Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ж. Думанян, О разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 2, 189–205

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8670>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 13:36:50

© 2014 г.

В. Ж. Думанян*

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В предыдущих работах автора при естественных ограничениях на коэффициенты общего эллиптического уравнения второго порядка получены необходимые и достаточные условия существования $(n-1)$ -мерно непрерывного решения задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}_n$, однако эти условия сформулированы в терминах вспомогательного операторного уравнения в специальном гильбертовом пространстве и трудно проверяемы. Для несколько более узкого класса правых частей уравнения получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи в терминах исходной задачи. При этом установлено, что если дополнительно потребовать принадлежность граничной функции пространству $W_2^{1/2}(\partial Q)$, то полученные условия переходят в условия разрешимости в пространстве $W_2^1(Q)$.

Ключевые слова: задача Дирихле, эллиптическое уравнение.

DOI: 10.4231/tmf8670

В работе исследуется проблема разрешимости задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\partial Q \in C^1$ для эллиптического уравнения второго порядка

$$\mathcal{L}u \equiv -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + (\bar{b}(x), \nabla u) - \operatorname{div}(\bar{c}(x)u) + d(x)u = f(x) - \operatorname{div} F(x), \quad x \in Q, \quad (1)$$

с граничным условием

$$u|_{\partial Q} = u_0, \quad (2)$$

где граничная функция u_0 принадлежит пространству $L_2(\partial Q)$. Предполагается, что функции f и $F = (f_1, \dots, f_n)$ принадлежат пространству $L_{2,\text{loc}}(Q)$, а симметрическая матрица $A(x) = (a_{ij}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = (\xi, A(x)\xi) \leq \gamma^{-1}|\xi|^2, \quad \gamma > 0, \quad (3)$$

*Ереванский государственный университет, Ереван, Армения. E-mail: duman@ysu.am

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}_n$ и почти всех $x \in Q$. В уравнении (1) коэффициенты $\bar{b}(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$, $\bar{c}(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными функциями в каждой строго внутренней подобласти области Q .

Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1) в смысле обобщенных функций, т. е. для всех финитных и бесконечно дифференцируемых функций η выполняется интегральное тождество

$$\int_Q (A(x) \nabla u + \bar{c}(x)u, \nabla \eta) dx + \int_Q ((\bar{b}(x), \nabla u) + d(x)u) \eta dx = \int_Q (f \eta + (F, \nabla \eta)) dx,$$

и удовлетворяющую условию (2) в следующем смысле: для каждой точки $x^0 \in \partial Q$ найдется такая ее окрестность $V_{x^0} \subset \partial Q$, что

$$\int_{V_{x^0}} (u(x + \delta \bar{\nu}(x^0)) - u_0(x))^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0, \quad (4)$$

где $\bar{\nu}(x^0)$ – единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x^0 .

Понятие решения из пространства $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ было введено в случае области с дважды гладкой границей Михайловым в работах [1], [2] (см. также статьи [3]–[5]). В указанных работах граничное значение решения понималось в следующем смысле:

$$\int_{\partial Q} (u(x + \delta \bar{\nu}(x)) - u_0(x))^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0.$$

При этом в случае гладких коэффициентов (для $a_{ij}(x), b_i(x) \in C^1(\bar{Q})$, $i, j = 1, \dots, n$, $d(x) \in C^1(\bar{Q})$ и $\bar{c}(x) = 0$) было установлено, что задача (1), (2) является фредгольмовой, соответствующий оператор имеет тот же спектр и те же пространства собственных функций, что и задача в обычной обобщенной постановке в пространстве $W_2^1(Q)$. Если ноль не является точкой спектра, то задача разрешима при любой граничной функции $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и любой правой части f (при $F \equiv 0$), удовлетворяющей условию

$$\int_Q r^\theta(x) f^2(x) dx < \infty$$

с некоторым показателем $\theta < 3$. Обобщение приведенного выше результата о разрешимости задачи Дирихле в области с ляпуновской границей было получено в работах [6] и [7], где граничное условие формулировалось в локальных терминах – требовалось выполнение условия (4).

Свойство $(n-1)$ -мерной непрерывности решения и однозначная разрешимость задачи Дирихле с граничной функцией $u_0 \in L_2(\partial Q)$ для уравнения без младших членов (в случае $b_i = 0$, $c_i = 0$, $d = 0$) при $f \in W_2^{-1}$ (для $F = 0$) были установлены в работе [8]. При этом предполагалось, что единичный вектор $\bar{\nu}$ внутренней нормали к ∂Q удовлетворяет условию Дини

$$|\bar{\nu}(x) - \bar{\nu}(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad x, y \in \partial Q, \quad (5)$$

где ω – такая монотонная функция, что

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

а коэффициенты a_{ij} непрерывны по Дини на границе,

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad x \in \partial Q, \quad y \in Q, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что функция ω в условиях (5) и (6) одна и та же.

В работе [9] было показано, что приведенный выше результат остается справедливым для правых частей из более широкого класса, а именно если

$$\begin{aligned} r^{3/2}(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4} f(x) &\in L_2(Q), \\ r^{1/2}(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4} F(x) &\in (L_2(Q))^n, \end{aligned} \quad (7)$$

где $r(x)$ – расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q . Далее мы также будем предполагать условия (5)–(7) выполненными. Случай задачи Дирихле с граничной функцией из $L_p(\partial Q)$ для уравнения без младших членов исследован в работах [10]–[12].

Понятие $(n-1)$ -мерной непрерывности было предложено Гущиным в работе [8] и заключается в следующем. Пусть μ – (неотрицательная, борелевская) мера в пространстве $\mathbb{R}_n$ с носителем в $\bar{Q}$, удовлетворяющая следующему условию: существует такая постоянная $C = C(\mu)$, что для всех $r > 0$ и $x^0 \in \bar{Q}$ мера шара $B_r(x^0)$ радиуса r с центром в точке x^0 не превосходит числа Cr^{n-1} :

$$\mu(B_r(x^0)) \leq Cr^{n-1}, \quad r > 0, \quad x^0 \in \bar{Q}; \quad (8)$$

наименьшую из таких постоянных C будем называть нормой μ и обозначать как $\|\mu\|$. Пространство Гущина $C_{n-1}(\bar{Q})$ $(n-1)$ -мерно непрерывных функций является пополнением пространства непрерывных в $\bar{Q}$ функций по норме

$$\|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})} = \sup \left(\frac{1}{\|\mu\|} \int_{\bar{Q}} u^2(x) d\mu(x) \right)^{1/2},$$

где точная верхняя грань берется по всем удовлетворяющим условию (8) мерам μ . Очевидно, что $C_{n-1}(\bar{Q}) \subset L_2(Q)$. Функции из $C_{n-1}(\bar{Q})$ имеют следы на множествах положительной $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа, а множество следов на гладкой $(n-1)$ -мерной поверхности $\Gamma \subset \bar{Q}$ всех функций из $C_{n-1}(\bar{Q})$ совпадает с $L_2(\Gamma)$.

Определение $(n-1)$ -мерной непрерывности можно дать и в терминах близости значений функции на близких мерах (подробнее см. в работе [8]). Пусть μ и ν – удовлетворяющие условию (8) единичные меры в $\mathbb{R}_n$ с носителем в $\bar{Q}$ и ϕ – такая мера в $\mathbb{R}_{2n}$ с носителем в $\bar{Q} \times \bar{Q}$, что для всех (борелевских) множеств $G \subset \bar{Q}$

$$\mu(G) = \phi(G \times \mathbb{R}_n), \quad \nu(G) = \phi(\mathbb{R}_n \times G).$$

Функцию u будем называть $(n-1)$ -мерно непрерывной, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ , что расстояние между значениями функции u на мерах μ и ν вдоль ϕ меньше ε ,

$$\frac{1}{\|\mu\| + \|\nu\|} \int_{\bar{Q}} (u(x) - u(y))^2 d\phi(x, y) < \varepsilon,$$

как только расстояние между мерами μ и ν вдоль ϕ меньше δ ,

$$\int_{\bar{Q}} |x - y| d\phi(x, y) < \delta.$$

В работе [13] (см. также статьи [14], [15]) было установлено, что решение задачи (1), (2) (если оно существует) обладает свойством $(n-1)$ -мерной непрерывности, т. е. принадлежит пространству Гуцина $C_{n-1}(\bar{Q})$. При этом предполагалось, что коэффициенты $\bar{b}(x)$, $\bar{c}(x)$ и $d(x)$ локально ограничены и для них справедливы следующие оценки: существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$|\bar{b}(x)| \leq \frac{K}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4}}, \quad x \in Q, \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^t t(1 + |\ln t|)^{3/2} C^2(t) dt < \infty, \quad C(t) &\equiv \sup_{r(x) \geq t} |\bar{c}(x)|, \\ \int_0^t t^3(1 + |\ln t|)^{3/2} D^2(t) dt < \infty, \quad D(t) &\equiv \sup_{r(x) \geq t} |d(x)|. \end{aligned} \quad (10)$$

Однако разрешимость изучаемой задачи (с граничной функцией из $L_2(\partial Q)$) была известна только при жестких условиях на гладкость коэффициентов.

При тех же условиях (9), (10) в терминах скалярного произведения в специальном гильбертовом пространстве в работе [16] (см. также работу [17]) были получены необходимые и достаточные условия существования $(n-1)$ -мерно непрерывного решения задачи (1), (2) и установлено, что условия разрешимости исследуемой задачи имеют вид, аналогичный условиям разрешимости в обычной обобщенной постановке (в пространстве $W_2^1(Q)$).

Для формулировки и доказательства основного результата настоящей работы нам потребуется описать схему исследования и привести некоторые результаты работы [16].

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим две задачи Дирихле: задачу

$$\mathcal{L}_0 v \equiv -\operatorname{div}(A \nabla v) = 0, \quad v|_{\partial Q} = u_0 \quad (11)$$

и задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 w &= -(\bar{b}, \nabla w) + \operatorname{div}(cw) - dw - (\bar{b}, \nabla v) + \operatorname{div}(cv) - dv + f - \operatorname{div} F, \\ w|_{\partial Q} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где функция v есть решение задачи (11).

Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть функция v является решением задачи (11). Чтобы функция u являлась решением задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы функция $w = u - v$ являлась решением задачи (12).

Задача (11) однозначно разрешима при всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ (см. работу [8]), решение принадлежит пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$, и для него справедлива следующая оценка:

$$\|v\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla v|^2 dx \leq \operatorname{const} \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2$$

с не зависящей от u_0 постоянной.

Следовательно, в силу утверждения 1 задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (12), в которой функция v является решением задачи (11).

Введем пространство

$$\mathcal{U}(Q) \equiv \left\{ u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q) \cap C_{n-1}(\bar{Q}) : \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{\mathcal{U}(Q)}^2 = \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx$$

и положим

$$\mathring{\mathcal{U}}(Q) \equiv \{u \in \mathcal{U}(Q) : u|_{\partial Q} = 0\}.$$

Следуя работе [9], обозначим через $\mathring{H}_1(Q)$ пополнение пространства $C_0^\infty(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathring{H}_1(Q)} = \int_Q \frac{(\nabla u, \nabla v)}{r(1 + |\ln r|)^{3/2}} dx,$$

а через $\mathring{H}(Q)$ – пополнение пространства $C_0^\infty(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathring{H}(Q)} = \int_Q \left(r(1 + |\ln r|)^{1/2} (\nabla u, \nabla v) + \frac{uv}{r(1 + |\ln r|)^{1/2}} \right) dx.$$

Напомним, что $r = r(x)$ – расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q .

Имеют место следующие вложения [16]:

$$\mathring{H}_1(Q) \subset \mathring{W}_2^1(Q) \subset \mathring{H}(Q) \subset \mathring{\mathcal{U}}(Q).$$

Решение задачи (1), (2) и решение задачи (11) лежат в пространстве $\mathcal{U}(Q)$ [8], [13], таким образом, из утверждения 1 вытекает, что решение w задачи (12) принадлежит пространству $\mathring{\mathcal{U}}(Q)$.

Рассмотрим оператор $Tu = -(\bar{b}, \nabla u) + \text{div}(\bar{c}u) - du$ из правой части уравнения (12). Имеет место следующее утверждение [16].

ЛЕММА 1. Пусть $\partial Q \in C^1$ и выполнены условия (9), (10). Тогда оператор T как оператор из $\mathcal{U}(Q)$ в $[\mathring{H}_1(Q)]^*$ и как оператор из $\mathring{W}_2^1(Q)$ в $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ является линейным и ограниченным оператором.

В работе [9] установлено, что для любой правой части $g' \in [\mathring{H}_1(Q)]^*$ существует и единственно решение из пространства $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ задачи

$$-\text{div}(A\nabla u) = g', \quad u|_{\partial Q} = 0; \tag{13}$$

это решение принадлежит пространству $\mathring{H}(Q)$, и имеет место оценка

$$\|u\|_{\mathring{H}(Q)} \leq C \|g'\|_{[\mathring{H}_1(Q)]^*}$$

с не зависящей от g' постоянной C . Следовательно, если через $\mathcal{L}_0^{-1}$ обозначить оператор, ставящий в соответствие правой части g' решение u задачи (13), то $\mathcal{L}_0^{-1}$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из $[\dot{H}_1(Q)]^*$ в $\dot{H}(Q)$. Кроме того, как хорошо известно (см., например, лекции [18]), оператор $\mathcal{L}_0^{-1}$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ в $\dot{W}_2^1(Q)$. Таким образом, из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Оператор $\mathcal{L}_0^{-1}T$ как оператор из $\mathcal{U}(Q)$ в $\dot{H}(Q)$ и как оператор из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^1(Q)$ является линейным и ограниченным.*

Пусть w – решение задачи (12). Так как $f, \operatorname{div} F \in [\dot{H}_1(Q)]^*$ (см. работу [9]), нетрудно видеть, что w является также решением операторного уравнения

$$w = \mathcal{L}_0^{-1}Tw + \mathcal{L}_0^{-1}Tv + \mathcal{L}_0^{-1}(f - \operatorname{div} F) \quad (14)$$

в пространстве $\dot{\mathcal{U}}(Q)$, где $v \in \mathcal{U}(Q)$ – решение задачи (11). С другой стороны, если функция $w \in \dot{\mathcal{U}}(Q)$ – решение операторного уравнения (14), то w является также решением задачи (12). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Функция w является решением задачи (12) тогда и только тогда, когда w является решением операторного уравнения*

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = \mathcal{L}_0^{-1}g, \quad w \in \dot{\mathcal{U}}(Q), \quad (15)$$

в котором $g = Tv + f - \operatorname{div} F$, где $v \in \mathcal{U}(Q)$ – решение задачи (11).

Наряду с уравнением (15) рассмотрим соответствующее операторное уравнение в пространстве $\dot{H}(Q)$:

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = h, \quad w \in \dot{H}(Q), \quad h \in \dot{H}(Q). \quad (16)$$

Из леммы 2 вытекает справедливость следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Пусть w является решением операторного уравнения (15) в пространстве $\dot{\mathcal{U}}(Q)$ при $g \in [\dot{H}_1(Q)]^*$. Тогда w является решением операторного уравнения (16) в пространстве $\dot{H}(Q)$ при $h = \mathcal{L}_0^{-1}g$.*

Объединяя утверждение 2 и утверждение 3, получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Для того чтобы функция w являлась решением задачи (12), необходимо и достаточно, чтобы функция w являлась решением операторного уравнения (16) в пространстве $\dot{H}(Q)$ с правой частью $h = \mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \operatorname{div} F)$, где v – решение задачи (11).*

Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_0^{-1}T$ в гильбертовых пространствах $\dot{H}(Q)$ и $\dot{W}_2^1(Q)$. Имеет место следующая теорема [16].

ТЕОРЕМА 1. Оператор $\mathcal{L}_0^{-1}T$ как оператор из $\mathring{H}(Q)$ в $\mathring{H}(Q)$ и как оператор из $\mathring{W}_2^1(Q)$ в $\mathring{W}_2^1(Q)$ является вполне непрерывным. При этом отвечающие характеристическому числу 1 собственные подпространства оператора $\mathcal{L}_0^{-1}T$ в пространствах $\mathring{H}(Q)$ и $\mathring{W}_2^1(Q)$ совпадают:

$$\text{Ker}_{\mathring{W}_2^1(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T) = \text{Ker}_{\mathring{H}(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T),$$

где I – тождественный оператор.

Из теоремы 1 следует, что спектры оператора $\mathcal{L}_0^{-1}T$ в пространствах $\mathring{H}(Q)$ и $\mathring{W}_2^1(Q)$ совпадают и собственные функции из пространства $\mathring{H}(Q)$ принадлежат пространству $\mathring{W}_2^1(Q)$. Таким образом, проблема разрешимости задачи (1), (2) сведена к проблеме разрешимости операторного уравнения (16) в гильбертовом пространстве $\mathring{H}(Q)$ со вполне непрерывным оператором $\mathcal{L}_0^{-1}T$.

В силу теоремы Фредгольма пространство решений однородной задачи

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = 0, \quad w \in \mathring{H}(Q), \quad (17)$$

конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородной сопряженной задачи

$$w^* - (\mathcal{L}_0^{-1}T)^*w^* = 0, \quad w^* \in \mathring{H}(Q), \quad (18)$$

и для разрешимости операторного уравнения (16) в пространстве $\mathring{H}(Q)$ необходимо и достаточно ортогональности правой части h подпространству решений сопряженной однородной задачи. В частности, операторное уравнение (16) в пространстве $\mathring{H}(Q)$ имеет решение при любой $h \in \mathring{H}(Q)$, если однородная задача (17) имеет только тривиальное решение $w \equiv 0$. Таким образом, из леммы 1 и утверждения 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пространство решений однородной задачи (17) конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородной сопряженной задачи (18). Любое решение однородной задачи (17) принадлежит пространству $\mathring{W}_2^1(Q)$. Чтобы задача (12) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений w^* однородной задачи (18) выполнялось условие

$$(\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \text{div } F), w^*)_{\mathring{H}(Q)} = 0, \quad (19)$$

где v – решение задачи (11). При этом существует единственное решение $w(x)$ задачи (12), ортогональное (в пространстве $\mathring{H}(Q)$) всем решениям однородной задачи (17), и для него справедлива оценка

$$\|w\|_{\mathring{H}(Q)} \leq C(\|v\|_{\mathcal{U}(Q)} + \|f\|_{[\mathring{H}_1(Q)]^*} + \|\text{div } F\|_{[\mathring{H}_1(Q)]^*})$$

с не зависящей от v , f и F постоянной C .

И наконец, исходя из вышеизложенного сформулируем основной результат работы [16].

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (3), (5)–(7), (9), (10) и $u_0 \in L_2(\partial Q)$. Тогда, чтобы задача (1), (2) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений w^* однородной задачи (18) выполнялось условие (19), где v – решение задачи (11) с той же функцией u_0 . Решение задачи (1), (2) принадлежит пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$. При этом существует единственное решение задачи (1), (2) вида $u = v + w$, где w – решение задачи (12), ортогональное в пространстве $\dot{H}(Q)$ всем решениям однородной задачи (17). Для этого решения справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx \leq \\ \leq \text{const} \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2 + \int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} f^2(x) dx + \right. \\ \left. + \int_Q r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} |F(x)|^2 dx \right) \end{aligned} \quad (20)$$

с не зависящей от u_0 , f и F постоянной. Если однородная задача

$$\mathcal{L}u = 0, \quad u|_{\partial Q} = 0$$

в $W_2^1(Q)$ -постановке имеет только тривиальное решение, то решение неоднородной задачи (1), (2) в $W_{2,loc}^1(Q)$ -постановке существует при всех u_0 , f , F . Решение единственно и удовлетворяет неравенству (20).

Покажем далее, что при естественных дополнительных ограничениях на коэффициенты при младших членах уравнения для правых частей, принадлежащих пространству $W_2^{-1}(Q)$, условие (19) можно записать в более простом виде: в терминах исходной задачи. При этом, если граничная функция допускает принадлежащее $W_2^1(Q)$ продолжение в область Q , решение из $C_{n-1}(\bar{Q})$ является решением из $W_2^1(Q)$.

Итак, пусть коэффициенты $\bar{b}(x)$, $\bar{c}(x)$, $d(x)$ локально ограничены и удовлетворяют условиям

$$\int_0 B^2(t) dt < \infty, \quad B(t) \equiv \sup_{r(x) \geq t} |\bar{b}(x)|, \quad (21)$$

$$\int_0 C^2(t) dt < \infty, \quad C(t) \equiv \sup_{r(x) \geq t} |\bar{c}(x)|, \quad (22)$$

$$\int_0 t^2 D^2(t) dt < \infty, \quad D(t) \equiv \sup_{r(x) \geq t} |d(x)|, \quad (23)$$

а функции f и F в правой части уравнения (1) удовлетворяют условию

$$f \in L_2(Q), \quad F \in (L_2(Q))^n. \quad (24)$$

Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть $\partial Q \in C^1$ и выполнены условия (21)–(23). Тогда T является линейным и ограниченным оператором из $\mathcal{U}(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x^0 \in \partial Q$ — произвольная точка границы ∂Q области Q . Фиксируем локальную систему координат (x', x_n) с началом в точке x^0 , а ось x_n направим по внутренней нормали $\nu(x^0)$ к ∂Q в точке x^0 . Поскольку граница области гладкая, $\partial Q \in C^1$, существует $r_{x^0} > 0$ и функция $\varphi_{x^0} \in C^1(R_{n-1})$, удовлетворяющая условиям

$$\varphi_{x^0}(0) = 0, \quad \nabla \varphi_{x^0}(0) = 0, \quad |\nabla \varphi_{x^0}(x')| \leq \frac{1}{2}, \quad x' \in \mathbb{R}_{n-1},$$

такие, что пересечение области Q с шаром

$$U_{x^0}^{(r_{x^0})} = \{x: |x - x^0| < r_{x^0}\}$$

радиуса r_{x^0} с центром в точке x^0 имеет вид

$$Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})} = U_{x^0}^{(r_{x^0})} \cap \{(x', x_n): x_n > \varphi_{x^0}(x')\}.$$

Тогда

$$\partial Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})} = U_{x^0}^{(r_{x^0})} \cap \{(x', x_n): x_n = \varphi_{x^0}(x')\}.$$

Положим $\ell_{x^0} = r_{x^0}/\sqrt{2}$ и из покрытия $\{U_{x^0}^{(\ell_{x^0})}, x^0 \in \partial Q\}$ границы ∂Q выберем конечное подпокрытие $U_{x^m}^{(\ell_{x^m})}$, $m = 1, \dots, p$. Введем обозначения

$$U_m = U_{x^m}^{(r_{x^m})}, \quad r_m = r_{x^m}, \quad \ell_m = \ell_{x^m}, \quad \varphi_m = \varphi_{x^m}.$$

Пусть

$$h = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \min(r_1, \dots, r_p).$$

Тогда каждый из криволинейных “цилиндров”

$$\Pi_m^{\ell_m, h} = \{(x', x_n): |x'| < \ell_m, \varphi_m(x') < x_n < \varphi_m(x') + h\}, \quad m = 1, \dots, p,$$

лежит в соответствующем шаре U_m , а также в множестве $U_m \cap Q$.

Пусть $\ell_0 < h$ — такое положительное число, что дополнение в Q области

$$Q_{\ell_0} = \{x \in Q: r(x) = \text{dist}(x, \partial Q) > \ell_0\}$$

содержится в объединении “цилиндров” $\Pi_m^{\ell_m, h}$, $m = 1, \dots, p$:

$$Q_{\ell_0} = \{x \in Q: r(x) = \text{dist}(x, \partial Q) \leq \ell_0\} \subset \bigcup_{m=1}^p \Pi_m^{\ell_m, h}.$$

Легко видеть, что для каждого $m = 1, \dots, p$ для всех $x = (x', x_n) \in \Pi_m^{\ell_m, h}$

$$r(x) \leq x_n - \varphi_m(x') \leq \frac{\sqrt{5}}{2} r(x).$$

Зафиксируем некоторый номер m , $1 \leq m \leq p$, и возьмем локальную систему координат с началом в точке x^m . В дальнейшем зависимость функции φ_m от номера m

отмечать не будем: $\varphi = \varphi_m$. Определим отображения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{-1}$ пространства $\mathbb{R}_n$ на себя соотношениями

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= (x', x_n - \varphi(x')), & x &= (x', x_n), \\ \mathcal{L}_{-1}(y) &= (y', y_n + \varphi(y')), & y &= (y', y_n).\end{aligned}$$

Положим

$$\mathcal{L}(\Pi_m^{\ell_m, h}) = \tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}, \quad w(y', y_n + \varphi(y')) = \tilde{w}(y), \quad \eta(y', y_n + \varphi(y')) = \tilde{\eta}(y).$$

Возьмем произвольные $u \in \mathcal{U}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$. Рассмотрим

$$\langle Tu, \eta \rangle \equiv - \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx - \int_Q (\bar{c}(x)u(x), \nabla \eta(x)) dx - \int_Q d(x)u(x)\eta(x) dx.$$

Из условия (21) имеем $B(t) \leq \text{const} \cdot t^{-1/2}$ и

$$\begin{aligned}\left| \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx \right| &\leq \int_Q |\bar{b}(x)| |\nabla u(x)| |\eta(x)| dx \leq \\ &\leq \left(\int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_Q \frac{B^2(r(x))}{r(x)} \eta^2(x) dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Далее, применяя неравенство Харди, получаем

$$\begin{aligned}\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx &\leq \int_{Q_{t_0}} \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\ell_0^3} \int_Q \eta^2(x) dx + \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} \frac{\tilde{\eta}^2(y)}{y_n^2} dy = \\ &= \frac{1}{\ell_0^3} \int_Q \eta^2(x) dx + \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \int_0^h dy_n \int_{|y'| < \ell_m} \left(\int_0^{y_n} \tilde{\eta}_\tau(y', \tau) d\tau \right)^2 \frac{dy'}{y_n^2} \leq \\ &\leq \text{const} \int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx + \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \int_{|y'| < \ell_m} dy' \int_0^h \left(\int_0^{y_n} \tilde{\eta}_\tau(y', \tau) d\tau \right)^2 \frac{dy_n}{y_n^2} \leq \\ &\leq \text{const} \left(\int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx + \sum_{m=1}^p \int_{|y'| < \ell_m} dy' \int_0^h \tilde{\eta}_{y_n}^2(y', y_n) dy_n \right) \leq \\ &\leq \text{const} \left(\int_Q |\nabla \eta|^2 dx + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} |\nabla \tilde{\eta}(y)|^2 dy \right) \leq \text{const} \int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx.\end{aligned}\quad (25)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\left| \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx \right| &\leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \left(\int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_{1/2}^1(Q)},\end{aligned}\quad (26)$$

где постоянная не зависит от u и η .

В силу условия (22)

$$\begin{aligned}
\left| \int_Q (\bar{c}(x)u(x), \nabla \eta(x)) dx \right| &\leq \int_Q C(r(x))|u(x)| |\nabla \eta(x)| dx \leq \\
&\leq \left(\int_Q C^2(r(x))u^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \text{const} \left(\int_Q C^2(r(x))u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const} \left(C^2(\ell_0) \int_{Q_{\ell_0}} u^2(x) dx + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} C^2(r(x))u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_0^h C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right) dy_n \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)}.
\end{aligned}$$

Далее, в силу вложения $C_{n-1}(\bar{Q}) \subset L_2(Q)$ имеем

$$\begin{aligned}
\left| \int_Q (\bar{c}(x)u(x), \nabla \eta(x)) dx \right| &\leq \\
&\leq \text{const} \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \text{const} \|u\|_{U(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)},
\end{aligned} \tag{27}$$

где постоянная не зависит от u и η .

В силу (23) и (25) аналогично предыдущим оценкам получаем

$$\begin{aligned}
\left| \int_Q d(x)u(x)\eta(x) dx \right| &\leq \int_Q D(r(x))|u(x)| |\eta(x)| dx \leq \\
&\leq \left(\int_Q r^2(x)D^2(r(x))u^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \text{const} \left(\int_Q r^2(x)D^2(r(x))u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const} \left(D^2(\ell_0) \int_{Q_{\ell_0}} r^2(x)u^2(x) dx + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} r^2(x)D^2(r(x))u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const} \left(D^2(\ell_0) \max_{x \in \bar{Q}_{\ell_0}} r^2(x) \int_{Q_{\ell_0}} u^2(x) dx + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} y_n^2 D^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n \Big)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
& \leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_0^h y_n^2 D^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) dy_n \times \right. \\
& \quad \left. \times \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
& \leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
& \leq \text{const} (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)}, \quad (28)
\end{aligned}$$

где постоянная не зависит от u и η .

Таким образом, из оценок (26)–(28) получаем, что для произвольных $u \in \mathcal{U}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$ имеет место неравенство

$$|\langle Tu, \eta \rangle| \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)}$$

с не зависящей от u и η постоянной. Так как функции η из $C_0^\infty(Q)$ всюду плотны в пространстве $\dot{W}_2^1(Q)$, из полученной оценки немедленно вытекает ограниченность оператора $T: \mathcal{U}(Q) \mapsto \dot{W}_2^{-1}(Q)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что в формулировке леммы 3 условие (21) можно заменить условием

$$|\bar{b}(x)| \leq \frac{\text{const}}{r^{1/2}(x)}, \quad x \in Q.$$

Так как при выполнении условий (21)–(23) оператор T является вполне непрерывным оператором из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ [19], из леммы 3 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Оператор $\mathcal{L}_0^{-1}T$ как оператор, действующий из $\mathcal{U}(Q)$ в $\dot{W}_2^1(Q)$, является линейным и ограниченным, а как оператор, действующий из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$, он является вполне непрерывным оператором.*

Из условия (24) очевидно, что $f - \text{div } F \in \dot{W}_2^{-1}(Q)$. Так как $v \in \mathcal{U}(Q)$, в силу леммы 3 $Tv \in \dot{W}_2^{-1}(Q)$. Таким образом, $g = Tv + f - \text{div } F \in \dot{W}_2^{-1}(Q)$.

Наряду с уравнением (15) рассмотрим соответствующее уравнение в пространстве $\dot{W}_2^1(Q)$:

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = h, \quad w \in \dot{W}_2^1(Q). \quad (29)$$

Из леммы 3 вытекает следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Пусть функция w является решением операторного уравнения (15) в пространстве $\dot{\mathcal{U}}(Q)$ при $g \in \dot{W}_2^{-1}(Q)$. Тогда функция w является решением операторного уравнения (29) в пространстве $\dot{W}_2^1(Q)$ при $h = \mathcal{L}_0^{-1}g$.*

Объединяя утверждение 2 и утверждение 6, получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть $\partial Q \in C^1$ и выполнены условия (3), (5), (6), (21)–(23). Чтобы функция w являлась решением задачи (12), необходимо и достаточно, чтобы функция w являлась решением операторного уравнения (29) в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$ с правой частью $h = \mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \operatorname{div} F)$, где v – решение задачи (11).

Таким образом, проблема разрешимости задачи Дирихле (1), (2) в $C_{n-1}(\bar{Q})$ -постановке сведена к проблеме разрешимости операторного уравнения (29) в гильбертовом пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$ со вполне непрерывным оператором $\mathcal{L}_0^{-1}T$. В силу теоремы Фредгольма пространство решений соответствующего (29) однородного уравнения

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = 0, \quad w \in \mathring{W}_2^1(Q), \quad (30)$$

конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородного сопряженного уравнения

$$w^* - (\mathcal{L}_0^{-1}T)^*w^* = 0, \quad w^* \in \mathring{W}_2^1(Q), \quad (31)$$

где $(\mathcal{L}_0^{-1}T)^*$ – оператор, сопряженный (в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$) к $\mathcal{L}_0^{-1}T$. Для разрешимости операторного уравнения (29) в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$ необходимо и достаточно ортогональности правой части h подпространству решений однородного сопряженного уравнения (31). В частности, операторное уравнение (29) в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$ имеет решение при любой $h \in \mathring{W}_2^1(Q)$, если однородное уравнение (30) в $\mathring{W}_2^1(Q)$ имеет только тривиальное решение $w \equiv 0$.

Таким образом, условия разрешимости в $C_{n-1}(\bar{Q})$ исследуемой задачи можно записать в терминах скалярного произведения в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$, что позволяет сформулировать эти условия в терминах исходной задачи.

Определим в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$ скалярное произведение

$$(u, v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \int_Q (A(x)\nabla u(x), \nabla v) dx \equiv \langle \mathcal{L}_0 u, v \rangle, \quad (32)$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(u, v)_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \int_Q (uv + (\nabla u(x), \nabla v)) dx.$$

При таком скалярном произведении в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$ оператор $(\mathcal{L}_0^{-1}T)^*$, сопряженный к оператору $\mathcal{L}_0^{-1}T$, имеет следующий вид:

$$(\mathcal{L}_0^{-1}T)^* = \mathcal{L}_0^{-1}T_{L_2}^*, \quad (33)$$

где через $T_{L_2}^*$ обозначен оператор (сопряженный к оператору T в L_2)

$$T_{L_2}^* u = -(\bar{c}, \nabla u) + \operatorname{div}(\bar{b}u) - du, \quad u \in \mathring{W}_2^1(Q).$$

Действительно, в силу (32) имеем

$$(\mathcal{L}_0^{-1}Tu, v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \langle \mathcal{L}_0(\mathcal{L}_0^{-1}Tu), v \rangle = \langle Tu, v \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) v(x) dx - \int_Q (\bar{c}(x) u(x), \nabla v(x)) dx - \int_Q d(x) u(x) v(x) dx = \\
&= - \int_Q (\bar{c}(x), \nabla v(x)) u(x) dx - \int_Q (\bar{b}(x) v(x), \nabla u(x)) dx - \int_Q d(x) v(x) u(x) dx = \\
&= \langle T_{L_2}^* v, u \rangle = (\mathcal{L}_0^{-1} T_{L_2}^* v, u)'_{\dot{W}_2^1(Q)}.
\end{aligned}$$

Заметим, что оператор $T_{L_2}^*$ обладает теми же свойствами, что и оператор T .

С учетом формулы (33) сопряженное к (30) однородное уравнение (31) запишется в следующем виде:

$$w^* - \mathcal{L}_0^{-1} T_{L_2}^* w^* = 0, \quad w^* \in \dot{W}_2^1(Q),$$

а это означает, что w^* является решением из пространства $\dot{W}_2^1(Q)$ соответствующей (12) однородной сопряженной задачи Дирихле

$$- \operatorname{div}(A(x) \nabla w^*) + (\bar{c}(x), \nabla w^*) - \operatorname{div}(\bar{b}(x) w^*) + d(x) w^* = 0, \quad w^*|_{\partial Q} = 0. \quad (34)$$

Из вышеизложенного и утверждения 7 вытекает следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Пусть $\partial Q \in C^1$ и выполнены условия (3), (5), (6), (21)–(23). Тогда пространство решений (в $\dot{W}_2^1(Q)$) однородной сопряженной задачи (34) конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородной задачи

$$- \operatorname{div}(A(x) \nabla w) + (\bar{b}(x), \nabla w) - \operatorname{div}(\bar{c}(x) w) + d(x) w = 0, \quad w|_{\partial Q} = 0. \quad (35)$$

Чтобы задача (12) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений w^* однородной сопряженной задачи (34) выполнялось условие

$$(\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \operatorname{div} F), w^*)'_{\dot{W}_2^1(Q)} = 0, \quad (36)$$

где v – решение задачи (11). При этом существует единственное решение $w(x)$ задачи (12), ортогональное в смысле скалярного произведения $(\cdot, \cdot)'_{\dot{W}_2^1(Q)}$ всем решениям однородной задачи (35), и для него справедлива оценка

$$\|w\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq C(\|v\|_{U(Q)} + \|f\|_{L_2(Q)} + \|F\|_{L_2(Q)})$$

с не зависящей от v , f и F постоянной C .

Учитывая определение (32), условие (36) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \operatorname{div} F), w^*)'_{\dot{W}_2^1(Q)} = \langle (Tv + f - \operatorname{div} F), w^* \rangle = \\
&= - \int_Q (\bar{b}(x), \nabla v(x)) w^*(x) dx - \int_Q (\bar{c}(x) v(x), \nabla w^*(x)) dx - \int_Q d(x) v(x) w^*(x) dx + \\
&+ \int_Q f(x) w^*(x) dx + \int_Q (F(x), \nabla w^*(x)) dx = 0
\end{aligned}$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{aligned} \int_Q (\bar{b}(x), \nabla v(x)) w^*(x) dx + \int_Q (\bar{c}(x) v(x), \nabla w^*(x)) dx + \int_Q d(x) v(x) w^*(x) dx = \\ = \int_Q f(x) w^*(x) dx + \int_Q (F(x), \nabla w^*(x)) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, объединяя вышеизложенные утверждения, для рассматриваемого случая теорему о разрешимости задачи (1), (2) в пространстве $C_{n-1}(Q)$ можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\partial Q \in C^1$, выполнены условия (3), (5), (6), (21)–(23), и функция $u_0 \in L_2(\partial Q)$. Чтобы при $f \in L_2(Q)$, $F \in (L_2(Q))^n$ задача (1), (2) в $C_{n-1}(\bar{Q})$ -постановке имела решение, необходимо и достаточно, чтобы функции f , F для каждого $k = 1, \dots, p$ удовлетворяли условию

$$\begin{aligned} \int_Q f(x) w_k^*(x) dx + \int_Q (F(x), \nabla w_k^*(x)) dx = \\ = \int_Q (\bar{b}(x), \nabla v(x)) w_k^*(x) dx + \int_Q (\bar{c}(x) v(x), \nabla w_k^*(x)) dx + \int_Q d(x) v(x) w_k^*(x) dx, \quad (37) \end{aligned}$$

где v – решение задачи (11), а $w_k^*(x)$, $k = 1, \dots, p$, – функции из $\mathring{W}_2^1(Q)$, образующие базис в пространстве решений однородной сопряженной задачи (34). При этом существует единственное решение задачи (1), (2) вида

$$u = v + w, \quad (38)$$

где w – решение задачи (12), ортогональное в $\mathring{W}_2^1(Q)$ в смысле скалярного произведения $(\cdot, \cdot)'_{\mathring{W}_2^1(Q)}$ всем решениям однородной задачи (35). Для этого решения справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx \leq \\ \leq \text{const} \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2 + \int_Q f^2(x) dx + \int_Q |F(x)|^2 dx \right), \quad (39) \end{aligned}$$

с не зависящей от u_0 , f и F постоянной. Любое другое решение задачи (1), (2) получается добавлением к функции u и некоторого решения однородной задачи (35).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая вышеизложенное, для доказательства теоремы достаточно установить справедливость оценки (39).

Пусть u – (единственное) решение задачи (1), (2) вида $u = v + w$, где v – решение задачи (11), а w – решение задачи (12), ортогональное в $\mathring{W}_2^1(Q)$ всем решениям однородной задачи (35), т. е. решение однородного уравнения (30). Тогда

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \leq \|v\|_{\mathcal{U}(Q)} + \|w\|_{\mathcal{U}(Q)} \leq \text{const} (\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|w\|_{\mathring{W}_2^1(Q)}) \leq \\ \leq \text{const} (\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \text{div } F)\|_{\mathring{W}_2^1(Q)}) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \text{const} (\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|f\|_{\dot{W}_2^{-1}(Q)} + \|\text{div } F\|_{\dot{W}_2^{-1}(Q)}) \leq \\ &\leq \text{const} \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \left(\int_Q f^2(x) dx \right)^{1/2} + \left(\int_Q |F(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right), \end{aligned}$$

где постоянная не зависит от u_0 , f , F . Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда граничная функция u_0 допускает принадлежащее пространству $W_2^1(Q)$ продолжение в область Q . Тогда решение v задачи (11) принадлежит пространству $W_2^1(Q)$. Любое решение задачи (1), (2) представляется в виде суммы решения задачи (11) (принадлежащего пространству $W_2^1(Q)$) и решения задачи (12) (принадлежащего пространству $\dot{W}_2^1(Q)$), поэтому решение задачи (1), (2) также принадлежит пространству $W_2^1(Q)$, и для единственного решения u вида (38) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^1(Q)} &\leq \|v\|_{W_2^1(Q)} + \|w\|_{W_2^1(Q)} \leq \text{const} (\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|w\|_{\dot{W}_2^1(Q)}) \leq \\ &\leq \text{const} \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \left(\int_Q f^2(x) dx \right)^{1/2} + \left(\int_Q |F(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right), \quad (40) \end{aligned}$$

где постоянная не зависит от u_0 , f , F .

Таким образом, если u_0 допускает принадлежащее $W_2^1(Q)$ продолжение в область Q , то условие (37) является необходимым и достаточным для разрешимости задачи (1), (2) в пространстве $W_2^1(Q)$. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\partial Q \in C^1$, выполнены условия (3), (5), (6), (21)–(23), и функция u_0 допускает принадлежащее пространству $W_2^1(Q)$ продолжение в область Q . Чтобы при $f \in L_2(Q)$, $F \in (L_2(Q))^n$ задача (1), (2) имела решение в $W_2^1(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы функции f , F удовлетворяли условию (37). При этом для решения задачи (1), (2) вида (38) справедлива оценка (40).

Список литературы

- [1] В. П. Михайлов, *Дифференц. уравнения*, **12**:10 (1976), 1877–1891.
- [2] В. П. Михайлов, *Матем. заметки*, **27**:1 (1980), 137–145.
- [3] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1983.
- [4] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “О граничных значениях решений эллиптических уравнений”, *Обобщенные функции и их применения в математической физике* (24–28 ноября 1980 г., Москва), ВЦ АН СССР, М., 1981, 189–205.
- [5] О. И. Богоявленский, В. С. Владимиров, И. В. Волович, А. К. Гущин, Ю. Н. Дрожжинов, В. В. Жаринов, В. П. Михайлов, *Тр. МИАН*, **175**, 63–102.
- [6] И. М. Петрушко, *Матем. сб.*, **119**(161) (1982), 48–77.
- [7] И. М. Петрушко, *Матем. сб.*, **120**(162):4 (1983), 569–588.
- [8] А. К. Гущин, *Матем. сб.*, **137**(179):1(9), 19–64.
- [9] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, *Матем. сб.*, **182**:6 (1991), 787–810.
- [10] А. К. Гущин, *ТМФ*, **174**:2 (2013), 243–255.
- [11] А. К. Гущин, *Матем. сб.*, **203**:1 (2012), 3–30.
- [12] А. К. Гущин, *Докл. РАН*, **446**:5 (2012), 487–489.

- [13] В. Ж. Думанян, *Изв. НАН Армении. Сер. Матем.*, **45**:1 (2010), 31–52.
- [14] В. Ж. Думанян, *Докл. РАН*, **386**:6 (2002), 735–737.
- [15] V. Zh. Dumanian, *Note Mat.*, **21**:2 (2002/2003), 99–118.
- [16] В. Ж. Думанян, *Матем. сб.*, **202**:7, 75–94.
- [17] В. Ж. Думанян, *Докл. РАН*, **436**:2 (2011), 159–162.
- [18] В. П. Михайлов, А. К. Гущин, “Дополнительные главы курса “Уравнения математической физики””, Лекц. курсы НОЦ, **7**, МИАН, М., 2007, 3–144.
- [19] V. Zh. Dumanyan, *Proc. of the Yerevan State Univ. Phys. and Mathem. Sci.*, 2011, № 2, 17–21.

Поступила в редакцию 28.02.2014,
после доработки 27.03.2014