}{\xi}, \alpha\right) - a(\zeta)d(\xi)\psi\left(q^{-1}\frac{\zeta}{\xi}, \alpha\right) \right) + \\ & + (1 + \rho(\zeta)\rho(\xi))\Delta_\zeta^{-1}\psi\left(\frac{\zeta}{\xi}, \alpha\right) - \rho(\zeta)\Delta_\zeta^{-1}\psi\left(q^{-1}\frac{\zeta}{\xi}, \alpha\right) - \\ & - \rho(\xi)\Delta_\zeta^{-1}\psi\left(q\frac{\zeta}{\xi}, \alpha\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Эта функция имеет простой полюс в $\zeta/\xi = q^{\pm 1}$ с вычетом

$$\text{res}_{\zeta'=\zeta} \omega(q^{\pm 1/2}\zeta', q^{\mp 1/2}\zeta) \frac{d\zeta'^2}{\zeta'^2} = \pm \mathcal{N}(\zeta) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{T^{(1)}(\zeta, \kappa + \alpha)}{T^{(1)}(\zeta, \kappa)} \right), \quad (3.7)$$

$$\mathcal{N}(\zeta) = \frac{3}{4} \frac{T^{(1)}(\zeta, \kappa)}{T(q^{-1/2}\zeta, \kappa)T(q^{1/2}\zeta, \kappa)}. \quad (3.8)$$

Появление в последней формуле размноженной трансфер-матрицы спина 1 $T^{(1)}(\zeta, \kappa)$, $T^{(1)}(\zeta, \kappa + \alpha)$ очень важно. При выводе (3.7) мы использовали (3.6),

$$\Delta^{-1}\psi(\zeta, \alpha) = \pm \frac{1}{2}\psi(q^{\mp 1}\zeta, \alpha) + O(1), \quad \zeta \rightarrow q^{\pm 1}, \quad (3.9)$$

и соотношения размножения для трансфер-матриц

$$3T^{(1)}(\zeta, \kappa) = 4T(\zeta q^{1/2}, \kappa)T(\zeta q^{-1/2}, \kappa) - a(\zeta q^{1/2})d(\zeta q^{-1/2}).$$

(Напомним, что трансфер-матрицы определяются нормированными следами.)

3.2. Размножение операторов спина 1/2. Естественно, путь от спина 1/2 к спину 1 идет через процедуру размножения. Рассмотрим неоднородную цепочку спина 1.

Начнем с некоторых общих мест. Представление спина 1 реализуется как $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ -подмодуль

$$V_{\{1,2\}^+}(\zeta) \subset V_1(\zeta^-) \otimes V_2(\zeta^+),$$

где $\zeta^\pm = q^{\pm 1/2}\zeta$. Для определенности мы нормируем R -матрицу таким образом, что

$$R_{1,2}(q) = D_{1,2}\mathcal{P}_{1,2}^+, \quad \text{res}_{\zeta=q^{-1}} R_{1,2}(\zeta) \frac{d\zeta^2}{\zeta^2} = \mathcal{P}_{1,2}^-,$$

где $\mathcal{P}_{1,2}^\pm = (\mathcal{P}_{1,2}^\pm)^2$ суть проекторы на симметрическое и антисимметрическое подпространства, а $D_{1,2}$ есть диагональная матрица, коммутирующая с $\mathcal{P}_{1,2}^+$.

Рассмотрим оператор $f_{1,2} \in \text{End}(V_1(\zeta^-) \otimes V_2(\zeta^+))$. Если его образ содержится в подпространстве $V_{\{1,2\}^+}(\zeta)$, тогда ограничением получаем

$$f_{\{1,2\}^+} = f_{1,2}|_{V_{\{1,2\}^+}(\zeta)} \in \text{End}(V_{\{1,2\}^+}(\zeta)).$$

Это означает, что $\text{End}(V_{\{1,2\}^+}(\zeta))$ – это подфактор

$$\begin{aligned} \text{End}(V_{\{1,2\}^+}(\zeta)) &\simeq \\ &\simeq \mathcal{P}_{1,2}^+ \text{End}(V_1(\zeta^-) \otimes V_2(\zeta^+)) \bmod \mathcal{P}_{1,2}^+ \text{End}(V_1(\zeta^-) \otimes V_2(\zeta^+)) \mathcal{P}_{1,2}^-. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В более общем случае допустим, что $f_{c_1, \dots, c_{2n}}$ есть оператор на $V_{c_1}(\zeta_1^-) \otimes V_{c_2}(\zeta_1^+) \otimes \dots \otimes V_{c_{2n-1}}(\zeta_n^-) \otimes V_{c_{2n}}(\zeta_n^+)$, $\zeta_j^\pm = q^{\pm 1/2}\zeta_j$, и предположим, что

$$f_{c_1, \dots, c_{2n}} = \mathcal{P}_{2j-1, 2j}^+ f_{c_1, \dots, c_{2n}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть $f_{c_1, \dots, c_n}$ является его ограничением на $V_{c_1} \otimes \dots \otimes V_{c_n}$, где мы пишем $c_j = \{c_{2j-1}, c_{2j}\}^+$ для краткости. Из соотношения размножения

$$R_{1,*}(q^{-1/2}\zeta)R_{2,*}(q^{1/2}\zeta)\mathcal{P}_{1,2}^+ = R_{\{1,2\}^+,*}(\zeta)$$

получаем следующие соотношения между средними:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\langle \kappa + \alpha | \kappa \rangle \prod_{p=1}^n T(\zeta_p^-, \kappa) T(\zeta_p^+, \kappa)} \langle \kappa + \alpha | \text{Tr}_{c_1, \dots, c_{2n}} (T_{c_1, \mathbf{M}}(\zeta_1^-, \kappa) T_{c_2, \mathbf{M}}(\zeta_1^+, \kappa) \times \dots \\ &\quad \dots \times T_{c_{2n-1}, \mathbf{M}}(\zeta_n^-, \kappa) T_{c_{2n}, \mathbf{M}}(\zeta_n^+, \kappa) f_{c_1, \dots, c_{2n}}) | \kappa \rangle = \\ &= \prod_{j=1}^n \mathcal{N}(\zeta_j) \times \frac{\langle \kappa + \alpha | \text{Tr}_{c_1, \dots, c_n} (T_{c_1, \mathbf{M}}(\zeta_1, \kappa) \dots T_{c_n, \mathbf{M}}(\zeta_n, \kappa) f_{c_1, \dots, c_n}) | \kappa \rangle}{\langle \kappa + \alpha | \kappa \rangle \prod_{p=1}^n T^{(1)}(\zeta_p, \kappa)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\mathcal{N}(\zeta)$ дается (3.8).

Теперь обсудим размножение операторов $g_c^\epsilon(\zeta)$. Рассмотрим некоторые линейные комбинации $\mathbf{g}_{c_2, c_1}^\delta(\zeta)$ произведений $g_{c_2}^{\epsilon_2}(\zeta q^{1/2}) g_{c_1}^{\epsilon_1}(\zeta q^{-1/2})$ с фиксированным $\epsilon_1 + \epsilon_2$. В дополнение к (A.5)–(A.7) удобно использовать оператор $g_c^{\bar{0}}(\zeta)$, действующий как

$$g_c^{\bar{0}}(\zeta)(X) = X \otimes \text{id}_c. \quad (3.12)$$

Для него ϵ понимается как 0. Мы говорим, что $\mathbf{g}_{c_2, c_1}^\delta(\zeta)$ *допустимый*, если

$$\mathbf{g}_{c_2, c_1}^\delta(\zeta)(I) = \mathcal{P}_{c_1, c_2}^+ \mathbf{g}_{c_2, c_1}^\delta(\zeta)(I). \quad (3.13)$$

Для допустимых операторов справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{c_{2n}, c_{2n-1}}^{\delta_n}(\zeta_n) \cdots \mathbf{g}_{c_2, c_1}^{\delta_1}(\zeta_1)(I) = \\ = \mathcal{P}_{c_{2k-1}, c_{2n}}^+ \cdots \mathcal{P}_{c_1, c_2}^+ \mathbf{g}_{c_{2n}, c_{2n-1}}^{\delta_n}(\zeta_k) \cdots \mathbf{g}_{c_2, c_1}^{\delta_1}(\zeta_1)(I). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Чтобы убедиться в этом, возьмем $X \in \text{End}(V_{[1, n]})$ из приложения A.1 и заметим, что R -матричная симметрия (A.17) подразумевает

$$\begin{aligned} g_c^\epsilon(\zeta_1 | \xi_1, \dots, \xi_j, q\xi_j, \dots, \xi_n)(\mathcal{P}_{j+1, j}^+ X) = \\ = \mathcal{P}_{j+1, j}^+ g_c^\epsilon(\zeta_1 | \xi_1, \dots, \xi_j, q\xi_j, \dots, \xi_n)(\mathcal{P}_{j+1, j}^+ X), \end{aligned} \quad (3.15)$$

если специализация $g_c^\epsilon(\zeta_1 | \xi_1, \dots, \xi_n) \big|_{\xi_{j+1}=q\xi_j}$ хорошо определена. Используя коммутационные соотношения (A.24), можно пронести любой $\mathbf{g}_{c_{2j}, c_{2j-1}}^{\delta_j}(\zeta_k)$ направо и использовать (3.13), затем симметризатор идет налево вследствие (3.15).

Индекс δ принимает значения в (i, j) , $i, j = 1, 2, 3$. Существуют два допустимых оператора $\mathbf{g}_{c_2, c_1}^\delta(\zeta)$, которые можно построить немедленно:

$$\mathbf{g}_{c_2, c_1}^{(3,1)}(\zeta) = g_c^+(\zeta q^{1/2}) g_{c_1}^+(\zeta q^{-1/2}), \quad \mathbf{g}_{c_2, c_1}^{(1,3)}(\zeta) = g_{c_2}^-(\zeta q^{1/2}) g_{c_1}^-(\zeta q^{-1/2}).$$

Действительно, $g_c^\pm(\zeta q^{1/2}) g_{c_1}^\pm(\zeta q^{-1/2})(I)$ пропорциональны операторам $\sigma_{c_2}^\pm \sigma_{c_1}^\pm$, которые с очевидностью удовлетворяют (3.13). Эти два оператора выглядят как часть триплета, поэтому мы хотим найти еще один оператор похожего типа, но имеющий спин 0. Естественно, он должен быть построен из $g_{c_2}^+ g_{c_1}^-$ и $g_{c_2}^- g_{c_1}^+$. Позаботившись об отсутствии сингулярности, приходим к следующему предложению:

$$\mathbf{g}_{c_2, c_1}^{(2,2)}(\zeta) = \lim_{\substack{\xi_1 \rightarrow \zeta q^{-1/2}, \\ \xi_2 \rightarrow \zeta q^{1/2}}} \left(\left(q \frac{\xi_1}{\xi_2} \right)^\alpha g_{c_2}^+(\xi_2) g_{c_1}^-(\xi_1) + \left(q \frac{\xi_1}{\xi_2} \right)^{-\alpha} g_{c_2}^-(\xi_2) g_{c_1}^+(\xi_1) \right). \quad (3.16)$$

В приложении Б доказано, что оператор (3.16) хорошо определен. Прямым вычислением, используя (A.10), (A.11), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{c_2, c_1}^{(2,2)}(\zeta)(I) = - (q^\alpha - q^{-\alpha}) \mathcal{P}_{1,2}^+ \left(\frac{q + q^{-1}}{2(q - q^{-1})} (q^\alpha \tau_1^+ \tau_2^+ + q^{-\alpha} \tau_1^- \tau_2^-) + \right. \\ \left. + \frac{q^\alpha + q^{-\alpha}}{q^2 - q^{-2}} (\tau_1^+ \tau_2^- + \tau_1^- \tau_2^+) \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Следовательно, этот оператор допустим.

Теперь перейдем к фермионам. Легко видеть, что следующие комбинации допустимы:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{c_2, c_1}^{(1,2)}(\zeta) &= g_{c_2}^-(\zeta q^{1/2}) g_{c_1}^0(\zeta q^{-1/2}) + g_{c_1}^-(\zeta q^{-1/2}), \\ \mathbf{g}_{c_2, c_1}^{(2,1)}(\zeta) &= g_{c_2}^+(\zeta q^{1/2}) g_{c_1}^0(\zeta q^{-1/2}) + g_{c_1}^+(\zeta q^{-1/2}), \\ \mathbf{g}_{c_2, c_1}^{(2,3)}(\zeta) &= g_{c_2}^0(\zeta q^{1/2}) g_{c_1}^-(\zeta q^{-1/2}) + g_{c_2}^-(\zeta q^{1/2}), \\ \mathbf{g}_{c_2, c_1}^{(3,2)}(\zeta) &= g_{c_2}^0(\zeta q^{1/2}) g_{c_1}^+(\zeta q^{-1/2}) + g_{c_2}^+(\zeta q^{1/2}). \end{aligned}$$

Мы добавляем два простых оператора: единичный оператор для размноженной цепочки

$$\mathbf{g}_{c_2, c_1}^{(1,1)}(\zeta) = \text{id}$$

и

$$\mathbf{g}_{c_2, c_1}^{(3,3)}(\zeta) = g_{c_2}^0(\zeta q^{1/2}) g_{c_1}^0(\zeta q^{-1/2}).$$

После ограничения на подпространства спина 1 получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\mathbf{c}_k}^\delta(\zeta) : \text{End}(V_{\mathbf{c}_1}(\zeta_1) \otimes \cdots \otimes V_{\mathbf{c}_{k-1}}(\zeta_{k-1})) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \text{End}(V_{\mathbf{c}_1}(\zeta_1) \otimes \cdots \otimes V_{\mathbf{c}_{k-1}}(\zeta_{k-1}) \otimes V_{\mathbf{c}_k}(\zeta)), \end{aligned}$$

где $\mathbf{c}_j = \{c_{2j-1}, c_{2j}\}^+$.

3.3. Операторы рождения для спина 1. Ниже, для краткости обозначений, мы используем индекс c_j для трехмерных пространств. Это не должно привести к путанице с двумерным случаем, так как мы используем буквы разных шрифтов в этих двух случаях.

Легко убедиться, что $\mathbf{g}_c^{(i,j)}(\zeta)(I)$ с $i, j = 1, 2, 3$ дают девять независимых операторов на одном узле. Используя этот факт, должно быть возможно доказать полноту в однородном случае в духе статьи [22].

Следуя нашей логике, мы хотим определить операторы $\mathbf{g}_c^{(i,j)}(\zeta)(I)$ для однородной бесконечной цепочки. Наивный подход состоит в том, чтобы воспользоваться формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(i_k, j_k)}(\zeta_k) \cdots \mathbf{x}^{(i_1, j_1)}(\zeta_1)(q^{\alpha H(0)}) &= \\ = \text{Tr}_{c_1, \dots, c_k} [\mathbb{T}_{c_1, [1, \infty)}(\zeta_1) \cdots \mathbb{T}_{c_k, [1, \infty)}(\zeta_k) \mathbf{g}_{c_k}^{(i_k, j_k)}(\zeta_k) \cdots \mathbf{g}_{c_1}^{(i_1, j_1)}(\zeta_1)(I)] &\times \\ \times q^{(\alpha - \sum_p (j_p - i_p))H(0)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Однако это не работает так просто: правая часть не допускает разложения в ряд Тейлора из-за сингулярностей на диагонали. Объясним это.

Рассмотрим в качестве примера

$$\mathbf{g}_{\{3,4\}^+}^{(3,1)}(\zeta_2) \mathbf{g}_{\{1,2\}^+}^{(1,3)}(\zeta_1)(q^{\alpha H(0)}) = \lim g_4^+(\xi_4) g_3^+(\xi_3) g_2^-(\xi_2) g_1^-(\xi_1)(I),$$

где мы положили

$$\xi_{2j} = q^{1/2} \zeta'_j, \quad \xi_{2j-1} = q^{-1/2} \zeta_j, \quad j = 1, 2, \quad (3.19)$$

и рассмотрим предел $\zeta'_j \rightarrow \zeta_j$. Для раскрытия сингулярности удобнее работать со средними, чем с самими операторами. Возьмем мацубаровскую цепочку с произвольными параметрами $\tau_{\mathbf{m}}$ и $d_{\mathbf{m}}$ и вычислим среднее согласно (3.5):

$$\frac{\langle \kappa + \alpha | g_4^+(\xi_4) g_3^+(\xi_3) g_2^-(\xi_2) g_1^-(\xi_1)(I) | \kappa \rangle}{\langle \kappa + \alpha | \kappa \rangle} = \omega(\xi_4, \xi_1) \omega(\xi_3, \xi_2) - \omega(\xi_4, \xi_2) \omega(\xi_3, \xi_1).$$

В вышеупомянутом пределе только первый член сингулярен. Положим

$$\bar{f}(\zeta, \xi) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{T^{(1)}(\xi, \kappa + \alpha)}{T^{(1)}(\xi, \kappa)} \right) \psi \left(\frac{\zeta}{\xi}, \alpha \right)$$

и запишем

$$\begin{aligned}\omega(q^{1/2}\zeta, q^{-1/2}\xi) &= \mathcal{N}(\xi)\bar{f}(\zeta, \xi) + \omega''(\zeta, \xi), \\ \omega(q^{-1/2}\zeta, q^{1/2}\xi) &= \mathcal{N}(\zeta)\bar{f}(\xi, \zeta) + \omega'(\zeta, \xi),\end{aligned}$$

где функции $\omega''(\zeta, \xi)$, $\omega'(\zeta, \xi)$ регулярны при $\zeta \rightarrow \xi$. Из (3.7) находим

$$\begin{aligned}\omega(\xi_4, \xi_1)\omega(\xi_3, \xi_2) &= \mathcal{N}(\zeta_1)\mathcal{N}(\zeta_2)\bar{f}(\zeta_2, \zeta_1)\bar{f}(\zeta_1, \zeta_2) + \\ &+ \mathcal{N}(\zeta_2)\bar{f}(\zeta_2, \zeta_1)(-\omega''(\zeta_2, \zeta_1) + \omega'(\zeta_2, \zeta_1)) + O(1).\end{aligned}$$

С другой стороны, среднее оператора $\mathbf{g}^{(2,2)}(\zeta)$ есть

$$\lim_{\substack{\xi_2 \rightarrow q^{1/2}\zeta, \\ \xi_1 \rightarrow q^{-1/2}\zeta}} \left(\left(q \frac{\xi_1}{\xi_2} \right)^\alpha \omega(\xi_2, \xi_1) - \left(q \frac{\xi_1}{\xi_2} \right)^{-\alpha} \omega(\xi_1, \xi_2) \right) = \omega''(\zeta, \zeta) - \omega'(\zeta, \zeta).$$

Теперь перейдем к пределу (3.19). Среднее для цепочки спина 1 связано со средним для спина 1/2 соотношением (3.11). Сравнивая, находим, что среднее

$$(\mathbf{g}_{\{3,4\}+}^{(3,1)}(\zeta_2)\mathbf{g}_{\{1,2\}+}^{(1,3)}(\zeta_1) + \bar{f}(\zeta_2, \zeta_1)\bar{f}(\zeta_1, \zeta_2) - \bar{f}(\zeta_2, \zeta_1)\mathbf{g}^{(2,2)}(\zeta_1))(I)$$

регулярно в $\zeta_2 \rightarrow \zeta_1$.

Вернемся к операторам $\mathbf{x}^{(i,j)}$. Обычно мы используем для них следующие обозначения:

$$(\mathbf{x}^{(i,j)}(\zeta))_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} \text{id}, & \mathbf{c}^*(\zeta), & \mathbf{j}^-(\zeta) \\ \mathbf{b}^*(\zeta), & \mathbf{j}^0(\zeta), & \bar{\mathbf{c}}^*(\zeta) \\ \mathbf{j}^+(\zeta), & \bar{\mathbf{b}}^*(\zeta), & \mathbf{t}^*(\zeta) \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Формула (3.18) не определяет $\mathbf{x}^{(i,j)}$ как оператор, действующий на $\mathcal{W}^{(\alpha)}$ из-за сингулярностей. Тем не менее предыдущее рассмотрение подсказывает следующую конструкцию.

Возьмем функцию $f(\zeta, \xi)$, регулярную в окрестности $\zeta/\xi \in \mathbb{R}_{>0}$, за исключением простого полюса, с вычетом

$$\text{res}_{\zeta=\xi} f(\zeta, \xi) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{t}^*(\xi)).$$

Мы подчеркиваем, что $\mathbf{t}^*(\xi)$ принадлежит центру алгебры операторов рождения, следовательно, можно обращаться с ней, как с константой. Так как в предыдущих рассуждениях мацубаровская цепочка была произвольной, мы заключаем (похожий аргумент использовался ранее [23]), что в операторном смысле

$$\mathbf{j}^+(\zeta)\mathbf{j}^-(\xi) = f(\zeta, \xi)\mathbf{j}^0(\xi) - f(\zeta, \xi)f(\xi, \zeta) + O(1).$$

Заметим, что выбор $f(\zeta, \xi)$ не влияет на это равенство, так как $f(\zeta, \xi)f(\xi, \zeta)$ не дает вклада в простой полюс.

В общем случае имеем следующую конструкцию. Рассмотрим бозонные операторы, удовлетворяющие операторному произведению алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ с центральным

зарядом 1:

$$\begin{aligned}\overline{j^+(\zeta)j^-(\xi)} &= f(\zeta, \xi)j^0(\xi) - f(\zeta, \xi)f(\xi, \zeta), \\ \overline{j^0(\zeta)j^0(\xi)} &= -2f(\zeta, \xi)f(\xi, \zeta), \\ \overline{j^0(\zeta)j^\pm(\xi)} &= \pm f(\zeta, \xi)j^\pm(\xi).\end{aligned}$$

Появление этой алгебры не менее таинственно, чем появление фермионов в случае спина $1/2$.

Рассмотрим, кроме того, две пары фермионов $(\mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*)$, $(\bar{\mathbf{b}}^*, \bar{\mathbf{c}}^*)$, преобразующихся, как $\mathfrak{sl}_2$ -дублеты. Нетривиальные операторные произведения суть

$$\begin{aligned}\overline{j^+(\zeta)\mathbf{c}^*(\xi)} &= -f(\zeta, \xi)\mathbf{b}^*(\xi), & \overline{j^-(\zeta)\mathbf{b}^*(\xi)} &= -f(\zeta, \xi)\mathbf{c}^*(\xi), \\ \overline{j^0(\zeta)\mathbf{b}^*(\xi)} &= f(\zeta, \xi)\mathbf{b}^*(\xi), & \overline{j^0(\zeta)\mathbf{c}^*(\xi)} &= -f(\zeta, \xi)\mathbf{c}^*(\xi),\end{aligned}$$

и похожим образом для $(\bar{\mathbf{b}}^*, \bar{\mathbf{c}}^*)$. Наконец, мы требуем следующие операторные произведения для фермионов:

$$\overline{\mathbf{b}^*(\zeta)\bar{\mathbf{c}}^*(\xi)} = -(1 - \mathbf{t}^*(\xi))f(\zeta, \xi), \quad \overline{\bar{\mathbf{b}}^*(\zeta)\mathbf{c}^*(\xi)} = (1 - \mathbf{t}^*(\xi))f(\zeta, \xi).$$

Остальные пары не имеют сингулярностей в операторных произведениях. Введем нормальное упорядочение $:\bullet:$ стандартным образом. Тогда нормально упорядоченное произведение наших операторов определяет семейства квазилокальных полей; как обычно, следует брать коэффициенты рядов Тейлора по $\zeta^2 - 1$. Например,

$$:j^+(\zeta)j^-(\xi): = j^+(\zeta)j^-(\xi) - f(\zeta, \xi)j^0(\xi) + f(\zeta, \xi)f(\xi, \zeta).$$

Можно привести еще один пример:

$$:j^0(\zeta)\mathbf{b}^*(\xi)\bar{\mathbf{c}}^*(\eta): = \{j^0(\zeta) - f(\zeta, \xi) + f(\zeta, \eta)\} : \mathbf{b}^*(\xi)\bar{\mathbf{c}}^*(\eta) :$$

Обозначим коэффициенты Тейлора нормально упорядоченного выражения операторами $\mathbf{x}_k^{(i,j)}$. Их коммутационные соотношения следуют из операторного произведения.

Отметим, что мы имеем тавтологически определенные операторы $\mathbf{x}_k^{(i,j)}$, действующие на фоковском пространстве, порожденном ими самими. Мы не сомневаемся, что они замечают все пространство квазилокальных операторов, однако этот факт остается недоказанным в настоящей работе.

Каков наилучший выбор функции $f(\zeta, \xi)$? Наша окончательная цель состоит в установлении связи с КТП. Именно, для модели спина 1 мы ожидаем получить в скейлинговом пределе суперсимметричную КТП с центральным зарядом $c = 3/2 - 12\nu^2/(1 - 2\nu)$ (в случае спина $1/2$ мы имели обычную КТП с $c = 1 - 6\nu^2/(1 - \nu)$). Это должно быть возможно, когда мацубаровская цепочка однородна, $\tau_m = q^{1/2}$ для всех $\mathbf{m}$, а ее длина $\mathbf{n} \rightarrow \infty$. При этом получается КТП на цилиндре радиуса $a\mathbf{n}/2\pi$, где параметр a возникает при изменении масштаба в спектре мацубаровской трансфер-матрицы [12]. Как и в случае спина $1/2$, операторы $\mathbf{x}^\delta(\zeta)$ должны

производить потомков первичного поля, получающегося из скейлингового предела $q^{\alpha H(0)}$. Одноточечные функции потомков должны обращаться в нуль, когда радиус цилиндра становится бесконечным, т. е. для КТП на плоскости. Как объяснено в работе [12], в случае спина 1/2 такое свойство имеет место даже на решетке, если потомки порождаются операторами $b^*(\zeta)$, $c^*(\zeta)$, $t^*(\zeta) - 1$: средние для однородной бесконечной мацубаровской цепочки обращаются в нуль. Мы хотим, чтобы это было справедливо и в рассматриваемом случае спина 1.

Именно, мы хотим зафиксировать функцию $f(\zeta, \xi)$ таким образом, чтобы в пределе бесконечной однородной мацубаровской цепочки средние потомков, порожденных нормально упорядоченными произведениями $\mathbf{x}^\delta(\zeta)$, обращались в нуль. Один способ добиться этого состоит в том, чтобы вычислить $\omega(\zeta, \xi)$, взять предел и посмотреть, что произойдет. Мы оставляем такое вычисление на будущее, но прокомментируем ниже имеющую к этому отношение работу [21]. В настоящей работе мы действуем иначе. Известно [3], что для бесконечной мацубаровской цепочки средние даются решениями редуцированных уравнений кКЗ. Мы увидим, как это согласуется с описанием через операторы $\mathbf{x}^\delta(\zeta)$ в следующем разделе.

4. РЕДУЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ККЗ

Рассмотрим общую модель на решетке, бесконечной в обе стороны, строки и столбцы несут одинаковое эволюционное представление $V^{(d)}$ алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$. Редуцированные уравнения кКЗ дают общий способ вычисления средних квазилокальных полей в этом случае [3]. Мы считаем, что эволюционные параметры $\tau_{\mathbf{m}} = q^{1/2}$ для всех строк и равны единице для всех столбцов, за исключением n столбцов, для которых они равны $\zeta_1, \dots, \zeta_n$. Вставим локальный оператор $X_{[1,n]}$ по этим линиям, а также полубесконечный хвост $q^{\alpha H(0)}$ (см. [3], где даны подробные объяснения и графическое представление). Матрица плотности $h(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ есть линейный функционал, ассоциирующий с $X_{[1,n]}$ статистическую сумму:

$$h(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)(X_{[1,n]}) = \lim \frac{\langle \kappa + \alpha | \text{Tr}_{1, \dots, n}(T_{1, \mathbf{m}}(\zeta_1) \cdots T_{n, \mathbf{m}}(\zeta_n) X_{[1,n]}) | \kappa \rangle}{\prod_{p=1}^n T(\zeta_p, \kappa) \langle \kappa + \alpha | \kappa \rangle},$$

где $\lim$ означает предел бесконечной мацубаровской цепочки. Матрица плотности удовлетворяет редуцированному уравнению кКЗ

$$h(\zeta_1, \dots, \zeta_j q^{-1}, \dots, \zeta_n) = h(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \circ \mathbb{A}_{j, [1, n]}(\zeta_1, \dots, \zeta_n), \quad (4.1)$$

где $\mathbb{A}_{j, [1, n]}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ определено следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{j, [1, n]}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)(X_{[1, n]}) &= \\ &= T_{j, [1, j-1]} q^{\alpha H_j} \theta_j(\theta_j(T_{j, [j+1, n]}^{-1}) X_{[1, n]} \theta_j(T_{j, [j+1, n]}^{-1})) T_{j, [j+1, n]}, \\ T_{j, [k, m]} &= R_{j, m} \left(\frac{\zeta_j}{\zeta_m} \right) \cdots R_{j, k} \left(\frac{\zeta_j}{\zeta_k} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь $\theta(X) = C^t X C^{-1}$ $C: V^{(d)*}(q\zeta) \rightarrow V^{(d)}(\zeta)$ – изоморфизм $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ -модулей. Для практических вычислений удобно переписать (4.2), вводя два вспомогательных пространства $V_a^{(d)}(\zeta_j)$ и $V_b^{(d)}(\zeta_j)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{j, [1, n]}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)(X_{[1, n]}) &= \\ &= T_{j, [1, j-1]} q^{\alpha H_j} \text{tr}_{a, b}(P_{b, j} T_{a, [j+1, n]}^{-1} \theta_j(X_{[1, n]}) T_{b, [j+1, n]}^{-1} P_{a, j}) T_{j, [j+1, n]}. \end{aligned}$$

Перечислим некоторые свойства (4.2):

$$\mathbb{A}_{n-1,[1,n-1]}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})(X_{[1,n-1]}) = \mathbb{A}_{n-1,[1,n]}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)(X_{[1,n-1]}), \quad (4.3)$$

$$\mathbb{A}_{n,[1,n]}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)(X_{[1,n-1]}) = \mathbb{T}_{n,[1,n-1]}(\zeta_n)(q^{\alpha H_n} X_{[1,n-1]}), \quad (4.4)$$

$$\mathbb{A}_{n,[1,n]}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)(\mathbb{T}_{n,[1,n-1]}(\zeta_n q^{-1})(q^{\alpha H_n} X_{[1,n-1]})) = X_{[1,n-1]}. \quad (4.5)$$

В дополнение к редуцированному уравнению кКЗ матрица плотности имеет следующие характеристические свойства:

1) $h(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ в пределе $\zeta_n^{\pm 1} \rightarrow \infty$ сводится к $h(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1})$:

$$\begin{aligned} h(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)(X_{[1,n-1]} \otimes x_n) &\rightarrow \\ &\rightarrow h(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1})(X_{[1,n-1]}) \frac{\text{Tr}_n(q^{-\alpha H_n/2} x_n)}{\text{Tr}_n(q^{-\alpha H_n/2})}; \end{aligned} \quad (4.6)$$

2) $h(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ регулярна на диагонали $\zeta_i = \zeta_j$, $i \neq j$.

Вернемся к случаю спина $1/2$. В этом случае мы имеем выделенный базис пространства $\text{End}(V(\xi_1) \otimes \dots \otimes V(\xi_n))$,

$$g^{\epsilon_n, \dots, \epsilon_1}(\xi_n, \dots, \xi_1) = g_n^{\epsilon_n}(\xi_n) \dots g_1^{\epsilon_1}(\xi_1)(I), \quad \epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{0, \bar{0}, +, -\},$$

который удовлетворяет двойственным редуцированным уравнениям кКЗ (A.14) (напомним определение (3.12), больше объяснений дано в приложении A.3).

Роли редуцированных уравнений кКЗ и дуальных редуцированных уравнений кКЗ совершенно разные. Редуцированное уравнение кКЗ тесно связано с уравнением кКЗ на уровне -4 . Мы ищем единственное решение с указанными выше свойствами, т.е. матрицу плотности. В то же время двойственное уравнение соответствует уровню 0 . Здесь мы ищем все решения, так как наша цель состоит в построении хорошего базиса в пространстве локальных операторов. Это весьма близко к исходным уравнениям для формфакторов [24].

Рассмотрим спаривание

$$U^{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n}(\xi_1, \dots, \xi_n) = h(\xi_1, \dots, \xi_n)(g^{\epsilon_n, \dots, \epsilon_1}(\xi_n, \dots, \xi_1)), \quad (4.7)$$

где $\epsilon_j = \pm, 0, \bar{0}$. Уравнения (4.1), (A.14) приводят к следующим разностным уравнениям:

$$U^{\epsilon_1, \dots, \epsilon_j, \dots, \epsilon_n}(\xi_1, \dots, \xi_j q^{-1}, \dots, \xi_n) = (-1)^{\epsilon_j} U^{\epsilon_1, \dots, \bar{\epsilon}_j, \dots, \epsilon_n}(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n). \quad (4.8)$$

Предположим, что $\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n$ вещественны. Тогда $U^{\epsilon_1, \dots, \epsilon_j, \dots, \epsilon_n}(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n)$ является регулярной функцией $\xi_j^{1/\nu}$, так как она не имеет сингулярностей при $\arg(\xi_j) \leq \pi\nu/2$. Эта функция нечетна, если $\epsilon_j = \pm$, в то же время при $\epsilon_j = 0, \bar{0}$ она может содержать и четную, и нечетную части. Эта функция не обращается в нуль тождественно, только если $\sum \epsilon_p = 0$. Рассмотрим для определенности случай $0 < \alpha < 2$. Пусть $\epsilon_j = +$. Тогда можно показать, что

$$U^{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{cases} O(1), & \xi_j \rightarrow \infty, \\ o(1), & \xi_j \rightarrow 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Пример (A.10) весьма поучителен. В действительности он отражает общий случай. С другой стороны, легко видеть, что для $\epsilon_j = 0, \bar{0}$

$$U^{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n}(\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow U^{\epsilon_1, \dots, \widehat{\epsilon_j}, \dots, \epsilon_n}(\xi_1, \dots, \widehat{\xi_j}, \dots, \xi_n), \quad \xi_j \rightarrow 0, \infty. \quad (4.10)$$

Из (4.9) и (4.10) заключаем, что $U^{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ обращается в нуль, если по крайней мере один из ϵ_j равен $\pm$, обращается в единицу в противном случае, т. е. когда все $\epsilon_j = 0, \bar{0}$. Это означает, что в случае спина $1/2$ для бесконечной однородной мауцбаровской цепочки

$$\rho_\infty(\zeta) = 1, \quad \omega_\infty(\zeta, \xi) = 0,$$

что является важным свойством операторов рождения $b^*(\zeta)$, $c^*(\zeta)$, $t^*(\zeta)$.

Теперь мы хотим попробовать размножение. Во избежание недоразумения мы снабжаем оператор $\mathbb{A}_{j,[1,n]}$ верхними индексами $(1/2)$, (1) для двух рассматриваемых случаев. Используя (A.15), (A.16), получаем

$$\begin{aligned} g_{2n}^\epsilon(\xi_{2n}) g_{2n-1}^{\epsilon'}(\xi_{2n-1})(X_{[1,2n-2]}) &= \\ &= g_{2n}^\epsilon(\xi_{2n}) \mathbb{A}_{2n-1,[1,2n-1]}^{(1/2)} g_{2n-1}^{\epsilon'}(\xi_{2n-1} q^{-1})(X_{[1,2n-2]}) = \\ &= \mathbb{A}_{2n-1,[1,2n]}^{(1/2)} [g_{2n,[1,2n-1]}^\epsilon(\xi_{2n})]_{\xi_{2n-1} \rightarrow \xi_{2n-1} q^{-1}} g_{2n-1}^{\epsilon'}(\xi_{2n-1} q^{-1})(X_{[1,2n-2]}) = \\ &= \mathbb{A}_{2n-1,[1,2n]}^{(1/2)} [\mathbb{A}_{2n,[1,2n]}^{(1/2)}]_{\xi_{2n-1} \rightarrow \xi_{2n-1} q^{-1}} \times \\ &\times [g_{2n,[1,2n-1]}^\epsilon(\xi_{2n}) g_{2n-1}^{\epsilon'}(\xi_{2n-1})(X_{[1,2n-2]})]_{\xi_{2n-1} \rightarrow \xi_{2n-1} q^{-1}, \xi_{2n} \rightarrow \xi_{2n} q^{-1}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Удобно представить результат вычислений произведения матриц $\mathbb{A}$, вводя два вспомогательных пространства:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{2n-1,[1,2n]}^{(1/2)} [\mathbb{A}_{2n,[1,2n]}^{(1/2)}]_{\xi_{2n-1} \rightarrow \xi_{2n-1} q^{-1}}(Y_{[1,2n]}) &= T_{2n-1,[1,2n-2]} T_{2n,[1,2n-2]} q^{\alpha(\sigma_{2n-1}^3 + \sigma_{2n}^3)} \times \\ &\times \text{tr}_{a,b} \left(P_{b,2n} P_{a,2n-1} R_{2n,2n-1} \left(\frac{\xi_{2n}}{\xi_{2n-1}} \right) \theta_{2n-1} \theta_{2n}(Y_{[1,2n]}) T_{b,[1,2n-2]}^{-1} T_{a,[1,2n-2]}^{-1} \right) \times \\ &\times R_{2n-1,2n} \left(\frac{\xi_{2n-1}}{\xi_{2n}} \right). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим предел $\xi_{2n} = \zeta_n q^{1/2+\varepsilon}$, $\xi_{2n-1} = \zeta_n q^{-1/2}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Очевидно, присутствие $R_{2n-1,2n}(\xi_{2n-1}/\xi_{2n})$ проблематично, так как эта R -матрица имеет сингулярность. Предположим, однако, что в пределе

$$Y_{[1,2n]} = \mathcal{P}_{2n-1,2n}^+ Y_{[1,2n]} + Z_{[1,2n]} \varepsilon + o(\varepsilon) \quad (4.12)$$

с некоторым $Z_{[1,2n]}$. Тогда

$$\begin{aligned} \theta_{2n-1} \theta_{2n}(Y_{[1,2n]}) R_{2n-1,2n} \left(\frac{\xi_{2n-1}}{\xi_{2n}} \right) &= \\ &= \theta_{2n-1} \theta_{2n}(Y_{[1,2n]}) \mathcal{P}_{2n-1,2n}^+ + \theta_{2n-1} \theta_{2n}(Z_{[1,2n]}) \mathcal{P}_{2n-1,2n}^- + o(1). \end{aligned}$$

Теперь предел существует, мы заменяем $R_{2n,2n-1}(\xi_{2n}/\xi_{2n-1})$ на $R_{2n,2n-1}(q)$, последняя содержит проектор $\mathcal{P}_{2n-1,2n}^+$, который начинает действовать, давая в конце концов

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}_{2n-1,[1,2n]}^{(1/2)} [\mathbb{A}_{2n,[1,2n]}^{(1/2)}]_{\xi_{2n-1} \rightarrow \xi_{2n-1} q^{-1}} (Y_{[1,2n]}) \rightarrow \\ & \rightarrow \mathcal{P}_{2n-1,2n}^+ (\mathbb{A}_{\{2n-1,2n\}^+, [1,2n-2]}^{(1)}) (Y_{[1,2n]}) \mathcal{P}_{2n-1,2n}^+ + \\ & + \mathbb{A}_{\{2n-1,2n\}^+, [1,2n-2]}^{(1)} (Z_{[1,2n]}) \mathcal{P}_{2n-1,2n}^-. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Теперь напомним, что наши комбинации $\mathbf{g}_{2n,2n-1}^\delta(\zeta)$ в точности такие, что

$$Y_{[1,2n]} = \mathbf{g}_{2n,2n-1}^\delta(\zeta_n q^{-1}) (X_{[1,2n-2]})$$

удовлетворяет условию (4.12). Более того, вследствие (3.10) последний член в (4.13) несуществен. Таким образом, мы заключаем:

$$\mathbf{g}_{n,n-1}^\delta(\zeta) (X_{[1,n-1]}) = (-1)^{\delta} \mathbb{A}_{n,[1,n]}^{(1)} \bar{\mathbf{g}}_{n,n-1}^\delta(\zeta q^{-1}) (X_{[1,n-1]}), \quad (4.14)$$

здесь и далее мы полагаем

$$(-1)^{(i,j)} = (-1)^{i+j}, \quad \overline{(i,j)} = (4-j, 4-i).$$

Далее продолжаем в том же духе, что и в случае спина $1/2$, а именно: мы спариваем решение редуцированного уравнения кКЗ с оператором, порожденным $\mathbf{g}^{\delta_j}(\zeta_j)$ (индекс j относится теперь к трехмерному пространству):

$$U^{\delta_1, \dots, \delta_n}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = h(\zeta_1, \dots, \zeta_n) (\mathbf{g}_n^{\delta_n}(\zeta_n) \cdots \mathbf{g}_1^{\delta_1}(\zeta_1)(I)). \quad (4.15)$$

Как и раньше, эта функция удовлетворяет уравнению

$$U^{\delta_1, \dots, \delta_j, \dots, \delta_n}(\zeta_1, \dots, \zeta_j q^{-1}, \dots, \zeta_n) = (-1)^{\delta_j} U^{\delta_1, \dots, \overline{\delta_j}, \dots, \delta_n}(\zeta_1, \dots, \zeta_j, \dots, \zeta_n). \quad (4.16)$$

Однако в противоположность случаю спина $1/2$ мы не можем немедленно заключить, что (4.15) есть либо ноль, либо единица, потому что операторы, порожденные $\mathbf{g}_j^\delta(\zeta_j)$, содержат сингулярности на диагоналях. Следуя обсуждению в конце п. 3.3, мы хотим исключить их с помощью нормального упорядочения. Но мы не хотим “испортить” разностное уравнение. Мы достигнем всех своих целей, полагая

$$f(\zeta, \xi) = (1 + \mathbf{t}^*(\xi)) \frac{2(\zeta\xi)^{1/\nu}}{\nu(\zeta^{2/\nu} - \xi^{2/\nu})}. \quad (4.17)$$

Заметим, что мы выбрали антипериодическую по отношению к $\zeta \rightarrow \zeta q$ функцию с тем, чтобы сохранить знаки для фермионов и бозонов в (4.16). Подставляя в (4.15) нормально упорядоченное произведение $\mathbf{g}^{\delta_j}(\zeta_j)$, получаем ноль, если некоторые δ_j отличаются от $(1, 1)$, $(3, 3)$, и единицу в противном случае.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Мы показали, как построить операторы $\mathbf{b}^*(\zeta)$, $\mathbf{c}^*(\zeta)$, $\bar{\mathbf{b}}^*(\zeta)$, $\bar{\mathbf{c}}^*(\zeta)$, $\mathbf{j}^\pm(\zeta)$, $\mathbf{j}^0(\zeta)$ и $\mathbf{t}^*(\zeta)$, которые порождают квазилокальные операторы для спиновой цепочки Замолдчикова–Фатеева. Линейный функционал Z_n^κ может быть вычислен на этих квазилокальных операторах по формуле (1.2), но некоторое уточнение необходимо.

Именно, из описанного выше следует с очевидностью, что мы должны формально умножить правую часть (1.2) на $\mathcal{N}(\zeta)^{-1}$ с тем, чтобы изменить нормировку функционала Z_n^κ на подходящую для случая спина 1. Поясним это на примере окончательной формулы

$$Z_n^\kappa \{ \mathbf{j}^+(\zeta_1) \mathbf{j}^-(\zeta_2) (q^{\alpha H(0)}) \} = \frac{1}{\mathcal{N}(\zeta_1) \mathcal{N}(\zeta_2)} \begin{vmatrix} \omega(\zeta_1 q^{1/2}, \zeta_2 q^{1/2}) & \omega(\zeta_1 q^{1/2}, \zeta_2 q^{-1/2}) \\ \omega(\zeta_1 q^{-1/2}, \zeta_2 q^{1/2}) & \omega(\zeta_1 q^{-1/2}, \zeta_2 q^{-1/2}) \end{vmatrix}.$$

Как было объяснено выше, чтобы $\mathbf{j}^+(\zeta_1) \mathbf{j}^-(\zeta_2) (q^{\alpha H(0)})$ определял двухпараметрическое семейство квазилокальных операторов, его нужно нормально упорядочить.

Квазилокальные операторы порождаются

$$\mathbf{j}^+(\zeta_1) \mathbf{j}^-(\zeta_2) - \mathbf{j}^0(\zeta_2) f(\zeta_1, \zeta_2) - f(\zeta_1, \zeta_2) f(\zeta_2, \zeta_1),$$

и значение Z_n^κ на $\mathbf{j}^0(\zeta) (q^{\alpha H(0)})$ дается формулой

$$Z_n^\kappa \{ \mathbf{j}^0(\zeta) (q^{\alpha H(0)}) \} = \frac{1}{\mathcal{N}(\zeta)} [\omega(\zeta q^{1/2}, \zeta q^{-1/2}) - \omega(\zeta q^{-1/2}, \zeta q^{1/2})]_{\text{reg}}$$

согласно регуляризации в определении (3.16).

В принципе формулы такого типа позволяют вычислить Z_n^κ для любого квазилокального оператора. Однако мы не думаем, что для операторов малой длины этот способ существенно облегчает задачу по сравнению с прямым вычислением работы [21]. Мы скорее рассматриваем результаты настоящей работы как теорему существования для хорошего базиса квазилокальных операторов. Мы надеемся, что использование этого базиса позволит рассмотреть скейлинговый предел, приводящий к суперсимметричной КТП и ее массивной деформации – суперсимметричной модели синус-Гордон. С этой точки зрения настоящую работу следует рассматривать как подготовку будущих исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Обзор случая спина 1/2

В этом приложении мы резюмируем определения и свойства операторов $g_c^\epsilon(\zeta)$, использовавшихся в основном тексте. В частности, мы доказываем формулу матрицы.

А.1. Операторы $g_c^\epsilon(\zeta)$. Зафиксируем интервал $[1, n] \subset \mathbb{Z}$. При $j \in [1, n]$ обозначим через $V_j(\xi_j)$ двумерное представление алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ с эволюционным параметром ξ_j и положим

$$V_{[1, n]} = V_1(\xi_1) \otimes \cdots \otimes V_n(\xi_n).$$

Мы будем иметь дело с разными линейными операторами на $\text{End}(V_{[1, n]})$.

Начнем с присоединенного действия матриц монодромии. Пусть $W_*(\zeta)$ есть вспомогательное пространство (т. е. представление подалгебры Бореля алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$). Обозначим через $L_{*,j}(\zeta/\xi_j)$ образ универсальной R -матрицы на $W_*(\zeta) \otimes V_j(\xi)$. Для $X \in \text{End}(V_{[1, n]})$ положим

$$\begin{aligned} T_{*,[1, n]}(\zeta)(X) &= T_{*,[1, n]}(\zeta) X T_{*,[1, n]}(\zeta)^{-1}, \\ T_{*,[1, n]}(\zeta) &= L_{*,n}\left(\frac{\zeta}{\xi_n}\right) \cdots L_{*,1}\left(\frac{\zeta}{\xi_1}\right). \end{aligned}$$

Существуют разные возможности выбирать вспомогательное пространство $W_*(\zeta)$. Для нас важны две из них: двумерный модуль $W_*(\zeta) = V_a(\zeta)$ и тензорное произведение $W_*(\zeta) = V_a(\zeta) \otimes V_A(\zeta)$, где $V_A(\zeta)$ обозначает представление подалгебры Бореля q -осцилляторами

$$q^{-1}\mathbf{a}\mathbf{a}^* - q\mathbf{a}^*\mathbf{a} = q^{-1} - q, \quad q^D\mathbf{a}^*q^{-D} = q\mathbf{a}^*, \quad q^D\mathbf{a}q^{-D} = q^{-1}\mathbf{a}.$$

Формулы для соответствующих матриц монодромии $\mathbb{T}_{a,[1,n]}(\zeta)$ и $\mathbb{T}_{\{a,A\},[1,n]}(\zeta)$ можно найти в работе [9] (уравнения (2.4) и (2.19) в указанной работе).

Введем операторы $\mathbf{k}(\zeta)$, $\ell(\zeta)$, $\mathbf{f}(\zeta)$ на $\text{End}(V_{[1,n]})$ с помощью некоторых следов, включающих матрицы монодромии. Их определение зависит от спина аргумента $X \in \text{End}(V_{[1,n]})$. Мы говорим, что X имеет спин $s \in \mathbb{Z}$ и пишем $s(X) = s$, если $[(1/2)H_{[1,n]}, X] = sX$ имеет место для $H_{[1,n]} = \sum_{j=1}^n \sigma_j^3$.

Для $X \in \text{End}(V_{[1,n]})$ с $s(X) = s$ определим

$$\mathbf{k}(\zeta)(X) = \zeta^{\alpha-2s-1} \text{Tr}_{a,A} \left\{ \sigma_a^+ \mathbb{T}_{\{a,A\},[1,n]}(\zeta) q^{(\alpha-s-1)(2D_A+\sigma_a^3)} (q^{-H_{[1,n]}} X) \right\}, \quad (\text{A.1})$$

$$\ell(\zeta)(X) = \zeta^{\alpha-2s-1} \text{Tr}_{a,A} \left\{ (\sigma_a^3 - \mathbf{a}_A \sigma_a^+) \mathbb{T}_{\{a,A\},[1,n]}(\zeta) q^{(\alpha-s-1)(2D_A+\sigma_a^3)} (q^{-H_{[1,n]}} X) \right\}, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{f}(\zeta)(X) = \Delta_\zeta^{-1} \mathbf{k}(\zeta)(X). \quad (\text{A.3})$$

В (A.3) Δ_ζ^{-1} определяется интегралом

$$\Delta_\zeta^{-1} \mathbf{k}(\zeta)(X) = \int_\Gamma \Delta_\zeta^{-1} \psi \left(\frac{\zeta}{\xi}, \alpha \right) \cdot \mathbf{k}(\xi)(X) \frac{d\xi^2}{2\pi i \xi^2},$$

где контур Γ обходит полюсы $\mathbf{k}(\xi)(X)$, полюсы $\Delta_\zeta^{-1} \psi(\zeta/\xi, \alpha)$ остаются снаружи. Функция $\xi^{-\alpha} \mathbf{k}(\xi)(X)$ рациональна по ξ^2 , она ведет себя, как $O(\xi^{-2})$, при $\xi^2 = \infty$ и имеет полюсы только в $q^2 \xi_j^2, \xi_j^2, q^{-2} \xi_j^2$, $j \in [1, n]$, и в нуле при $s > 0$.

Наконец, для $\epsilon = 0, \bar{0}, +, -$ мы определяем линейные отображения

$$g_c^\epsilon(\zeta): \text{End}(V_{[1,n]}) \longrightarrow \text{End}(V_{[1,n]} \otimes V_c(\zeta)) \quad (\text{A.4})$$

следующим образом. Пусть $s(X) = s$, тогда полагаем

$$g_c^0(\zeta)(X) = \mathbb{T}_{c,[1,n]}(\zeta) (X q^{(\alpha-s)\sigma_c^3}), \quad (\text{A.5})$$

$$g_c^{\bar{0}}(\zeta)(X) = X \otimes \text{id}, \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} g_c^+(\zeta)(X) &= \frac{1}{2} \mathbf{f}(q\zeta)(X) + \frac{1}{2} \mathbf{f}(q^{-1}\zeta)(X) - g_c^0(\zeta)(\mathbf{f}(\zeta)(X)) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sigma_c^3 \mathbf{k}(\zeta)(X) + \sigma_c^+ \ell(\zeta)(X), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$g_c^-(\zeta)(X) = -q^{-\alpha+2s-2} (1 - q^{2(\alpha-2s+1)}) \left\{ (\mathbb{J} \circ g_c^+(\zeta) \circ \mathbb{J})(X) \right\} \Big|_{\alpha \rightarrow -\alpha}. \quad (\text{A.8})$$

При необходимости мы демонстрируем явно зависимость от эволюционных параметров и записываем (A.4) в виде

$$g_{c,[1,n]}^\epsilon(\zeta | \xi_1, \dots, \xi_n).$$

В этих обозначениях, например, композиция

$$\text{End}(V_{[1,n]}) \longrightarrow \text{End}(V_{[1,n]} \otimes V_{c_1}(\zeta_1)) \longrightarrow \text{End}(V_{[1,n]} \otimes V_{c_1}(\zeta_1) \otimes V_{c_2}(\zeta_2))$$

дается формулой

$$g_{c_2, [1,n] \cup c_1}^{\epsilon_2}(\zeta_2 | \xi_1, \dots, \xi_n, \zeta_1) \circ g_{c_1, [1,n]}^{\epsilon_1}(\zeta_1 | \xi_1, \dots, \xi_n). \quad (\text{A.9})$$

Для облегчения обозначений мы часто сокращаем (A.9) до $g_{c_2}^{\epsilon_2}(\zeta_2)g_{c_1}^{\epsilon_1}(\zeta_1)$, подразумевая, что пространство $V_{c_1}(\zeta_1)$ “добавлено” сначала, а $V_{c_2}(\zeta_2)$ – потом.

ПРИМЕР 1. В простейшем случае, когда $[1, n] = \emptyset$, $g_c^\epsilon(\zeta)$ действует на единичном операторе I как

$$\begin{aligned} g_c^0(\zeta)(I) &= q^{\alpha\sigma_c^3}, \\ g_c^+(\zeta)(I) &= -(q^{-1}\zeta)^{\alpha-1}\sigma_c^+, \\ g_c^-(\zeta)(I) &= q^{-1}(1 - q^{2(\alpha+1)})\zeta^{-\alpha-1}\sigma_c^-. \end{aligned}$$

Здесь и ниже

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 2. Полагая $\zeta = \zeta_2/\zeta_1$, имеем

$$\begin{aligned} g_{c_2}^+(\zeta_2)g_{c_1}^-(\zeta_1)(I) &= \Delta_\zeta^{-1}\psi(\zeta, \alpha)(I + q^{\alpha(\sigma_{c_1}^3 + \sigma_{c_2}^3)}) - \\ &- \frac{1}{2}(\Delta_\zeta^{-1}\psi(q\zeta, \alpha) + \Delta_\zeta^{-1}\psi(q^{-1}\zeta, \alpha))(q^{\alpha\sigma_{c_1}^3} + \mathbb{R}_{c_2, c_1}(\zeta)(q^{\alpha\sigma_{c_2}^3})) - \\ &- \frac{1}{2}\frac{q^\alpha + q^{-\alpha}}{q^\alpha - q^{-\alpha}}\psi(\zeta, \alpha)(q^{\alpha\sigma_{c_1}^3} - \mathbb{R}_{c_2, c_1}(\zeta)(q^{\alpha\sigma_{c_2}^3})) + \\ &+ \psi(q\zeta, \alpha)\tau_{c_1}^+\tau_{c_2}^- - \psi(q^{-1}\zeta, \alpha)\tau_{c_1}^-\tau_{c_2}^+ - \left(\frac{(q\zeta)^\alpha}{q\zeta - q^{-1}\zeta^{-1}} - \frac{(q^{-1}\zeta)^\alpha}{q^{-1}\zeta - q\zeta^{-1}} \right) \sigma_{c_1}^-\sigma_{c_2}^+, \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

$$g_{c_2}^-(\zeta_2)g_{c_1}^+(\zeta_1)(I) = -\{\mathbb{J}(g_{c_2}^+(\zeta_2)g_{c_1}^-(\zeta_1)(I))\}|_{\alpha \rightarrow -\alpha}. \quad (\text{A.11})$$

A.2. Операторы $g_{\text{rat}, c}^\epsilon(\zeta)$. Соглашения и обозначения, принятые здесь, немного отличаются от использовавшихся в работах [9], [10]. Объясним точное соответствие.

Для этого нам нужны операторы уничтожения

$$x^\pm(\zeta), \bar{x}^\pm(\zeta): \text{End}(V_{[1,n]}) \longrightarrow \text{End}(V_{[1,n]}).$$

Определим для $X \in \text{End}(V_{[1,n]})$ с $s(X) = s$

$$\begin{aligned} x^+(\zeta)(X) &= \int_{\Gamma_0} \psi\left(\frac{\zeta}{\xi}, \alpha\right) (\mathbf{k}(q\xi) + \mathbf{k}(q^{-1}\xi))(X) \frac{d\xi^2}{2\pi i \xi^2}, \\ \bar{x}^+(\zeta)(X) &= \int_{\Gamma_0} \psi\left(\frac{\zeta}{\xi}, \alpha\right) \mathbf{k}(\xi)(X) \frac{d\xi^2}{2\pi i \xi^2}, \\ x^-(\zeta)(X) &= q^{-\alpha+2s-2}(1 - q^{2(\alpha-2s+1)}) \times \{\mathbb{J} \circ x^+(\zeta) \circ \mathbb{J}(X)\}|_{\alpha \rightarrow -\alpha}. \end{aligned}$$

Контур Γ_0 обходит $\xi^2 = \xi_j^2$ для всех j .

Рассмотрим оператор

$$\mathbf{f}_{\text{rat}}(\zeta)(X) = \int_{\Gamma} \Delta^{-1} \psi \left(\frac{\zeta}{\xi}, \alpha \right) \times \\ \times \left(\mathbf{k}(\xi) - \bar{x}^+(\xi) - \frac{1}{2} (x^+(q\xi) + x^+(q^{-1}\xi)) \right) (X) \frac{d\xi^2}{2\pi i \xi^2}. \quad (\text{A.12})$$

Определим далее $g_{\text{rat},c}^{\pm}(\zeta)$, заменяя $\mathbf{f}(\zeta)$ на $\mathbf{f}_{\text{rat}}(\zeta)$ в определениях (A.7), (A.8). Тогда коэффициенты $g_{\text{rat},c}^{\pm}(\zeta)$ являются рациональными функциями ζ^2 с точностью до общего степенного множителя.

Будем писать $\mathbf{b}_{\Pi,[1,n]}^*(\zeta, \alpha)$ и т. д. для операторов, определенных в работе [9] для однородного случая. Тогда для $X \in \text{End}(V_{[1,n]})$ с $s(X) = s$ имеем

$$g_{\text{rat},c}^+(\zeta)(X) = \frac{1}{2} \mathbf{b}_{\Pi,[1,n] \cup c}^*(\zeta, \alpha - s - 1)(X), \\ g_{\text{rat},c}^-(\zeta)(X) = \frac{1}{2} \mathbf{c}_{\Pi,[1,n] \cup c}^*(\zeta, \alpha - s + 1)(X), \\ g_c^0(\zeta)(X) = \frac{1}{2} \mathbf{t}_{\Pi,[1,n] \cup c}^*(\zeta, \alpha - s)(X), \\ x^+(\zeta)(X) = 2\mathbf{c}_{\Pi,[1,n]}(\zeta, \alpha - s - 1)(X), \\ x^-(\zeta)(X) = 2\mathbf{b}_{\Pi,[1,n]}(\zeta, \alpha - s + 1)(X).$$

В правых частях произведения с индексом $[1, n] \cup c$ обозначают $V_1(\xi_1) \otimes \cdots \otimes V_n(\xi_n) \otimes V_c(\zeta)$. Фактор 2 возникает из-за использования нормированного следа.

А.3. Двойственное редуцированное уравнение кКЗ. В дополнение к $g_c^0(\zeta)$, $g_c^{\pm}(\zeta)$ мы используем тавтологический оператор $g_c^0(\zeta)$, определенный в (3.12). Действуя операторами (A.5)–(A.8) на единицу, мы получаем набор из 4^n локальных операторов:

$$g^{\epsilon_n, \dots, \epsilon_1}(\xi_n, \dots, \xi_1) = g_n^{\epsilon_n}(\xi_n) \cdots g_1^{\epsilon_1}(\xi_1)(I), \quad \epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{0, \bar{0}, +, -\}. \quad (\text{A.13})$$

Для общих $\xi_1, \dots, \xi_n$ это дает базис пространства $\text{End}(V_{[1,n]})$ (см. лемму 5.1 в [9]).

Базис (A.13) обладает замечательным свойством: он удовлетворяет двойственным редуцированным уравнениям кКЗ

$$g^{\epsilon_n, \dots, \epsilon_j, \dots, \epsilon_1}(\xi_n, \dots, \xi_j, \dots, \xi_1) = \\ = (-1)^{\epsilon_j} \mathbb{A}_{j,[1,n]}(\xi_1, \dots, \xi_n) \circ g^{\epsilon_n, \dots, \bar{\epsilon}_j, \dots, \epsilon_1}(\xi_n, \dots, \xi_j q^{-1}, \dots, \xi_1), \quad (\text{A.14})$$

где мы положили $\bar{\epsilon} = \epsilon$ для $\epsilon = \pm$. Операторы $\mathbb{A}_{j,[1,n]}$ определяются в (4.2).

Двойственное редуцированное уравнение кКЗ (A.14) является следствием двух тождеств, которые по историческим причинам называются первым и вторым разностными уравнениями.

Первое разностное уравнение имеет вид

$$g_{n,[1,n-1]}^{\epsilon}(\xi_n | \xi_1, \dots, \xi_{n-1})(X_{[1,n-1]}) = \\ = (-1)^{\epsilon} \mathbb{A}_{n,[1,n]}(\xi_1, \dots, \xi_n) (g_{n,[1,n-1]}^{\bar{\epsilon}}(q^{-1}\xi_n | \xi_1, \dots, \xi_{n-1})(X_{[1,n-1]})) \quad (\text{A.15})$$

для $X_{[1,n-1]}$, действующего как единичный на n -й компоненте. Для $\epsilon = 0, \bar{0}$ это парафраз (4.4), (4.5). Существенный случай $\epsilon = +$ доказан в работе [10] (лемма Б.2 в указанной работе).

Второе разностное уравнение

$$\begin{aligned} g_{n,[1,n-1]}^\epsilon(\xi_n | \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \circ \mathbb{A}_{n-1,[1,n-1]}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) &= \\ &= \mathbb{A}_{n-1,[1,n]}(\xi_1, \dots, \xi_n) \circ g_{n,[1,n-1]}^\epsilon(\xi_n | \xi_1, \dots, q^{-1}\xi_{n-1}) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

не использовалось в работе [10], но оно может быть выведено тем же (даже с некоторыми упрощениями) способом, что и (A.15).

А.4. Индуктивный предел. Будучи построены через матрицы монодромии, $g_c^\epsilon(\zeta)$ обладают R -матричной симметрией. Именно,

$$\begin{aligned} g_{c,[1,n]}^\epsilon(\zeta_1 | \xi_1, \dots, \xi_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) \mathbb{R}_{j+1,j} \left(\frac{\xi_{j+1}}{\xi_j} \right) &= \\ &= \mathbb{R}_{j+1,j} \left(\frac{\xi_{j+1}}{\xi_j} \right) g_{c,[1,j-1] \cup \{j+1\} \cup \{j\} \cup [j+2,n]}^\epsilon(\zeta_1 | \xi_1, \dots, \xi_{j+1}, \xi_j, \dots, \xi_n). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Кроме того, $g_c^\epsilon(\zeta)$ обладают следующим свойством правой редукции: если $n < N$ и $X_{[1,n]} \in \text{End}(V_{[1,n]})$, то

$$\begin{aligned} g_{c,[1,N]}^\epsilon(\zeta | \xi_1, \dots, \xi_N)(X_{[1,n]}) &= \\ &= \mathbb{T}_{c,[n+1,N]}(\zeta | \xi_{n+1}, \dots, \xi_N) g_{c,[1,n]}^\epsilon(\zeta | \xi_1, \dots, \xi_n)(X_{[1,n]}). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Для $\epsilon = 0$ это очевидно. Нетривиальный случай $\epsilon = +$ следует из леммы 3.7 работы [9]. В работе [9] мы рассматривали $g_{\text{rat},c}^\epsilon(\zeta)$, но предыдущее равенство верно и для $g_c^\epsilon(\zeta)$, отличающегося от $g_{\text{rat},c}^\epsilon(\zeta)$ только операторами уничтожения.

Из (A.18) можно вывести редукционное свойство для композиции (A.9):

$$\begin{aligned} g_{c_2,[1,n] \cup c_1}^{\epsilon_2}(\zeta_2 | \xi_1, \dots, \xi_N, \zeta_1) g_{c_1,[1,N]}^{\epsilon_1}(\zeta_1 | \xi_1, \dots, \xi_N)(X_{[1,n]}) &= \\ &= g_{c_2,[1,n] \cup c_1}^{\epsilon_2}(\zeta_2 | \xi_1, \dots, \xi_N, \zeta_1) \mathbb{T}_{c_1,[n+1,N]}(\zeta_1 | \xi_{n+1}, \dots, \xi_N) \times \\ &\quad \times g_{c_1,[1,n]}^{\epsilon_1}(\zeta_1 | \xi_1, \dots, \xi_n)(X_{[1,n]}) = \\ &= \mathbb{T}_{c_1,[n+1,N]}(\zeta_1 | \xi_{n+1}, \dots, \xi_N) g_{c_2,[1,n] \cup c_1 \cup [n+1,N]}^{\epsilon_2}(\zeta_2 | \xi_1, \dots, \xi_n, \zeta_1, \xi_{n+1}, \dots, \xi_N) \times \\ &\quad \times g_{c_1,[1,n]}^{\epsilon_1}(\zeta_1 | \xi_1, \dots, \xi_n)(X_{[1,n]}) = \\ &= \mathbb{T}_{c_1,[n+1,N]}(\zeta_1 | \xi_{n+1}, \dots, \xi_N) \mathbb{T}_{c_2,[n+1,N]}(\zeta_2 | \xi_{n+1}, \dots, \xi_N) \times \\ &\quad \times g_{c_2,[1,n] \cup c_1}^{\epsilon_2}(\zeta_2 | \xi_1, \dots, \xi_n, \zeta_1) g_{c_1,[1,n]}^{\epsilon_1}(\zeta_1 | \xi_1, \dots, \xi_n)(X_{[1,n]}). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

В третьем равенстве мы использовали R -матричную симметрию (A.17).

Зафиксируем $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ таким образом, что $\xi_j = 1$ для $j \gg 1$. Правая часть (A.18) может быть переписана как

$$\check{\mathbb{R}}_{c,N} \left(\frac{\zeta}{\xi_N} \right) \dots \check{\mathbb{R}}_{n+2,n+1} \left(\frac{\zeta}{\xi_{n+1}} \right) g_{n+1,[1,n]}^\epsilon(\zeta | \xi_1, \dots, \xi_n)(X_{[1,n]}).$$

Следовательно, используя те же аргументы, что и в разделе 2, убеждаемся, что индуктивный предел

$$g^\epsilon(\zeta)(X_{[1,n]}) := \lim_{N \rightarrow \infty} g_{c,[1,N]}^\epsilon(\zeta | \xi_1, \dots, \xi_n)(X_{[1,n]}) \quad (\text{A.20})$$

хорошо определен как формальный степенной ряд по $\zeta^2 - 1$. Для любого наперед заданного p для достаточно большого N справедливо

$$\begin{aligned} g^\epsilon(\zeta)(X_{[1,n]}) &\equiv \\ &\equiv \text{Tr}_c \{ \mathbb{T}_{c,[n+1,N]}(\zeta | \xi_{n+1}, \dots, \xi_N) g_{c,[1,n]}^\epsilon(\zeta | \xi_1, \dots, \xi_n)(X_{[1,n]}) \} \mod (\zeta^2 - 1)^p. \end{aligned}$$

Устремляя N к бесконечности, заключаем, что

$$\begin{aligned} g^{\epsilon_2}(\zeta_2) g^{\epsilon_1}(\zeta_1)(X_{[1,n]}) &= \\ &= \text{Tr}_{c_1, c_2} \{ \mathbb{T}_{c_1, [n+1, \infty)}(\zeta_1) \mathbb{T}_{c_2, [n+1, \infty)}(\zeta_2) g_{c_2}^{\epsilon_2}(\zeta_2) g_{c_1}^{\epsilon_1}(\zeta_1)(X_{[1,n]}) \}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Очевидно, что в общем случае имеем

$$\begin{aligned} g^{\epsilon_k}(\zeta_k) \cdots g^{\epsilon_1}(\zeta_1)(X_{[1,n]}) &= \\ &= \text{Tr}_{c_1, \dots, c_k} \{ \mathbb{T}_{c_1, [n+1, \infty)}(\zeta_1) \cdots \mathbb{T}_{c_k, [n+1, \infty)}(\zeta_k) g_{c_k}^{\epsilon_k}(\zeta_k) \cdots g_{c_1}^{\epsilon_1}(\zeta_1)(X_{[1,n]}) \}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Сделаем замечание по поводу коммутационных соотношений. Переписывая правую часть (A.21) в виде

$$\text{Tr}_{c_1, c_2} \left\{ \mathbb{T}_{c_2, [n+1, \infty)}(\zeta_2) \mathbb{T}_{c_1, [n+1, \infty)}(\zeta_1) \mathbb{R}_{c_1, c_2} \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right) g_{c_2}^{\epsilon_2}(\zeta_2) g_{c_1}^{\epsilon_1}(\zeta_1)(X_{[1,n]}) \right\}$$

и сравнивая с $g^{\epsilon_1}(\zeta_1) g^{\epsilon_2}(\zeta_2)(X_{[1,n]})$, видим, что

$$g^{\epsilon_1}(\zeta_1) g^{\epsilon_2}(\zeta_2) = (-)^{\epsilon_1 \epsilon_2} g^{\epsilon_2}(\zeta_2) g^{\epsilon_1}(\zeta_1) \quad (\text{A.23})$$

эквивалентно

$$g_{c_1}^{\epsilon_1}(\zeta_1) g_{c_2}^{\epsilon_2}(\zeta_2) = (-1)^{\epsilon_1 \epsilon_2} \mathbb{R}_{c_1, c_2} \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right) g_{c_2}^{\epsilon_2}(\zeta_2) g_{c_1}^{\epsilon_1}(\zeta_1). \quad (\text{A.24})$$

В основном тексте мы расширили предел (A.20) дополнительно с тем, чтобы определить операторы, действующие на пространстве $\mathcal{W}^{(\alpha)}$ квазилокальных операторов

$$x^{\epsilon*}(\zeta) (q^{(\alpha-s+\epsilon)H(0)} \mathcal{O}) = q^{(\alpha-s)H(0)} g^\epsilon(\zeta) (\mathcal{O}_{[1,n]}),$$

где оператор $\mathcal{O}$ локализован на интервале $[1, n]$. Соотношение (A.23) есть не что иное, как (анти)коммутативность операторов $b^*(\zeta) = x^{+*}(\zeta)$, $c^*(\zeta) = x^{-*}(\zeta)$ и $t^*(\zeta) = x^{0*}(\zeta)$. Последнее коммутационное соотношение было доказано в работе [23] косвенным образом с использованием результатов [10].

А.5. Средние. Основной результат работы [10] состоит в том, что средние (значения функционала Z_n^κ) квазилокальных полей в фермионном базисе выражаются через детерминанты от простейшего из них:

$$\omega(\zeta, \xi) = Z_n^\kappa \{ b^*(\zeta) c^*(\xi) (q^{\alpha H(0)}) \}.$$

Точное соответствие с функцией, использовавшейся в работе [10], следующее.

Предположим, что в мацубаровском направлении мы имеем $\mathbf{n}$ узлов со спинами $(d_{\mathbf{m}} - 1)/2$ и эволюционными параметрами $\tau_{\mathbf{m}}$, и положим

$$a(\zeta) = \prod_{\mathbf{m}=1}^{\mathbf{n}} \left(\frac{q^{d_{\mathbf{m}}} \zeta^2}{\tau_{\mathbf{m}}^2} - 1 \right), \quad d(\zeta) = \prod_{\mathbf{m}=1}^{\mathbf{n}} \left(\frac{q^{2-d_{\mathbf{m}}} \zeta^2}{\tau_{\mathbf{m}}^2} - 1 \right).$$

Обозначим через $\omega_{\text{III}}(\zeta, \xi)$ функцию, определенную в работе [10] (см. уравнение (7.2) в указанной работе). Тогда имеем

$$\omega(\zeta, \xi) = \frac{1}{4}\omega_{\text{III}}(\zeta, \xi) + \frac{1}{4}\overline{D}_\zeta \overline{D}_\xi \Delta_\zeta^{-1} \psi\left(\frac{\zeta}{\xi}, \alpha\right), \quad (\text{A.25})$$

где

$$\overline{D}_\zeta f(\zeta) = f(\zeta q) + f(\zeta q^{-1}) - 2\rho(\zeta)f(\zeta), \quad \rho(\zeta) = \frac{T(\zeta, \kappa + \alpha)}{T(\zeta, \kappa)}.$$

Функция $\omega(\zeta, \xi)$ имеет сингулярности в $\zeta = \xi q^{\pm 1}$ с сингулярной частью

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}\omega_{\text{III, symm}}(\zeta, \xi) + \frac{1}{4}\overline{D}_\zeta \overline{D}_\xi \Delta_\zeta^{-1} \psi\left(\frac{\zeta}{\xi}, \alpha\right) = \\ & = (1 + \rho(\zeta)\rho(\xi))\Delta_\zeta^{-1} \psi\left(\frac{\zeta}{\xi}, \alpha\right) - \rho(\xi)\Delta_\zeta^{-1} \psi\left(q\frac{\zeta}{\xi}, \alpha\right) - \rho(\zeta)\Delta_\zeta^{-1} \psi\left(q^{-1}\frac{\zeta}{\xi}, \alpha\right) + \\ & + \frac{1}{4}\frac{a(\xi)d(\zeta)}{T(\xi, \kappa)T(\zeta, \kappa)}\psi\left(q\frac{\zeta}{\xi}, \alpha\right) - \frac{1}{4}\frac{a(\zeta)d(\xi)}{T(\zeta, \kappa)T(\xi, \kappa)}\psi\left(q^{-1}\frac{\zeta}{\xi}, \alpha\right). \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Допустимость $g_{c_1, c_2}^{(2,2)}(\zeta)$

В этом приложении мы доказываем допустимость $g_{c_1, c_2}^{(2,2)}(\zeta)$. Рассмотрим комбинацию

$$G(\zeta_2, \zeta_1) = g_{c_2}^+(\zeta_2)g_{c_1}^-(\zeta_1) + g_{c_2}^-(\zeta_2)g_{c_1}^+(\zeta_1).$$

Возможные полюсы $G(\zeta_2, \zeta_1)$ по переменной ζ_2/ζ_1 расположены на сдвинутых диагоналях $\zeta_2/\zeta_1 = q^m$. Известно, что полюс, отвечающий $m = 0$, отсутствует [9]. Кроме того, коммутационные соотношения подразумевают

$$G(\zeta, \zeta) = 0. \quad (\text{B.1})$$

С другой стороны, редуцированное уравнение кКЗ записывается как

$$\begin{aligned} G(\zeta_2, \zeta_1) &= -R_{c_2, c_1}\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right)q^{\alpha H_{c_2}}\theta_{c_2}\left(G(\zeta_2 q^{-1}, \zeta_1)\theta_{c_2}\left(R_{c_2, c_1}\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right)^{-1}\right)\right) = \\ &= -q^{\alpha H_{c_1}}\theta_{c_1}\left(\theta_{c_1}\left(R_{c_1, c_2}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^{-1}\right)G(\zeta_2, \zeta_1 q^{-1})\right)R_{c_1, c_2}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Объединяя (Б.1) и (Б.2), находим, что $G(\zeta_2, \zeta_1)$ регулярна в $\zeta_2/\zeta_1 = q^m$ для всех $m \in \mathbb{Z}$. Более того, первое из уравнений (Б.2) подразумевает, что $G(q\zeta, \zeta) = \mathcal{P}_{c_1, c_2}^+ G(q\zeta, \zeta)$, что доказывает допустимость $G(q\zeta, \zeta)$.

Благодарности. М. Джимбо и Т. Мива выражают благодарность А. Ключмперу и Дж. Судзуки за обсуждения. Исследования М. Джимбо поддержаны грантом Grant-in-Aid for Scientific Research B-23340039. Исследования Т. Мивы поддержаны грантом Grant-in-Aid for Scientific Research B-22340031. Исследования Ф. А. Смирнова поддержаны программой DIADEMS (ANR), номер контракта BLAN012004.

Список литературы

- [1] H. Boos, V. Korepin, *J. Phys. A*, **34**:26 (2001), 5311–5316.
- [2] H. E. Boos, V. E. Korepin, “Evaluation of integrals representing correlations in XXX Heisenberg spin chain”, *MathPhys Odyssey 2001*, Progress in Mathematical Physics, **23**, eds. M. Kashiwara, T. Miwa, Birkhäuser, Boston, MA, 2002, 65–108.
- [3] M. Jimbo, T. Miwa, *Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **85**, AMS, Providence, RI, 1995.
- [4] N. Kitanine, J.-M. Maillet, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **567**:3 (2000), 554–582.
- [5] H. E. Boos, V. E. Korepin, F. A. Smirnov, *Nucl. Phys. B*, **658**:3 (2003), 417–439.
- [6] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, Y. Takeyama, *Алгебра и анализ*, **17**:1 (2005), 115–159.
- [7] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, Y. Takeyama, *Commun. Math. Phys.*, **261**:1 (2006), 245–276.
- [8] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, Y. Takeyama, *Commun. Math. Phys.*, **272**:1 (2007), 263–281.
- [9] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, Y. Takeyama, *Commun. Math. Phys.*, **286**:3 (2009), 875–932.
- [10] M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, *J. Phys. A*, **42**:30 (2009), 304018, 31 pp.
- [11] M. Rigol, V. Dunjko, V. Yurovsky, M. Olshanii, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:5 (2007), 050405, 4 pp.
- [12] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, *Commun. Math. Phys.*, **299**:3 (2010), 825–866.
- [13] M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, “On one-point functions of descendants in sine-Gordon model”, *New Trends in Quantum Integrable Systems* (Kyoto, Japan, 27–31 July, 2009), eds. B. Feigin, M. Jimbo, M. Okado, World Sci., Singapore, 2010, 117–137.
- [14] M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, *Lett. Math. Phys.*, **96**:1–3 (2011), 325–365.
- [15] Al. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **348**:3 (1991), 619–641.
- [16] S. Negro, F. Smirnov, *Reflection equation and fermionic basis*, arXiv:1304.1860.
- [17] S. Negro, F. Smirnov, *Nucl. Phys. B*, **875**:1 (2013), arXiv:1306.1476.
- [18] V. Fateev, D. Fradkin, S. Lukyanov, A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **540**:3 (1999), 587–609.
- [19] А. Б. Замолодчиков, В. А. Фатеев, *ЯФ*, **32**:2 (1980), 581–590.
- [20] N. Kitanine, *J. Phys. A*, **34**:39 (2001), 8151–8169.
- [21] A. Klümper, D. Nawrah, J. Suzuki, *Correlation functions of the integrable isotropic spin-1 chain: algebraic expressions for arbitrary temperature*, arXiv:1304.5512.
- [22] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, Y. Takeyama, *PoS*, 2007, 015, 34 pp.
- [23] M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, “Fermions acting on quasi-local operators in the XXZ model”, *Symmetries, Integrable Systems and Representations* (Tokyo, Japan, July 25–29, 2011), Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **40**, eds. K. Iohara, S. Morier-Genoud, B. Remy, Springer, Heidelberg, 2013, 243–261.
- [24] F. Smirnov, *Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory*, Advanced Series in Mathematical Physics, **14**, World Sci., Singapore, 1992.

Поступила в редакцию 27.02.2014