Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Борисов, С. А. Зыков, Одевающая цепочка дискретных симметрий и раз-
множение нелинейных уравнений, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 2, 199–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf867>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:26:48

© 1998 г.

А. Б. Борисов*, С. А. Зыков*

ОДЕВАЮЩАЯ ЦЕПОЧКА ДИСКРЕТНЫХ СИММЕТРИЙ И РАЗМНОЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

На примере уравнений синус-Гордон и Кортевега–де Фриза (КдФ) предложен прямой способ размножения интегрируемых уравнений при помощи одевающих цепочек (дискретных симметрий). Представлена рекуррентная (в общем случае с конечным числом шагов) процедура, позволяющая на каждом шаге по известной L - A -паре интегрируемого уравнения последовательно получать другую интегрируемую систему и ее L - A -пару. Алгоритм позволяет воспроизвести ряд известных результатов по интегрируемым системам КдФ-типа. Найдено новое интегрируемое уравнение серии синус-Гордон. Исследовано его простейшее солитонное решение типа двойного π -кинка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Создание метода обратной задачи рассеяния [1] при исследовании уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) оказало важное влияние на теоретическую физику и ряд направлений математики. В основе этого метода лежит нелокальное преобразование, переводящее нелинейное уравнение в линейное, связанное с задачей рассеяния. Алгебраическим механизмом, лежащим в основе работы [1], является возможность представления ряда нелинейных уравнений как условия совместности некоторой вспомогательной линейной системы дифференциальных уравнений (L - A -пары Лакса), зависящей от параметра λ и содержащей в качестве коэффициентов решения рассматриваемого уравнения. Так, знаменитое уравнение КдФ

$$E_0(u) \equiv u_t - u_{xxx} + 6uu_x = 0 \quad (1)$$

является условием совместности $\psi_{xt} = \psi_{tx}$ двух дифференциальных операторов для вспомогательной функции $\psi(x, t)$

$$\begin{aligned} L\psi &= (-\partial_x^2 + u)\psi = \lambda\psi, \\ A\psi &= \psi_t = (-4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x)\psi. \end{aligned} \quad (2)$$

---

*Институт физики металлов УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Это условие имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] \equiv (E_0(u))\lambda = 0.$$

Одним из важных направлений развития метода обратной задачи является выявление новых физических систем, интегрируемых этим методом или его обобщениями. Для решения этой задачи за последние тридцать лет было предложено не только несколько методов для проверки интегрируемости нелинейных систем [2], но и найдены конструктивные способы распознавания интегрируемых систем. Как указано в [3], все эти методы кажутся совершенно различными и каждый из них имеет свои положительные и отрицательные стороны. Обсудим кратко лишь некоторые из них.

Метод псевдопотенциалов Эстабрука–Уолквиста [4] основан на возможности представления интегрируемого уравнения как условия совместности переопределенной системы линейных дифференциальных уравнений. Его реализация и построение аналога L – A -пары связаны с возможностью разрешения соответствующей алгебры Ли.

Классификация интегрируемых гамильтоновых моделей [5] основана на понятии r -матрицы, которая определяется решением функционального уравнения Янга–Бакстера и допускает эффективное квантовое обобщение.

Метод Захарова–Шульмана [6] показывает, что существование бесконечного числа интегралов движения связано со свойствами коэффициентов Фурье разложения гамильтониана по нормальным модам линейной системы на резонансной поверхности. Этот метод дает эффективный способ определения существования дополнительных (помимо классических) интегралов движения.

Простой способ определения класса интегрируемых уравнений основывается на необходимости существования высших симметрий. Этот метод позволяет получить полные списки интегрируемых уравнений сравнительно простого вида [7].

Метод одевания [8] оказывается не только эффективным при построении точных решений с помощью матричной задачи Римана, но и приводит к широкому классу нелинейных моделей. Необходимой принадлежностью этого метода является наличие переопределенной системы линейных дифференциальных уравнений с общей зависимостью от спектрального параметра.

Наконец, в последнее время для проверки интегрируемости конкретной нелинейной классической системы активно используется выполнимость свойства Пенлеве. Предполагается, что нелинейная система интегрируема, если ее решение $\vec{u}(\vec{r}, t)$ допускает разложение в ряд Лорана в окрестности многообразия особенностей $\vec{\Phi}(\vec{r}, t) = 0$. Этот метод естественно приводит к преобразованию Бэклунда, представлению Хироты и переопределенной системе дифференциальных уравнений (паре Лакса) для вспомогательных функций, которые выражаются через функции $\vec{\Phi}(\vec{r}, t)$ [9, 10].

Наиболее интересные с физической точки зрения солитонные и конечнозонные решения интегрируемых систем тесно связаны со спектральными свойствами соответствующих операторов Лакса. В их спектре имеется конечное число дискретных собственных

значений или конечное число запрещенных зон. Однако для многих важных физических приложений необходимо построить точные решения с различным асимптотическим поведением, в том числе и медленно убывающие. Данное обстоятельство приводит к необходимости построения операторов Лакса с бесконечным числом собственных значений. Для этой цели наиболее эффективен предложенный в работе [11] для уравнения КдФ метод одевающих цепочек, который обобщает на определенный класс операторов известный в квантовой механике метод факторизации [12]. Согласно этому методу собственные значения оператора $L = -\partial_x^2 + u$ могут быть определены следующим образом.

Положим $L = L_0$, где $L_0 = a_0^+ a_0 + \lambda_0$ с некоторым числом λ_0 . При известном виде операторов a_0 определим оператор $L_1 = a_0 a_0^+ + \lambda_0$ и представим его снова в виде $L_1 = a_1^+ a_1 + \lambda_1 = -\partial_x^2 + u_1$. Продолжая этот процесс, мы рассматриваем серию операторов $L_{j+1} = -\partial_x^2 + u_{j+1} = a_{j+1}^+ a_{j+1} + \lambda_{j+1} = a_j a_j^+ + \lambda_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$). Эти соотношения равносильны конечной или бесконечной системе уравнений для функций f_j :

$$f_{j+1,x} + f_{j+1}^2 = -f_{j,x} + f_j^2 - \lambda_{j+1} + \lambda_j, \quad (3)$$

$$u_{j+1} = u_j - 2f_{j,x}, \quad (4)$$

определяющих явный вид факторизующих операторов $a_j = \partial_x + f_j$, $a_j^+ = -\partial_x + f_j$. При неограниченной последовательности $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ и выполнении неравенств $\lambda_j < \lambda_{j+1}$ величины λ_j совпадают с дискретным спектром оператора L_j . В силу соотношений

$$L_{j+1} a_j = a_j L_j, \quad L_j a_j^+ = a_j^+ L_{j+1}$$

оператор a_j является оператором преобразования для пары операторов L_{j+1} и L_j : если $\psi_i(j)$ – собственная функция оператора L_j с собственным значением λ_i , то $a_j \psi_i(j)$ – собственный вектор оператора L_{j+1} с тем же собственным значением, т.е.

$$L_{j+1} a_j \psi_i(j) = \lambda_i a_j \psi_i(j).$$

Аналогичное утверждение верно и для оператора a_j^+ , переводящего собственную функцию $\psi_i(j+1)$ оператора L_{j+1} в собственную функцию $a_j^+ \psi_i(j+1)$ оператора L_j . Для основного состояния $\psi_j(j)$ оператора L_j , $L_j \psi_j(j) = \lambda_j \psi_j(j)$, мы получаем $a_j \psi_j(j) = 0$, и, следовательно, функции $\psi_j(j)$ связаны простым образом с функциями f_j одевающей цепочки, $f_j = -\partial_x (\ln \psi_j(j))$. Как показано в работе [11], решения периодически замкнутой цепочки ($f_{j+N} = f_j$, $\lambda_j = \lambda_{j+N}$) порождают N -зонные потенциалы оператора Шредингера, а при условиях $f_j = f_{j+N}$, $\lambda_{j+N} = \lambda_j + \alpha$ операторы L_j имеют дискретный спектр, состоящий из N арифметических прогрессий с разностью α . Отметим, что потенциалы с дискретным спектром, подобным гармоническому осциллятору, были найдены в работах [13] оригинальным операторным методом. Наконец, условие $f_{j+1}(x) = q f_j(qx)$, $q < 1$, приводит к классу самоподобных потенциалов с бесконечным дискретным спектром $\lambda_j = q^{2j} \lambda_0$ [14].

Цель этой работы – предложить прямой способ размножения интегрируемых уравнений при помощи одевающей цепочки. На примере уравнений КдФ и синус-Гордон (СГ) мы излагаем алгоритм, который на каждом шаге позволяет по известной L - A -паре и одевающей цепочке (дискретной симметрии) последовательно получать другую интегрируемую систему и ее L - A -пару. Получаемые предлагаемым алгоритмом дифференциальные уравнения в частных производных связаны или соотношением

$$E_n(u_n) = M_n(u_{n+1})E_{n+1}(u_{n+1}), \quad (5)$$

или соотношением

$$E_n(u_n) = \widetilde{M}_n(u_{n+1})E_{n+1}(u_{n+1}), \quad (6)$$

где $E_n(u_n)$ обозначают дифференциальные уравнения $E_n(u_n) = 0$ для полей $u_n(x, t)$. Оператор M_n является производной Фреше:

$$M_n(u_{n+1}) = \frac{\partial u_n}{\partial u_{n+1}} + \frac{\partial u_n}{\partial u_{n+1,x}} \frac{d}{dx} + \frac{\partial u_n}{\partial u_{n+1,t}} \frac{d}{dt},$$

а дифференциальный оператор $\widetilde{M}_n$ определяется как

$$\widetilde{M}_n(u_{n+1}) = \frac{\partial u_n}{\partial u_{n+1}} + \frac{d}{dx} \frac{\partial u_n}{\partial u_{n+1,x}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial u_n}{\partial u_{n+1,t}}.$$

Поле u_{n+1} удовлетворяет переопределенной системе линейных дифференциальных уравнений (L_n - A_n -паре, где u_{n+1} – волновая функция) с коэффициентами, зависящими от полей u_n и их производных

$$u_{n,\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} u_n \quad (\mu = 0, 1; \quad x_0 = t, \quad x_1 = x)$$

и спектрального параметра λ_n . Исключение поля u_n из этой системы определяет вид функции $u_n = u_n(u_{n+1}, u_{n+1,\mu}, \lambda_n)$ (преобразование Миуры) и приводит к уравнению $E_{n+1}(u_{n+1}, \lambda_n) = 0$. Из преобразования Дарбу операторов L_n, A_n следуют две одевающие цепочки дискретных симметрий (преобразований Бэклунда). Оно реализуется дифференциальным многообразием $f_\mu(u_{n+1,\mu}, v_{n+1,\mu}, u_{n+1}, v_{n+1}, \lambda_n, \lambda_{n+1}) = 0$, при этом поля v_{n+1} удовлетворяют уравнению $E_{n+1}(u_{n+1} \rightarrow v_{n+1}, \lambda_n \rightarrow \lambda_{n+1}) = 0$. Определенная, самосогласованная с преобразованием Дарбу процедура замены переменных $v_{n+1} = v_{n+1}(u_{n+1}, u_{n+1,\mu}, u_{n+2})$ преобразует это многообразие в L_{n+1} - A_{n+1} -пару (для уравнения $E_{n+1}(u_{n+1}, \lambda_n) = 0$) со спектральным параметром λ_{n+1} для вспомогательной переменной u_{n+2} .

В качестве $E_0(u_0)$ мы выбрали уравнение КдФ и уравнение СГ. Мы не доказали, что полученная последовательность уравнений является неограниченной. Однако мы не только воспроизводим уже известные интегрируемые системы, связанные с уравнением КдФ ($n = 0, 1, 2, 3$) [15], но и получаем новое, связанное с серией ($n = 0, 1, 2$) уравнение СГ.

2. ПРОЦЕДУРА ОДЕВАНИЯ УРАВНЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ КДФ

В этом разделе мы находим ряд интегрируемых систем, связанных с уравнением КДФ. Для целей данной работы удобно использовать одевающую цепочку, связывающую волновые функции не только основных состояний операторов L_j . Известно, что ее можно получить с помощью преобразования Дарбу [16], обобщающего метод факторизации.

Пусть $\psi(x, \lambda)$ есть общее решение уравнения Шредингера

$$-\partial_x^2 \psi(x, \lambda) + u(x) \psi(x, \lambda) = \lambda \psi(x, \lambda)$$

и $\psi_j(x, \lambda_j)$ – любое частное решение этого уравнения, соответствующее некоторому значению $\lambda = \lambda_j$. Тогда волновая функция

$$\psi'(x, \lambda) = \partial_x \psi(x, \lambda) - \psi(x, \lambda) (\partial_x \ln \psi_j(x, \lambda_j))$$

является общим решением уравнения Шредингера

$$-\partial_x^2 \psi'(x, \lambda) + u'(x) \psi'(x, \lambda) = \lambda \psi'(x, \lambda) \quad (7)$$

с потенциалом $u' = u - 2\partial_x^2 \ln \psi_j(\lambda_j)$. Это преобразование с помощью выражения потенциалов u, u' через волновые функции $\psi_j(x, \lambda_j)$ и $\psi'(x, \lambda)$, соответственно, приводит к одевающей цепочке уравнений

$$\Phi_{j+1,x} + \Phi_{j+1}^2 = -\Phi_{j,x} + \Phi_j^2 - \lambda_{j+1} + \lambda_j. \quad (8)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Phi_{j+1} = \partial_x \ln \psi'(x, \lambda), \quad \lambda = \lambda_{j+1}, \quad \Phi_j = \partial_x \ln \psi_j(\lambda_j).$$

Обобщение преобразования Дарбу на случай зависящих от энергии операторов Шредингера и алгебр Каца–Мули было рассмотрено в работе [17].

Для наших целей уместно рассмотреть простое обобщение преобразования Дарбу для уравнения Риккати вида

$$\frac{d}{dx} \phi_j = q_j \phi_j^2 + r_j \phi_j + \lambda_j \frac{1}{q_j} + s_j. \quad (9)$$

Преобразованием вспомогательной переменной

$$\phi = -\frac{\psi_x}{\psi q_j} - \frac{r_j}{2q_j} - \frac{q_{j,x}}{2q_j^2}$$

уравнение (9) приводится к виду (7) с потенциалом

$$u_j = -q_j s_j - \frac{q_j}{2} \left(\frac{r_j}{q_j} \right)_x - \frac{1}{2} (\ln q_j)_{xx} + \frac{1}{4} [(\ln q_j)_x^2 + r_j^2]. \quad (10)$$

Тогда из соотношений (4), (10) мы получаем преобразование Дарбу потенциалов q_j , r_j , s_j уравнения (9) в следующем виде:

$$q_j \phi_j^2 + ((\ln q_j)_x + r_j) \phi_j + s_j - \frac{u_{j+1} - u_j - r_{j,x} - (\ln q_j)_{xx} - 2\lambda_j}{2q_j} = 0, \quad (11)$$

где u_j , u_{j+1} определяются выражением (10). Отметим, что при заданных потенциалах q_j , r_j , s_j и частном решении ϕ_j уравнения (10) только потенциал u_{j+1} выражается из (11) однозначно. Однако при известном виде функций q_j , r_j , s_j и u_{j+1} функция ϕ_j определяется квадратным уравнением. Это обстоятельство, как мы увидим ниже, приводит к различным преобразованиям Бэклунда нелинейных уравнений.

Опишем предлагаемый алгоритм. Запишем вначале L - A -пару для уравнения КдФ в форме уравнений Риккати для $\Phi_j = (\ln \psi_j(\lambda_j))_x$:

$$\Phi_{j,x} = -\Phi_j^2 + u_j - \lambda_j, \quad (12)$$

$$\Phi_{j,t} = ((2u + 4\lambda_j)\Phi_j)_x + u_{xx}. \quad (13)$$

В работе [18] (см. также [19]) была впервые предложена процедура исключения потенциала из L - A -пары. Если поля $u_j(x, t)$ подчиняются уравнению (1), то поля $\Phi_j(x, t)$ удовлетворяют интегрируемому модифицированному уравнению КдФ (мКдФ)

$$E_1(\Phi_j) \equiv \Phi_{j,t} + \Phi_{j,xxx} - 6\Phi_{j,x}\Phi_j - 6\lambda_j\Phi_{j,x} = 0. \quad (14)$$

Действительно, прямым вычислением нетрудно показать, что при подстановке поля

$$u_j = \Phi_{j,x} + \Phi_j^2 + \lambda_j \quad (15)$$

в уравнение (13) мы получаем уравнение мКдФ. Отметим, что преобразование (15) является известным преобразованием Миуры. Как нетрудно убедиться, справедливо соотношение

$$E_0(u_j(\Phi_j)) = \left(\frac{d}{dx} + 2\Phi_j \right) E_1(\Phi_j) \equiv M_0(\Phi_j) E_1(\Phi_j)$$

(ср. с (5)).

Найдем L - A -пару для уравнения мКдФ. Пусть потенциал $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению КдФ. Тогда преобразование Дарбу индуцирует вторую систему уравнений, которую будем называть t -цепочкой. Один из способов ее построения заключается в

замене индекса j у оператора A_j (2) на $j + 1$ и подстановке величины u_{j+1} , полученной из (4) и (15) и выраженной через $\Phi_j, \Phi_{j,x}$. В результате мы находим следующую цепочку уравнений, включающую временные производные (t -цепочку):

$$\Phi_{j+1,t} + \Phi_{j,t} = \frac{\partial}{\partial x} [(-2\Phi_{j,x} + 2\Phi_j^2 + 2\lambda_j + 4\lambda_{j+1})\Phi_{j+1} + 2\Phi_j(\Phi_j^2 + 3\lambda_j - \Phi_{j,x})]. \quad (16)$$

Нетрудно убедиться, что $(x-t)$ -одевающие цепочки (3), (16) являются преобразованием Бэклунда уравнений мКдФ (14) с параметрами λ_j и λ_{j+1} . Кроме того, цепочки имеют форму уравнений Риккати (относительно переменной Φ_{j+1}) и могут быть использованы для построения L - A -пары уже для уравнения мКдФ. Для этой цели удобно использовать инвариантность уравнений типа Риккати по отношению к дробно-линейной замене переменной $\Phi_{j+1} \rightarrow \phi_j$.

Замена

$$\Phi_{j+1} = \phi_j - \Phi_j \quad (17)$$

уничтожает производные поля $\Phi_j(x, t)$ по переменным x и t в цепочках (3), (16), соответственно¹⁾. В результате мы сразу получаем L - A -пару для уравнения (14):

$$\varphi_{j,x} = -\varphi_j^2 + 2\Phi_j\varphi_j - \lambda_{j+1} + \lambda_j, \quad (18)$$

$$\varphi_{j,t} = (2(\Phi_j^2 - \Phi_{j,x} + \lambda_j + 2\lambda_{j+1})\varphi_j - 4\Phi_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j))_x. \quad (19)$$

Здесь поле ϕ_j является вспомогательным, а λ_{j+1} — спектральный параметр.

Таким образом, последовательность преобразований от уравнения (1) к уравнению (14) состоит из следующих шагов:

- 1) исключение потенциала u_j из L - A -пары операторов для уравнения КдФ, действующих в пространстве вспомогательных функций $\psi(x, t, \lambda_j)$;
- 2) построение преобразований Дарбу

$$\Phi_j(x, t, \lambda_j) = \partial_x \ln \psi(x, t, \lambda_j) \rightarrow \Phi_{j+1}(x, t, \lambda_{j+1})$$

и $(x-t)$ -одевающих цепочек для этих операторов;

- 3) замена переменных пары

$$(\Phi_j(x, t, \lambda_j), \Phi_{j+1}(x, t, \lambda_{j+1})) \rightarrow (\Phi_j(x, t, \lambda_j), \varphi_j(x, t, \lambda_{j+1}))$$

в $(x-t)$ -цепочках, которая определяет L - A -операторы в пространстве новой вспомогательной переменной $\varphi_j(x, t, \lambda_{j+1})$. Эти операторы ассоциированы с уравнением мКдФ

---

¹⁾ Введение такой замены, как отмечено в [11], было полезным при анализе гамильтоновой структуры одевающей цепочки (3) с периодическим замыканием.

для переменной $\Phi_j(x, t, \lambda_j)$. Конкретная форма дробно-линейного преобразования определяется (помимо исключения соответствующих производных), как мы покажем далее, согласованностью с преобразованием Дарбу.

Применим этот алгоритм к уравнению мКдФ и ассоциированной с ним L - A -паре (18), (19).

1. Выражение для потенциала Φ_j через φ_j

$$\Phi_j = \frac{\varphi_j}{2} + \frac{\varphi_{j,x}}{2\varphi_j} + \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_j}{2\varphi_j}, \quad (20)$$

найденное с помощью (18), подставим в (19). В результате получаем нелинейное интегрируемое уравнение

$$E_2(\varphi_j) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \varphi_j - \frac{\partial}{\partial x} \left[-\varphi_{j,xx} - \frac{3(\lambda_j - \lambda_{1+j})^2}{2\varphi_j} + \frac{3\varphi_{j,x}^2}{2\varphi_j} + 3(\lambda_j + \lambda_{1+j})\varphi_j + \frac{\varphi_j^3}{2} \right] = 0. \quad (21)$$

После точечной экспоненциальной замены оно приводится к известному экспоненциальному уравнению Калоджеро–Дегаспериса [15]. Это уравнение далее обозначается m^2 КдФ, поскольку замена (20) является преобразованием Миуры и выполняется соотношение (5),

$$E_1(\Phi_j(\varphi_j)) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{\varphi_j} + 1 + \frac{\lambda_j - \lambda_{j+1}}{\varphi_j^2} \right) E^2(\varphi_j) \equiv M_1(\varphi_j) E^2(\varphi_j).$$

2. Отметим, что в отличие от предыдущего шага нам уже известно преобразование Дарбу (17) для L - и A -операторов уравнения мКдФ. Действительно, из (11) (при $q_j = -1$, $r_j = 2\Phi_j$, $\lambda_j \rightarrow \lambda_{j+1}$, $s_j = \lambda_j$) и x -цепочки (3) мы получаем два представления преобразования Дарбу оператора (18):

$$\begin{aligned} \Phi_{j+1} &= \Phi_j - \varphi_j, \\ \Phi_{j+1} &= \varphi_j - \Phi_j, \end{aligned}$$

первое из которых согласуется с (17).

При подстановке второго соотношения в L - A -пару (18), (19) мы получаем для уравнения мКдФ второе преобразование Бэклунда, которое совпадает с (3), (16) после замены $\Phi_{j+1} \rightarrow -\Phi_{j+1}$.

Преобразования Дарбу (17) и Миуры (20) сразу приводят к одевающей x -цепочке уравнения мКдФ

$$\frac{\varphi_{1+j,x}}{\varphi_{1+j}} = \frac{\lambda_j - \lambda_{1+j} - \varphi_{j,x}}{\varphi_j} + \varphi_j + \frac{\lambda_{1+j} - \lambda_{2+j}}{\varphi_{1+j}} - \varphi_{1+j}, \quad (22)$$

которая также является преобразованием Бэклунда уравнения m^2 КдФ. Выражая функцию $\Phi_{j,xx}$ из A -оператора и функцию Φ из L -оператора (20), получаем аналогичным образом t -цепочку.

3. После замены

$$\varphi_{j+1}(x, t) = \frac{\chi_j(x, t)}{\varphi_j(x, t)} \quad (23)$$

преобразование Бэклунда ((22) и t -цепочка) редуцируется к L - A -паре уравнения (21):

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi_j = -\frac{\chi_j^2}{\varphi_j} + \left(\varphi_j + \frac{-\lambda_{j+1} + \lambda_j}{\varphi_j} \right) \chi_j + (\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}) \varphi_j, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \chi_j = & 2(\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}) \left(-\varphi_{j,xx} + \frac{\varphi_{j,x}^2}{\varphi_j} + \varphi_j - \frac{\lambda_j - \lambda_{j+1}}{\varphi_j} \right) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_j + \\ & + \left(\frac{\varphi_{j,xx}}{\varphi_j} - \frac{\varphi_{j,x}^2}{2\varphi_j^2} - 2\varphi_{j,x} + \frac{\varphi_j^2}{2} + 4\lambda_{j+2} + \lambda_{j+1} + \lambda_j + \frac{(\lambda_j - \lambda_{j+1})^2}{2(\varphi_j)^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \chi_j + \\ & + 2 \left(-\varphi_{j,xx} + \frac{\varphi_{j,x}^2}{\varphi_j} + \left(\varphi_j + \frac{\lambda_{j+1} + \lambda_j - 2\lambda_{j+2}}{\varphi_j} \right) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_j \right) \chi_j, \end{aligned} \quad (25)$$

где λ_{j+2} является спектральным параметром. Как и в предыдущем случае, подстановка (23) является одним из двух преобразований Дарбу этой L - A -пары. Из общей формулы (11) нетрудно найти второе преобразование Дарбу $\varphi_{j+1}(x, t) = \chi_j(x, t) \varphi_j(x, t)$. Оно, как и в предыдущем случае, определяет другое (содержащее производные более высокого порядка) преобразование Бэклунда уравнения m^2 КдФ и здесь не обсуждается.

Отметим особенности предлагаемой процедуры.

1. Хотя функция φ_j неоднозначно выражается из L -оператора (24):

$$\varphi_j^{(\pm)} = \frac{\chi_{j,x} \pm g_j}{2(\chi_j - \lambda_{j+2} + \lambda_{j+1})}, \quad (26)$$

$$g_j^2 = \chi_{j,x}^2 + 4(\chi_j - \lambda_j + \lambda_{1+j}) \chi_j (\lambda_{1+j} - \lambda_{2+j} + \chi_j), \quad (27)$$

каждое из этих преобразований Миуры после подстановки в A -оператор приводит к уравнению m^3 КдФ

$$E_3(\chi) \equiv \chi_{j,t} - \chi_{j,xxx} - 3 \left((4\chi_j - 2\lambda_j - 2\lambda_{j+2} - 1) \chi_{j,x} + \frac{g_{j,x}^2}{2\chi_{j,x}} \right) = 0 \quad (28)$$

и соотношению (5). Можно показать, что после замены $\chi \rightarrow v$, $P(\chi, v) = 0$ (P — определенный полином четвертого порядка по каждой из переменных) и линейных преобразований независимых переменных уравнение (28) совпадает с эллиптическим уравнением Калоджеро–Дегаспериса [7] для поля $v(x, t)$.

2. Укажем на самосогласованность двух преобразований Миуры (26) и подстановки (23). Из (23) следует, что поле

$$\varphi_{j+1}^+ = \frac{\chi_j}{\varphi_j^+} = \frac{\chi_{j,x} - g_j}{2(\lambda_j - \lambda_{1+j} - \chi_j)} \quad (29)$$

отличается от $-\varphi_j^-$ заменой $\lambda_j \leftrightarrow \lambda_{j+2}$. Поэтому, если мы подставим в $E_2(\varphi_{j+1}^+)$ соотношение (29), то получим $M(\varphi_{j+1}^+)E_3(\chi_j)$. Следующая из формул (26) для φ_j^+ и φ_j^- цепочка (преобразование Бэклунда для $m^3\text{КдФ}$)

$$\frac{\chi_{j,x} - g_j}{2(\chi_j - \lambda_{j+1} - \lambda_j)} = \frac{\chi_{j+1,x} + g_{j+1}}{2(\chi_{j+1} - \lambda_{j+2} - \lambda_{j+1})}$$

имеет по сравнению с предыдущими более сложную структуру. Нам не удалось найти точечное преобразование $(\chi_j, \chi_{j+1}) \rightarrow (\chi_j, \tau_j)$ к новой переменной τ_j , для которой данная x -цепочка редуцируется к уравнению Риккати с коэффициентами, не зависящими от производных поля χ_j . По-видимому, дальнейшая итерация должна использовать нелокальные замены и приводить к интегральным уравнениям. Эти вопросы требуют дальнейшего исследования.

В заключение раздела отметим, что преобразования Миуры, связывающие уравнения $m^n\text{КдФ}$ ($n = 0, 1, 2, 3$), были найдены ранее прямым методом [15]. Как указано в [7], эти уравнения и уравнение Кричевера–Новикова исчерпывают (с точностью до контактных преобразований) все интегрируемые уравнения вида $u_t + u_{xxx} + f(u_{xx}, u_x, u) = 0$. Предложенный выше способ не только последовательно порождает эти уравнения и преобразования Миуры, но и позволяет легко сконструировать соответствующие им L - A -пары. Кроме того, он отождествляет вспомогательные поля (волновые функции) в L - A -паре с решениями соответствующих уравнений.

3. ОДЕВАЮЩАЯ ЦЕПОЧКА И РАЗМНОЖЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОН

В этом разделе мы применяем описанный выше алгоритм для размножения уравнения СГ, записанного в конусных переменных,

$$u_{k,x}t = \sin u_k. \quad (30)$$

Дополнительный индекс k в полях $u(x, t)$ введен для удобства.

Известно, что преобразование Бэклунда

$$\frac{u_{k+1,x} + u_{k,x}}{2} = \sin \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{2} \right) \lambda_k, \quad \frac{u_{k+1,t} - u_{k,t}}{2} = \frac{1}{\lambda_k} \sin \left(\frac{u_k + u_{k+1}}{2} \right)$$

с параметром λ_k связывает два решения u_k и u_{k+1} уравнения (30), которое является условием совместности матричных операторов L и A ,

$$\psi_{k,x} = L_k \psi_k, \quad L_k = -\frac{\lambda_k \sigma_1}{2} + \frac{i(u_{k,x}) \sigma_3}{2}, \quad (31)$$

$$\psi_{k,t} = A_k \psi_k, \quad A_k = -\frac{\cos(u_k) \sigma_1 - \sin(u_k) \sigma_2}{2\lambda_k}, \quad (32)$$

где σ_i , $i = 1, 2, 3$, – матрицы Паули, λ_k – спектральный параметр.

L -оператор допускает преобразование Дарбу [16]

$$\psi_{k+1}(\lambda_{k+1}) = W_k(f_k, \lambda_k, \lambda_{k+1}) \psi(\lambda_k), \quad (33)$$

$$W_k = \frac{i\sigma_1 \lambda_k}{\lambda_{k+1}} - i \cos f_k + \sigma_3 \sin f_k, \quad (34)$$

$$u_{k+1} = u_k + 2f_k. \quad (35)$$

Здесь $\psi_j(\lambda_j)$ является решением уравнения $\psi_{j,x} = L(\lambda_j, u_j) \psi_j$, $j = k, k+1$, а поле

$$f_k = -i \ln \frac{(\psi_k(\lambda_k))_2}{(\psi_k(\lambda_k))_1}$$

согласно уравнениям (31) и (32) удовлетворяет вспомогательной системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} f_k = \lambda_k \sin f_k - u_{k,x}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_k = \frac{\sin(u_k + f_k)}{\lambda_k}. \quad (37)$$

Исключая поля u_k из этой системы:

$$u_k = -f_k + 2 \arcsin(f_{k,t} \lambda_k), \quad (38)$$

мы получаем, что поле f_k удовлетворяет уравнению [18]

$$f_{k,xt} = \sqrt{1 - f_{k,t}^2 \lambda_k^2} \sin f_k, \quad (39)$$

которое мы далее называем мСГ. Отметим, что соотношение (5) выполняется, если мы выберем преобразование Миуры в форме (38). Это преобразование, в отличие от предыдущего раздела, найдено с помощью оператора A . Можно показать, что следующее интегрируемое уравнение может быть получено преобразованием Миуры с помощью соответствующего L -оператора. Именно это обстоятельство является отличительной особенностью применения предлагаемой процедуры к уравнению СГ. Композиция преобразований Миуры обсуждалась в работе [20]. Мы используем преобразования иного, чем в этой работе, вида.

Поскольку преобразование Дарбу (35) имеет простой вид, нашу процедуру можно упростить, опустив построение $(x-t)$ -цепочек в явном виде. Введем поля

$$\tau_k = u_k + f_k, \quad h_k = f_k + f_{k+1}, \quad (40)$$

связанные согласно преобразованию (35) соотношением

$$\tau_{k+1} = \tau_k + h_k. \quad (41)$$

Тогда система уравнений

$$\tau_{k,x} = \lambda_k \sin f_k, \quad f_{k,t} = \frac{1}{\lambda_k} \sin \tau_k \quad (42)$$

для переменных τ_{k+1} и $f_{k+1} = h_k - f_k$ записывается как система первого порядка для полей h_k , т.е.

$$\begin{aligned} h_{k,x} &= -\lambda_k \sin f_k + \lambda_{k+1} \sin(h_k - f_k), \\ h_{k,t} &= \frac{1}{\lambda_k} \sin \tau_k + \frac{1}{\lambda_{k+1}} \sin(\tau_k + h_k). \end{aligned} \quad (43)$$

Нетрудно убедиться в том, что условие совместности этой системы (λ_{k+1} — спектральный параметр) эквивалентно уравнениям (42). Поэтому (43) является L -А-парой (линеаризуемой в соответствующих переменных) уравнений мСГ для поля f_k (39) и поля τ_k :

$$\tau_{k,xt} = \sqrt{1 - \lambda_k^{-2} \tau_{k,x}^2} \sin \tau_k.$$

По построению преобразование $f_{k+1} = h_k - f_k$ есть преобразование Дарбу оператора L . Кроме того, заменой

$$h_k(x, t) = -i \ln \left(\frac{\chi_k(x, t)}{\lambda_{k+1}} \right)$$

оператор L приводится к виду (9) и искомое утверждение является следствием формулы (11).

Выразим поля f_k, τ_k из системы (43):

$$e^{if_k} = -\frac{ih_{k,x} + g_k}{e^{-ih_k} \lambda_{k+1} + \lambda_k}, \quad e^{-i\tau_k} = -\frac{i\lambda_k \lambda_{k+1} h_{k,t} + \rho_k}{e^{-ih_k} \lambda_k + \lambda_{k+1}}. \quad (44)$$

Здесь введены обозначения $g_k = \sqrt{-h_{k,x}^2 + a_k}$, $\rho_k = \sqrt{-h_{k,t}^2 \lambda_k^2 \lambda_{k+1}^2 + a_k}$, $a_k = \lambda_k^2 + \lambda_{k+1}^2 + 2\lambda_k \lambda_{k+1} \cos h_k$. Тогда подстановка преобразований Миуры (44) в любое из уравнений (42) приводит к нелинейному уравнению для поля $h(x, t)$

$$h_{k,xt} = \frac{(g_k \rho_k - h_{k,t} h_{k,x} \lambda_k \lambda_{1+k}) \sin h_k}{\lambda_k^2 + 2(\cos h_k) \lambda_k \lambda_{1+k} + \lambda_{1+k}^2}. \quad (45)$$

Насколько нам известно, (45) является новым уравнением с нетривиальным преобразованием Бэклунда. Это преобразование нетрудно получить из формул (40), (41), (44). Поскольку поле $h_{k,t}$ – сумма двух полей, удовлетворяющих уравнению мСГ с параметрами λ_k и λ_{k+1} , назовем (45) уравнением m^2 СГ. Оно обладает бесконечным числом законов сохранения, индуцируемых преобразованиями Миуры (44). Первый интеграл движения

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} E dx,$$

содержащий младшие производные, находится из соотношений (42). Тогда уравнение (45) представимо в форме закона сохранения $\partial P / \partial x = \partial E / \partial t$, где

$$P = -\frac{1}{\lambda_k} \cos \tau_k - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \ln a_k = \frac{((\cos h_k) \lambda_k + \lambda_{1+k}) \rho_k}{\lambda_k (\lambda_k^2 + 2(\cos h_k) \lambda_k \lambda_{1+k} + \lambda_{1+k}^2)},$$

$$E = -\lambda_k \cos f_k - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln a_k = \frac{\lambda_k (\lambda_k + (\cos h_k) \lambda_{1+k}) g_k}{\lambda_k^2 + 2(\cos h_k) \lambda_k \lambda_{1+k} + \lambda_{1+k}^2}.$$

Этот закон сохранения позволяет найти солитонные решения типа бегущей волны $h_k(x, t) = h(\xi)$, $\xi = x + ct$, $h \rightarrow 0 \pmod{2\pi}$, $h_\xi \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. Введем константу интегрирования

$$C = cE - P = \frac{1 - c\lambda_k^2}{\lambda_k}, \quad c > 0,$$

в соответствии с поведением решения на бесконечности. Тогда уравнение (45) принимает вид

$$h'(\xi) = \pm \frac{2 \sin\left(\frac{h(\xi)}{2}\right) \sqrt{1 - \gamma \sin^2\left(\frac{h(\xi)}{2}\right)}}{\sqrt{c}},$$

где

$$\gamma = \frac{(1 + c\lambda_k \lambda_{1+k})^2}{c(\lambda_k + \lambda_{1+k})^2}.$$

Знак в правой части определяет топологический заряд солитона $Q = \pm 1$. В явном виде решение имеет вид

$$h = 4 \arctg \left(\pm \sqrt{1 - \gamma} \operatorname{sh} \left(\frac{\xi}{\sqrt{c}} \right) + \sqrt{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\xi}{\sqrt{c}} \right) - \gamma \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\xi}{\sqrt{c}} \right)} \right).$$

Оно представляет собой 2π -кинк с “полочкой” вблизи $h = \pi$ (двойной π -кинк) (см. рисунок), ширина которой определяется скоростью c , ограниченной интервалом

$$\left[\frac{1}{\lambda_{k+1}^2}, \frac{1}{\lambda_k^2} \right] \quad \text{при} \quad \lambda_k \leq \lambda_{k+1}.$$

На границах этого интервала ширина полочки неограниченно увеличивается и $h(x, t) \rightarrow \pi$. При $\gamma = 0$ решение совпадает с обычным 2π -кинком уравнения СГ.

Нам не удалось найти точечного преобразования Дарбу $(h_k, h_{k+1}) \rightarrow (h_k, \epsilon_k)$ в упоминавшемся выше преобразовании Бэклунда уравнения m^2 СГ и получить ассоциированную с ним L - A -пару. Оказывается, что эту пару можно найти, используя преобразование

$$h_{k+1} = -\tau_k(h_k, h_{k,t}) + \epsilon_k, \quad (46)$$

где $\tau(h_k, h_{k,t})$ определяется уравнением (44). Действительно, система (42) (с заменой $k \rightarrow k+2$), соотношение $\tau_{k+2} = h_k + \epsilon_k$ (46) и определения (40), (41) дают

$$\begin{aligned} \epsilon_{k,x} &= (\sin f_k) \lambda_k + (\sin(f_k - h_k)) \lambda_{1+k} + (\sin(f_k - h_k + \epsilon_k - \tau_k)) \lambda_{2+k}, \\ \epsilon_{k,t} &= \frac{\sin(h_k + \tau_k)}{\lambda_{1+k}} + \frac{\sin(h_k + \epsilon_k)}{\lambda_{2+k}} + \tau_{k,t}. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь поля τ_k , f_k выражаются формулами (44). Нетрудно убедиться, что условие совместности этой системы эквивалентно уравнению (45) (λ_{k+2} – спектральный параметр), а эволюция поля $\epsilon_k(x, t)$ описывается нелинейным уравнением второго порядка, коэффициенты которого зависят от поля h_k и его производных и не зависят от параметров λ_{k+2} . Возможность “размножения” этого уравнения мы обсудим в другой работе.

В заключение этого раздела отметим, что соотношение (6) является условием инвариантности преобразования Миуры по времени [21]. Формула (5) лучше всего иллюстрируется в лагранжевом формализме. Уравнение мСГ не является уравнением Эйлера–Лагранжа, т.к. производная Фреше, связанная с ним, несимметрична [22]. Заменим в лагранжиане $L = (1/2)u_x u_t + (1 - \cos u)$ уравнения СГ поле u : $u[f] = -f + \arcsin(\lambda f_t)$.

Обозначим $L'(f, f_x, f_t, f_{xt}, f_{tt}) = L(u[f], u[f]_x, u[f]_t)$. Нетрудно установить [22], что вариационные производные этих лагранжианов связаны соотношением

$$\frac{\delta L'}{\delta f} = \left(\frac{\partial u}{\partial f} - D_t \frac{\partial u}{\partial f_t} \right) \frac{\delta L}{\delta u} = M^* \frac{\delta L}{\delta u},$$

где D_t – оператор полной производной. С другой стороны, прямые вычисления показывают, что варьирование лагранжиана L' приводит к соотношению

$$\frac{\delta L'}{\delta f} = -M^* \left(\frac{\partial u}{\partial f} + D_t \frac{\partial u}{\partial f_t} \right) \left(f_{xt} - \sqrt{1 - \lambda^2 f_t^2} \sin f \right).$$

Из этих формул сразу следует уравнение (6).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что существует определенная процедура, позволяющая по уравнениям КдФ и СГ рекуррентно строить ряд других интегрируемых уравнений совместно с их L - A -парами. По существу эта процедура состоит в построении совокупности преобразований Ли–Бэклунда между нелинейными уравнениями с помощью автопреобразований Бэклунда. Несомненно, что предлагаемый алгоритм может быть применен для других интегрируемых уравнений. Объединение уравнений в такие последовательности удобно для метода обратной задачи рассеяния, упрощает нахождение солитонных решений, замыкание в одевающих цепочках и т.д.

Один из авторов (А. Б.) искренне благодарен А. Б. Шабату за многочисленные и плодотворные обсуждения вопросов интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений, интерес к этой работе и критические замечания. Авторы также признательны В. Е. Адлеру, И. Т. Хабибуллину, В. В. Соколову, А. В. Жиберу за интерес к работе, полезные замечания и указания на некоторые ссылки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 97-01-00431.

Список литературы

- [1] *C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura.* Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. № 19. P. 1095.
- [2] Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Ред. В. Г. Барьяхтар, В. Е. Захаров, В. М. Черноусенко. Киев: Наукова думка, 1990.
- [3] *А. Ньюэлл, М. Табор.* Интегрируемость. В сб.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Ред. В. Г. Барьяхтар, В. Е. Захаров, В. М. Черноусенко. Киев: Наукова думка, 1990. С. 117.
- [4] *H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook.* J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 1293.
- [5] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [6] *V. E. Zakharov, E. I. Schulman.* Physica D. 1980. V. 1. P. 192; 1988. V. 29. P. 283.
- [7] *А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов.* УМН. 1987. Т. 42. Вып. 4. С. 3.

- [8] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [9] *J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale.* J. Math. Phys. 1983. V. 24. P. 522.
- [10] *R. Conte.* Singularities of Differential equation and integrability. In: Introduction to Method of Complex Analysis and Geometry for Classical Mechanics and Non-linear Waves. Ed. D. Benest, C. Froeschle. Gif-sur-Yvette Cedex, France: Editions Frontieres, 1994. P. 49.
- [11] *А. П. Веселов, А. Б. Шабат.* Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. Вып. 2. С. 1.
- [12] *Х. Грин.* Матричная квантовая механика. М.: Мир, 1968.
- [13] *S. Yu. Dubov, V. M. Eleonskii, N. E. Kulagin.* Chaos. 1994. V. 4. № 1. P. 47; *С. Ю. Дубов, В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин.* ЖЭТФ. 1992. Т. 102. Вып. 3 (9). С. 814.
- [14] *А. Дегасперис, А. Б. Шабат.* ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 230.
- [15] *В. В. Соколов, С. И. Свинолунов, Р. И. Ямилов.* ДАН СССР. 1983. Т. 271. № 4. С. 802.
- [16] *V. B. Matveev, M. A. Salle.* Darboux Transformation and Solitons. Berlin–Heidelberg: Springer Verlag, 1991.
- [17] *А. П. Форди, А. Б. Шабат, А. П. Веселов.* ТМФ. 1995. Т. 105. № 2. С. 225.
- [18] *Н.-Н. Чен.* Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. № 15. P. 925.
- [19] *В. Копорел'ченко.* Rev. Math. Phys. 1990. V. 2. P. 399.
- [20] *R. I. Yamilov.* Phys. Lett. A. 1993. V. 173. P. 53.
- [21] *Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат.* Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. Вып. 1. С. 25.
- [22] *П. Олвер.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

Поступила в редакцию 22.XII.1997 г.