Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Кашаев, Бета-пентагональные уравнения, *ТМФ*,
2014, том 181, номер 1, 73–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8671>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 07:12:12

© 2014 г.

Р. М. Кашаев*

БЕТА-ПЕНТАГОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Квантовое пентагональное соотношение лежит в основе существующих конструкций трехмерной квантовой топологии, использующих комбинаторику триангуляций. Обсуждаются специальный класс интегральных пентагональных соотношений и их связь с операторными пентагональными соотношениями фаддеевского типа.

Ключевые слова: пентагональное соотношение, квантовый дилогарифм, локально компактная абелева группа.

DOI: 10.4213/tmf8671

*Посвящается профессору Людвигу Фаддееву
в связи с его восьмидесятилетием*

1. ВВЕДЕНИЕ

Под *пентагональным соотношением* в широком смысле мы будем понимать произвольное алгебраическое соотношение, которому можно придать смысл в терминах движений Пахнера типа 2–3 в триангулированных трехмерных многообразиях. Частному, но все еще достаточно широкому классу пентагональных соотношений удовлетворяют $6j$ -символы, возникающие в теории представлений алгебр Хопфа. Исторически первый пример таких соотношений был построен в работе Бийденхарна и Элиотта в 1953 году [1], [2] в рамках квантовой теории углового момента.

Мотивированная задачей построения точного комбинаторного описания статистических сумм квантовой теории Черна–Саймонса с некомпактными калибровочными группами, конструкция работ [3], [4] базируется на пентагональных интегральных соотношениях, структура которых напоминает структуру соотношений Бийденхарна–Элиотта, но в которой дискретные переменные, отвечающие классам эквивалентности неприводимых представлений группы $SU(2)$, заменены на непрерывные переменные, а дискретные суммы – на интегрирования. В настоящей работе мы рассматриваем эти соотношения в рамках более общего объединяющего подхода и устанавливаем их связь с операторными пентагональными соотношениями фаддеевского типа. Этот объединяющий подход основан на теории локально компактных абелевых групп и состоит в следующем.

*Section de mathématiques, Université de Genève, Genève, Suisse.
E-mail: Rinat.Kashaev@unige.ch

Для двух множеств S и T обозначим через S^T множество всех отображений из T в S . Для произвольного неотрицательного целого числа n обозначим через $[n]$ множество $\mathbb{Z}_{\geq 0} \cap \mathbb{Z}_{\leq n}$, а через $\Delta[n]$ обозначим стандартный комбинаторный n -симплекс, рассматриваемый, например, как степенное множество $2^{[n]}$. Обозначим через $\Delta[n]_i$ множество i -мерных симплексов в симплексе $\Delta[n]$.

Пусть A – локально компактная абелева группа с фиксированной мерой Хаара dx . Будем говорить, что функция

$$\phi: [4] \times A^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (j, x, y) \mapsto \phi_j(x, y), \quad (1)$$

имеет *бета-пентагональный тип* над A , если выполнено следующее пентагональное интегральное соотношение:

$$\phi_1(x, y)\phi_3(u, v) = \int_A \phi_4(uy, v\bar{z})\phi_2(xuyv\bar{z}, z)\phi_0(xv, y\bar{z}) dz, \quad (2)$$

где введено обозначение $\bar{x} \equiv x^{-1}$. Будем называть соотношение (2) *бета-пентагональным соотношением* над A . Появление этого соотношения мотивировано следующими комбинаторными наблюдениями.

Пусть дано отображение вида (1), определим другое отображение

$$W: \Delta[4]_3 \times A^{\Delta[3]_1} \rightarrow \mathbb{C} \quad (3)$$

с помощью операции присваивания:

$$W(\partial_i \Delta[4], x) = \phi_i(x_{01}x_{23}\bar{x}_{03}\bar{x}_{12}, x_{03}x_{12}\bar{x}_{02}\bar{x}_{13}), \quad (4)$$

где x_{jk} – x -образ ребра $\{j, k\}$. Тогда соотношение

$$\prod_{i \in \{1, 3\}} W(\partial_i \Delta[4], \varepsilon_i^* x) = \int_A dx_{13} \prod_{i \in \{0, 2, 4\}} W(\partial_i \Delta[4], \varepsilon_i^* x), \quad x \in A^{\Delta[4]_1}, \quad (5)$$

со стандартными операциями инъекций $\varepsilon_i: [3] \rightarrow [4]$, $i \in [4]$, задаваемыми формулами

$$\varepsilon_i(j) = \begin{cases} j, & j < i, \\ j+1 & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (6)$$

является следствием бета-пентагонального соотношения для ϕ . Эту комбинаторную интерпретацию можно использовать в качестве отправной точки для конструкций типа топологической квантовой теории поля (ТКТП), основанных на комбинаторике триангулированных трехмерных псевдомногообразий, типа моделей Понцано–Редже и Тураева–Виро [3]–[6].

Интересный пример функции бета-пентагонального типа над $\mathbb{R}$, объясняющий само происхождение термина, дается бета-функцией Эйлера

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (7)$$

Именно, явное решение дается следующей формулой [3]:

$$\phi_j(x, y) = B(2\pi i(x + y - i0), -2\pi i(y + i0)). \quad (8)$$

Это решение не применялось в топологических приложениях, так как оно не удовлетворяет симметриям тетраэдра, но было бы интересно выяснить, может ли пентагональное соотношение иметь какое-либо значение, например, для амплитуд Вейнберга в теории струн.

2. СИММЕТРИИ БЕТА-ПЕНТАГОНАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Одну из симметрий бета-пентагональных соотношений можно получить сразу с помощью обращения групповых аргументов. А именно, если функция $\phi_i(x, y)$ имеет бета-пентагональный тип над A , то легко видеть, что функция

$$\phi'_i(x, y) \equiv \phi_i(\bar{x}, \bar{y}) \quad (9)$$

также имеет бета-пентагональный тип над A .

Обозначим через $\hat{A}$ группу, дуальную группе A по Понтрягину. Интересно отметить, что бета-пентагональное соотношение оказывается стабильным при преобразовании Фурье в том смысле, что в случае, когда функция $\phi_i(x, y)$ имеет бета-пентагональный тип над A , функция

$$\hat{\phi}_i(\xi, \eta) \equiv \int_{A^2} \frac{\xi(y)}{\eta(x)} \phi_i(x, y) dx dy, \quad (\xi, \eta) \in \hat{A}^2 \quad (10)$$

будет также бета-пентагонального типа над $\hat{A}$. Это проверяется следующим образом.

Сначала для произвольной интегрируемой функции $f \in \mathbb{C}^{\hat{A}^2}$ зададим ее частичный фурье-образ $\check{f} \in \mathbb{C}^{\hat{A} \times A}$ с помощью формулы

$$\check{f}(\xi, y) \equiv \int_A \bar{\xi}(x) f(x, y) dx, \quad (\xi, y) \in \hat{A} \times A. \quad (11)$$

Таким образом, получаем

$$f(x, y) = \int_{\hat{A}} \xi(x) \check{f}(\xi, y) d\xi \quad (12)$$

и

$$\hat{f}(\eta, \xi) = \int_A \eta(y) \check{f}(\xi, y) dy. \quad (13)$$

Запишем теперь

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1(\xi, \eta) \hat{\phi}_3(\mu, \nu) &= \int_{A^4} \frac{\xi(y) \mu(v)}{\eta(x) \nu(u)} \phi_1(x, y) \phi_3(u, v) dx dy du dv = \\ &= \int_{A^5} \frac{\xi(y) \mu(v)}{\eta(x) \nu(u)} \phi_4(uy, v\bar{z}) \phi_2(xyuv\bar{z}, z) \phi_0(xv, y\bar{z}) dz dx dy du dv = \\ &= \int_{A^5} \frac{\xi(yz) \mu(vz)}{\eta(x\bar{v}\bar{z}) \nu(u\bar{y}\bar{z})} \phi_4(u, v) \phi_2(xu\bar{z}, z) \phi_0(x, y) dz dx dy du dv, \end{aligned} \quad (14)$$

где в последнем равенстве была произведена замена переменных $x \mapsto x\bar{v}$, $u \mapsto u\bar{y}$ с последующей подстановкой $y \mapsto yz$, $v \mapsto vz$. Применяя (12) к ϕ_2 и собирая все

характеры, относящиеся к z , а затем применяя (13), получаем

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}_1(\xi, \eta) \hat{\phi}_3(\mu, \nu) &= \\
 &= \int_{\hat{A} \times A^5} \frac{\xi(yz)\mu(vz)\sigma(xu\bar{z})}{\eta(x\bar{v}\bar{z})\nu(u\bar{y}\bar{z})} \phi_4(u, v) \check{\phi}_2(\sigma, z) \phi_0(x, y) d\sigma dz dx dy du dv = \\
 &= \int_{A^5 \times \hat{A}} \frac{\xi(y)\mu(v)\sigma(xu)\xi\eta\mu\nu\bar{\sigma}(z)}{\eta(x\bar{v})\nu(u\bar{y})} \phi_4(u, v) \check{\phi}_2(\sigma, z) \phi_0(x, y) dz dx dy du dv d\sigma = \\
 &= \int_{A^4 \times \hat{A}} \frac{\xi\nu(y)\mu\eta(v)}{\eta\bar{\sigma}(x)\nu\bar{\sigma}(u)} \phi_4(u, v) \hat{\phi}_2(\xi\eta\mu\nu\bar{\sigma}, \sigma) \phi_0(x, y) dx dy du dv d\sigma,
 \end{aligned}$$

где в последнем равенстве собраны все характеры, примененные к x, y, u, v . Наконец, применяя (10) к ϕ_0 и ϕ_4 , получим окончательный ответ в виде интеграла

$$\hat{\phi}_1(\xi, \eta) \hat{\phi}_3(\mu, \nu) = \int_{\hat{A}} \hat{\phi}_4(\mu\eta, \nu\bar{\sigma}) \hat{\phi}_2(\xi\eta\mu\nu\bar{\sigma}, \sigma) \hat{\phi}_0(\xi\nu, \eta\bar{\sigma}) d\sigma.$$

3. ФУНКЦИИ АВТОМОРФНОГО БЕТА-ПЕНТАГОНАЛЬНОГО ТИПА

Пусть A – локально компактная абелева группа, а $B \subset A$ – ее подгруппа, $g \in \hat{B}^{[2]}$, и $h: A \rightarrow \hat{B}$, $x \mapsto h_x$, – гомоморфизм групп такой, что отображение $\varepsilon: B \rightarrow \mathbb{T}$, $b \mapsto h_b(b)$ представляет собой характер группы. Функцию $\phi \in \mathbb{C}^{[4] \times A^2}$ будем называть *функцией автоморфного бета-пентагонального типа* (B, g, h) , если она одновременно удовлетворяет бета-пентагональному соотношению (2) и условиям автоморфности

$$\phi_i(bx, y) = \gamma_i h_y(b) \phi_i(x, y), \quad (i, b, x, y) \in [4] \times B \times A^2, \quad (15)$$

где

$$\gamma_0 = g(0), \quad \gamma_1 = g(0)g(1), \quad \gamma_2 = g(1), \quad \gamma_3 = g(1)g(2), \quad \gamma_4 = g(2). \quad (16)$$

Наш первый основной результат формулируется в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\phi \in \mathbb{C}^{[4] \times A^2}$ – функция автоморфного бета-пентагонального типа (B, g, h) , то для произвольных характеров $\alpha, \beta \in \hat{B}$ функция $\psi \in \mathbb{C}^{[4] \times A^2}$, задаваемая формулой*

$$\psi_i(x, y) = \int_B \phi_i(x, yb) \mu_i h_{bx}(b) db, \quad (i, x, y) \in [4] \times A^2, \quad (17)$$

где

$$\mu_0 = \alpha\gamma_3, \quad \mu_1 = \alpha, \quad \mu_2 = \alpha\beta\gamma_0\gamma_2\gamma_4, \quad \mu_3 = \beta, \quad \mu_4 = \beta\gamma_1, \quad (18)$$

удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}
 \psi_i(bx, y) &= \gamma_i h_y(b) \psi_i(x, y), \\
 \psi_i(x, by) &= \varepsilon \bar{\mu}_i h_{\bar{x}}(b) \psi_i(x, y),
 \end{aligned} \quad (i, b, x, y) \in [4] \times B \times A^2, \quad (19)$$

$$\psi_1(x, y) \psi_3(u, v) = \int_{A/B} \psi_4(uy, v\bar{z}) \psi_2(xuyv\bar{z}, z) \psi_0(xv, y\bar{z}) dz. \quad (20)$$

Перед тем как перейти к доказательству теоремы, докажем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. *Для заданных локально компактной абелевой группы A , ее подгруппы $B \subset A$ и гомоморфного отображения групп $h: A \rightarrow \widehat{B}$, $x \mapsto h_x$, отображение $\varepsilon: B \rightarrow \mathbb{T}$, $b \mapsto h_b(b)$, представляет собой групповой гомоморфизм тогда и только тогда, когда*

$$h_b(c)h_c(b) = 1, \quad (b, c) \in B^2. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\varepsilon(bc) = h_{bc}(bc) = h_{bc}(b)h_{bc}(c) = h_b(b)h_c(b)h_b(c)h_c(c) = \varepsilon(b)\varepsilon(c)h_c(b)h_b(c), \quad (22)$$

так что

$$\varepsilon(bc) = \varepsilon(b)\varepsilon(c) \Leftrightarrow h_c(b)h_b(c) = 1. \quad (23)$$

ЛЕММА 2. *Для заданных локально компактной абелевой группы A , ее подгруппы $B \subset A$, характера $\gamma \in \widehat{B}$ и гомоморфного отображения групп $h: A \rightarrow \widehat{B}$, $x \mapsto h_x$, такого, что выполнено соотношение (21), выберем функцию $f \in \mathbb{C}^{A^2}$ такую, что*

$$f(bx, y) = \gamma h_y(b)f(x, y), \quad (b, x, y) \in B \times A^2. \quad (24)$$

Тогда функция $\tilde{f} \in \mathbb{C}^{A^2 \times \widehat{B}}$, заданная соотношением

$$\tilde{f}(x, y, \xi) = \int_B \xi(b)f(x, by) db, \quad (25)$$

удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \tilde{f}(bx, y, \xi) &= \gamma h_y(b)\tilde{f}(x, y, \xi h_{\bar{b}}), \\ \tilde{f}(x, by, \xi) &= \bar{\xi}(b)\tilde{f}(x, y, \xi), \end{aligned} \quad (b, x, y, \xi) \in B \times A^2 \times \widehat{B}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}(bx, y, \xi) &= \int_B \xi(b')f(bx, b'y) db' = \int_B \xi(b')\gamma h_{b'y}(b)f(x, b'y) db' = \\ &= \gamma h_y(b) \int_B \xi(b')h_{b'}(b)f(x, b'y) db' = \gamma h_y(b) \int_B \xi(b')h_{\bar{b}}(b')f(x, b'y) db' = \\ &= \gamma h_y(b)\tilde{f}(x, y, \xi h_{\bar{b}}) \end{aligned} \quad (27)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, by, \xi) &= \int_B \xi(b')f(x, b'by) db' = \int_B \xi(b'\bar{b})f(x, b'y) db' = \\ &= \bar{\xi}(b)f(x, y, \xi). \end{aligned} \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала отметим справедливость соотношения

$$\psi_i(x, y) = \omega_i(x, y, \mu_i), \quad (29)$$

где

$$\omega_i(x, y, \xi) \equiv \tilde{\phi}_i(x, y, \varepsilon h_x \xi), \quad (i, x, y, \xi) \in [4] \times A^2 \times \widehat{B}. \quad (30)$$

Применяя лемму 2, можно проверить справедливость свойства (19):

$$\begin{aligned}\psi_i(bx, y) &= \omega_i(bx, y, \mu_i) = \tilde{\phi}_i(bx, y, \varepsilon h_{bx}\mu_i) = \\ &= \gamma_i h_y(b) \tilde{\phi}_i(x, y, \varepsilon h_x \mu_i) = \gamma_i h_y(b) \omega_i(x, y, \mu_i) = \gamma_i h_y(b) \psi_i(x, y)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\psi_i(x, by) &= \omega_i(x, by, \mu_i) = \tilde{\phi}_i(x, by, \varepsilon h_x \mu_i) = \\ &= \varepsilon \bar{\mu}_i h_{\bar{x}}(b) \tilde{\phi}_i(x, y, \varepsilon h_x \mu_i) = \varepsilon \bar{\mu}_i h_{\bar{x}}(b) \omega_i(x, y, \mu_i) = \varepsilon \bar{\mu}_i h_{\bar{x}}(b) \psi_i(x, y).\end{aligned}$$

Чтобы проверить (20), сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}\omega_1(x, y, \xi \varepsilon h_{\bar{x}}) \omega_3(u, v, \eta \varepsilon h_{\bar{u}}) &= \\ &= \tilde{\phi}_1(x, y, \xi) \tilde{\phi}_3(u, v, \eta) = \int_{B^2} \xi(b) \eta(c) \phi_1(x, by) \phi_3(u, cv) db dc = \\ &= \int_{A \times B^2} \xi(b) \eta(c) \phi_4(uby, cv\bar{z}) \phi_2(xbyucv\bar{z}, z) \phi_0(xcv, by\bar{z}) dz db dc,\end{aligned}$$

где в последнем равенстве было использовано бета-пентагональное соотношение для ϕ . Продолжим преобразования, применив (15) к функциям ϕ_4 и ϕ_0 :

$$\begin{aligned}\omega_1(x, y, \xi \varepsilon h_{\bar{x}}) \omega_3(u, v, \eta \varepsilon h_{\bar{u}}) &= \\ &= \int_{A \times B^2} \xi(b) \eta(c) \gamma_4 h_{cv\bar{z}}(b) \gamma_0 h_{by\bar{z}}(c) \phi_4(uy, cv\bar{z}) \phi_2(bcxuyv\bar{z}, z) \phi_0(xv, by\bar{z}) dz db dc = \\ &= \int_{A \times B^2} \xi \gamma_4 h_{v\bar{z}}(b) \eta \gamma_0 h_{y\bar{z}}(c) \phi_4(uy, cv\bar{z}) \phi_2(bcxuyv\bar{z}, z) \phi_0(xv, by\bar{z}) dz db dc,\end{aligned}$$

где было использовано свойство (21). Далее применим (15) к функции ϕ_2 :

$$\begin{aligned}\omega_1(x, y, \xi \varepsilon h_{\bar{x}}) \omega_3(u, v, \eta \varepsilon h_{\bar{u}}) &= \\ &= \int_{A \times B^2} \xi \gamma_4 h_{v\bar{z}}(b) \eta \gamma_0 h_{y\bar{z}}(c) \gamma_2 h_z(bc) \phi_4(uy, cv\bar{z}) \phi_2(xyuv\bar{z}, z) \phi_0(xv, by\bar{z}) dz db dc = \\ &= \int_{A \times B^2} \xi \gamma_4 \gamma_2 h_v(b) \eta \gamma_0 \gamma_2 h_y(c) \phi_4(uy, cv\bar{z}) \phi_2(xyuv\bar{z}, z) \phi_0(xv, by\bar{z}) dz db dc = \\ &= \int_A \tilde{\phi}_4(uy, v\bar{z}, \eta \gamma_1 h_y) \phi_2(xyuv\bar{z}, z) \tilde{\phi}_0(xv, y\bar{z}, \xi \gamma_3 h_v) dz,\end{aligned}$$

где в последнем равенстве были использованы соотношения (16), (25). Далее представим интегрирование по A в виде двойного интеграла по B и A/B :

$$\begin{aligned}\omega_1(x, y, \xi \varepsilon h_{\bar{x}}) \omega_3(u, v, \eta \varepsilon h_{\bar{u}}) &= \\ &= \int_{B \times A/B} \tilde{\phi}_4(uy, v\bar{z}, \eta \gamma_1 h_y) \phi_2(xyuv\bar{z}, bz) \tilde{\phi}_0(xv, y\bar{z}, \xi \gamma_3 h_v) db dz = \\ &= \int_{B \times A/B} \xi \eta \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \varepsilon h_{yv\bar{z}}(b) \tilde{\phi}_4(uy, v\bar{z}, \eta \gamma_1 h_y) \phi_2(xyuv\bar{z}, bz) \tilde{\phi}_0(xv, y\bar{z}, \xi \gamma_3 h_v) db dz,\end{aligned}$$

где были использованы лемма 2 и условие (15). Завершим вычисление нахождением интеграла по B с применением определения (25):

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y, \xi \varepsilon h_{\bar{x}}) \omega_3(u, v, \eta \varepsilon h_{\bar{u}}) &= \\ &= \int_{A/B} \tilde{\phi}_4(uy, v\bar{z}, \eta \gamma_1 h_y) \tilde{\phi}_2(xyuv\bar{z}, z, \xi \eta \gamma_1 \bar{\gamma}_2 \gamma_3 \varepsilon h_{y\bar{v}\bar{z}}) \tilde{\phi}_0(xv, y\bar{z}, \xi \gamma_3 h_v) dz = \\ &= \int_{A/B} \omega_4(uy, v\bar{z}, \varepsilon \eta \gamma_1 h_{\bar{u}}) \omega_2(xyuv\bar{z}, z, \xi \eta \gamma_1 \bar{\gamma}_2 \gamma_3 h_{\bar{x}\bar{u}}) \omega_0(xv, y\bar{z}, \varepsilon \xi \gamma_3 h_{\bar{x}}) dz. \end{aligned}$$

Полученное равенство при подстановке $\xi = \alpha \varepsilon h_x$ и $\eta = \beta \varepsilon h_u$ принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y, \alpha) \omega_3(u, v, \beta) &= \\ &= \int_{A/B} \omega_4(uy, v\bar{z}, \beta \gamma_1) \omega_2(xyuv\bar{z}, z, \alpha \beta \gamma_1 \bar{\gamma}_2 \gamma_3) \omega_0(xv, y\bar{z}, \alpha \gamma_3) dz, \end{aligned} \quad (31)$$

который с учетом (18) и (29) эквивалентен уравнению (20).

4. ФУНКЦИИ ФАДДЕЕВСКОГО ТИПА

Будем называть функцию

$$f: [4] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (i, x) \mapsto f_i(x), \quad (32)$$

функцией фаддеевского типа, если она удовлетворяет операторному соотношению

$$f_1(\mathbf{p}) f_3(\mathbf{q}) = f_4(\mathbf{q}) f_2(\mathbf{p} + \mathbf{q}) f_0(\mathbf{p}), \quad (33)$$

где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ – самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве и удовлетворяющие коммутационным соотношениям Гейзенберга:

$$\mathbf{p}\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{p} = (2\pi i)^{-1}. \quad (34)$$

ЛЕММА 3. *Функция f , интегрируемая с квадратом, является функцией фаддеевского типа тогда и только тогда, когда*

$$\tilde{f}_1(x) \tilde{f}_3(y) = e^{-2\pi i x y} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_4(y - z) \tilde{f}_2(z) \tilde{f}_0(x - z) e^{\pi i z^2} dz \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (35)$$

где

$$\tilde{f}(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y} f(y) dy. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя обратное преобразование Фурье, приведем равенство (33) к виду операторнозначного интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}_1(x) \tilde{f}_3(y) e^{2\pi i x \mathbf{p}} e^{2\pi i y \mathbf{q}} dx dy &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}_4(y) \tilde{f}_2(z) \tilde{f}_0(x) e^{2\pi i y \mathbf{q}} e^{2\pi i z(\mathbf{p} + \mathbf{q})} e^{2\pi i x \mathbf{p}} dx dy dz, \end{aligned} \quad (37)$$

которое с учетом операторных равенств

$$e^{2\pi i x p} e^{2\pi i y q} = e^{(2\pi i)^2 x y [p, q]} e^{2\pi i y q} e^{2\pi i x p} = e^{2\pi i x y} e^{2\pi i y q} e^{2\pi i x p} \quad (38)$$

и

$$e^{2\pi i z (p+q)} = e^{(2\pi i)^2 z^2 [p, q]/2} e^{2\pi i z q} e^{2\pi i z p} = e^{\pi i z^2} e^{2\pi i z q} e^{2\pi i z p}, \quad (39)$$

можно привести к виду

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}_1(x) \tilde{f}_3(y) e^{2\pi i x y} e^{2\pi i y q} e^{2\pi i x p} dx dy &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}_4(y) \tilde{f}_2(z) \tilde{f}_0(x) e^{\pi i z^2} e^{2\pi i (y+z) q} e^{2\pi i (x+z) p} dx dy dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}_4(y-z) \tilde{f}_2(z) \tilde{f}_0(x-z) e^{\pi i z^2} e^{2\pi i y q} e^{2\pi i x p} dx dy dz. \end{aligned} \quad (40)$$

Сравнивая коэффициенты при операторах $e^{2\pi i y q} e^{2\pi i x p}$, приходим к заключению, что равенство (40) выполнено тогда и только тогда, когда выполнено равенство (35).

Применив операцию комплексного сопряжения к (35), получим также

$$\bar{\tilde{f}}_1(x) \bar{\tilde{f}}_3(y) = e^{2\pi i x y} \int_{\mathbb{R}} \bar{\tilde{f}}_4(y-z) \bar{\tilde{f}}_2(z) \bar{\tilde{f}}_0(x-z) e^{-\pi i z^2} dz, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (41)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $f_i(x)$ – функция фаддеевского типа, то функция $g_i(x) = f_i(-x)$ также является функцией фаддеевского типа.

ПРИМЕР 1. Постоянная единичная функция

$$f_i(x) = 1, \quad i \in [4], \quad (42)$$

очевидно, имеет фаддеевский тип.

ПРИМЕР 2. Гауссовы экспоненты

$$f_j(x) = a_j e^{-b_j x^2}, \quad j \in [4], \quad a \in \mathbb{R}^{[4]}, \quad b \in \mathbb{R}_{>0}^{[4]}, \quad (43)$$

образуют функцию фаддеевского типа при подходящем выборе постоянных a_j и b_j .

ПРИМЕР 3. Нетривиальный и важный пример функции фаддеевского типа – это квантовый дилогарифм Фаддеева [7]:

$$f_j(x) = \Phi_{\hbar}(x) \equiv \exp\left(\int_{\mathbb{R}+i\epsilon} \frac{e^{-i2xz}}{4 \operatorname{sh}(zb) \operatorname{sh}(zb^{-1})} \frac{dz}{z}\right), \quad j \in [4], \quad (44)$$

где $\hbar \in \mathbb{R}_{>0}$, b – произвольный корень уравнения

$$(b + b^{-1})^{-2} = \hbar, \quad (45)$$

ϵ – произвольно выбранное достаточно малое положительное вещественное число. Удобно выбрать единственный корень b такой, что $0 \leq \arg b < \pi/2$ и $\sqrt{\hbar} = (b + b^{-1})^{-1} > 0$.

Интеграл в формуле (44) сходится абсолютно и допускает аналитическое продолжение в комплексную область переменной x с $|\operatorname{Im} x| < 1/2\sqrt{\hbar}$. В случае, когда $\arg b > 0$ (т.е. $\hbar > 1/4$), можно показать, что

$$\Phi_{\hbar}(x) = \frac{(-qe^{2\pi bx}; q^2)_{\infty}}{(-\bar{q}e^{2\pi b^{-1}x}; \bar{q}^2)_{\infty}}, \quad q := e^{\pi i b^2}, \quad \bar{q} := e^{-\pi i b^{-2}}, \quad (46)$$

где было использовано стандартное обозначение из теории базисных гипергеометрических рядов:

$$(x; q)_{\infty} \equiv \prod_{n=0}^{\infty} (1 - xq^n), \quad |q| < 1. \quad (47)$$

Соотношение (46) можно применить для аналитического продолжения определения функции $\Phi_{\hbar}(x)$ на всю комплексную плоскость. Можно непосредственно убедиться, что эта функция удовлетворяет функциональным уравнениям

$$\Phi_{\hbar}\left(x - \frac{ib^{\pm 1}}{2}\right) = (1 + e^{2\pi b^{\pm 1}x})\Phi_{\hbar}\left(x + \frac{ib^{\pm 1}}{2}\right). \quad (48)$$

Имеет место также соотношение обращения:

$$\Phi_{\hbar}(x)\Phi_{\hbar}(-x) = e^{\pi i x^2} e^{-\pi i(2+\hbar^{-1})/12}. \quad (49)$$

Квантовый дилогарифм Фаддеева тесно связан с функцией двойного синуса Шинтани [8]–[10], однако то, что эта функция удовлетворяет пентагональному соотношению (33), по-видимому, было неизвестно до работы Фаддеева [11]. (Другие свойства квантового дилогарифма Фаддеева см., например, в [12]–[15].)

Наш второй главный результат – это следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть f и g – две функции фаддеевского типа. Тогда функция

$$\begin{aligned} \varphi: [4] \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (j, x, y) &\mapsto \varphi_j(x, y) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i y t} f_j\left(t + \frac{x}{2}\right) \bar{g}_j\left(t - \frac{x}{2}\right) dt, \end{aligned} \quad (50)$$

имеет бета-пентагональный тип над $\mathbb{R}$, т.е. она удовлетворяет соотношению (2) с $A = \mathbb{R}$.

Полезно дать операторную интерпретацию формуле (50). Если определить оператор Фурье F формулой

$$(Ff)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y} f(y) dy, \quad (51)$$

которая унитарна в $L^2(\mathbb{R})$ в силу формулы обратного преобразования Фурье, то получим соотношения

$$pF = Fq, \quad qF = -Fp, \quad (52)$$

где

$$pf(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \quad qf(x) = xf(x). \quad (53)$$

Применяя бра-кет-обозначения Дирака для скалярного произведения в $L^2(\mathbb{R})$:

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x)g(x)dx, \quad (54)$$

для произвольных $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ получим

$$\begin{aligned} \varphi_j(x, y) &\equiv \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i y t} f_j\left(t + \frac{x}{2}\right) \bar{g}_j\left(t - \frac{x}{2}\right) dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{(e^{-\pi i x p} g_j)}(t) e^{2\pi i y t} (e^{\pi i x p} f_j)(t) dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{(e^{-\pi i x p} g_j)}(t) (e^{2\pi i y q} e^{\pi i x p} f_j)(t) dt = \langle e^{-\pi i x p} g_j | e^{2\pi i y q} e^{\pi i x p} f_j \rangle = \\ &= \langle g_j | e^{\pi i x p} e^{2\pi i y q} e^{\pi i x p} f_j \rangle = \langle g_j | e^{2\pi i(xp + yq)} f_j \rangle. \end{aligned} \quad (55)$$

С помощью этой формулы нетрудно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 4. Определим $\varphi_j(x, y)$ так же, как в (50). Тогда выполняется равенство

$$\varphi_j(x, y) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x t} \tilde{f}_j\left(t - \frac{y}{2}\right) \bar{\tilde{g}}_j\left(t + \frac{y}{2}\right) dt, \quad (56)$$

где

$$\tilde{f} \equiv F^{-1} f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, с учетом (55) и (52) получим

$$\begin{aligned} \varphi_j(x, y) &= \langle g_j | e^{2\pi i(xp + yq)} f_j \rangle = \langle g_j | e^{2\pi i(xp + yq)} F F^{-1} f_j \rangle = \\ &= \langle g_j | F e^{2\pi i(xq - yp)} F^{-1} f_j \rangle = \langle F^{-1} g_j | e^{2\pi i(xq - yp)} F^{-1} f_j \rangle = \\ &= \langle \tilde{g}_j | e^{2\pi i(xq - yp)} \tilde{f}_j \rangle, \end{aligned} \quad (58)$$

и формула (56) теперь получается с помощью обратного применения (55) с заменой f_j и g_j соответственно на $\tilde{f}_j$ и $\tilde{g}_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из (56) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) \varphi_3(u, v) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i(xs + ut)} \tilde{f}_1\left(s - \frac{y}{2}\right) \tilde{f}_3\left(t - \frac{v}{2}\right) \bar{\tilde{g}}_1\left(s + \frac{y}{2}\right) \bar{\tilde{g}}_3\left(t + \frac{v}{2}\right) ds dt. \end{aligned}$$

Затем, применив (35) и (41), получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) \varphi_3(u, v) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} e^{2\pi i(xs + ut + vs + yt) + \pi i(z^2 - w^2)} \tilde{f}_4\left(t - \frac{v}{2} - z\right) \bar{\tilde{g}}_4\left(t + \frac{v}{2} - w\right) \times \\ &\quad \times \tilde{f}_2(z) \bar{\tilde{g}}_2(w) \tilde{f}_0\left(s - \frac{y}{2} - z\right) \bar{\tilde{g}}_0\left(s + \frac{y}{2} - w\right) ds dt dz dw. \end{aligned}$$

Если теперь произвести замену переменных интегрирования $s \mapsto s + (z + w)/2$, $t \mapsto t + (z + w)/2$, то интегрирование по s и t можно выполнить с помощью (56):

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y)\varphi_3(u, v) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\pi i(x+y+u+v+z-w)(z+w)} \varphi_4(y+u, v+z-w) \tilde{f}_2(z) \bar{\tilde{g}}_2(w) \times \\ &\quad \times \varphi_0(x+v, y+z-w) dz dw = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\pi i(x+y+u+v+z)(z+2w)} \varphi_4(y+u, v+z) \tilde{f}_2(z+w) \bar{\tilde{g}}_2(w) \varphi_0(x+v, y+z) dz dw, \end{aligned}$$

где был выполнен сдвиг $z \mapsto z + w$. Наконец, делая сдвиг $w \mapsto w - z/2$ и снова применяя (56), получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y)\varphi_3(u, v) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i(x+y+u+v+z)w} \varphi_4(y+u, v+z) \tilde{f}_2\left(w + \frac{z}{2}\right) \bar{\tilde{g}}_2\left(w - \frac{z}{2}\right) \times \\ &\quad \times \varphi_0(x+v, y+z) dz dw = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_4(y+u, v+z) \varphi_2(x+y+u+v+z, -z) \varphi_0(x+v, y+z) dz. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4. Для функции $f_j(x) = g_j(x) = \Phi_h(x)$ с помощью несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} \varphi_j(x, y) = \varphi^+(x, y) &\equiv \int_{\mathbb{R}} \frac{\Phi_h(t+x/2)}{\Phi_h(t-x/2)} e^{2\pi i t y} dt = \\ &= \Psi_h\left(x - \frac{i}{2\sqrt{h}}\right) \Psi_h\left(y + \frac{i}{2\sqrt{h}}\right) \Psi_h\left(-x - y + \frac{i}{2\sqrt{h}}\right), \end{aligned} \quad (59)$$

где

$$\Psi_h(x) \equiv \frac{\Phi_h(x)}{\Phi_h(0)} e^{-\pi i x^2/2}. \quad (60)$$

Соответствующее бета-пентагональное соотношение было впервые получено в работе [3] в качестве предельного случая эллиптического бета-интеграла Спиридонова [16].

ПРИМЕР 5. Для функции $f_j(x) = g_j(-x) = \Phi_h(x)$ получим

$$\varphi_j(x, y) = \varphi^-(x, y) \equiv \int_{\mathbb{R}} \frac{\Phi_h(x/2+t)}{\Phi_h(x/2-t)} e^{2\pi i t y} dt, \quad (61)$$

и в противоположность примеру 4 неизвестно (по крайней мере автору настоящей работы), можно ли каким-либо образом упростить этот интеграл. Интересно отме-

титель, что функция $\varphi^-(x, y)$ вещественнозначна и связана с примером 4 с помощью преобразования Фурье (ср. (10)), а именно:

$$2\varphi^-(-2x, -2y) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i(xv-yu)} \varphi^+(u, v) du dv. \quad (62)$$

ПРИМЕР 6. Для функции $f_j(x) = \Phi_{\hbar}(x)$ и $g_j(x) = 1$ получим

$$\varphi_j(x, y) = e^{-\pi i x y} (\mathbf{F}\Phi_{\hbar})(y) = e^{-\pi i(x+y)y} \Phi_{\hbar}\left(y + \frac{i}{2\sqrt{\hbar}}\right) e^{\pi i(1+1/\hbar)/12}. \quad (63)$$

В этом примере имеет место специальное свойство квазипериодичности:

$$\varphi_j(x+1, y) = \varphi_j(x, y) e^{-\pi i y}, \quad (64)$$

которое позволяет применить теорему 1, в которой $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$, $g(i) = 1$ для всех $i \in [2]$, так что $\gamma_i = 1$, и $h_x(m) = e^{-\pi i m x}$, а ассоциированный характер задается соотношениями $\varepsilon(m) = h_m(m) = (-1)^m$. Выбрав $\alpha = \beta = 1$, получим также, что $\mu_i = 1$, а соответствующая функция $\psi \in \mathbb{C}^{[4] \times \mathbb{R}^2}$ принимает вид

$$\begin{aligned} \psi_j(x, y) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_j(x, y+m) e^{-\pi i(x+m)m} = \\ &= e^{-\pi i x y} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\mathbf{F}\Phi_{\hbar})(y+m) e^{-2\pi i(x+1/2)m} \equiv \psi(x, y), \end{aligned} \quad (65)$$

она проявляет свойства квазипериодичности

$$\begin{aligned} \psi(x+m, y) &= h_y(m) \psi(x, y) = e^{-\pi i m y} \psi(x, y), \\ \psi(x, y+m) &= \varepsilon(m) h_x(-m) \psi(x, y) = (-1)^m e^{\pi i m x} \psi(x, y) \end{aligned} \quad (66)$$

и удовлетворяет пентагональному интегральному соотношению

$$\psi(x, y) \psi(u, v) = \int_0^1 \psi(u+y, v-z) \psi(x+y+u+v-z, z) \psi(x+v, y-z) dz. \quad (67)$$

Заметим, что подынтегральное выражение представляет собой периодическую функцию от z , как и должно быть с точки зрения общей теории (см. раздел 3). В работе [4] было показано, что функция $\psi(x, y)$ допускает аналитическое продолжение на $\mathbb{C}^2$ в виде мероморфной функции, и это свойство было использовано при переформулировке тейхмюллеровской ТКТП.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Национального научного фонда Швейцарии. Результаты работы докладывались на семинаре “Extended TFT, Quantization of Classical TFT’s, Higher Structures, Differential Cohomology Theories” (International Erwin Schrödinger Institute for Mathematical Physics, Vienna, Austria, 17–21 февраля 2014 г.) и на конференции “Математическая физика: прошлое, настоящее и будущее” в Международном Математическом институте им. Л. Эйлера (Санкт-Петербург, 26–30 марта 2014 г.). Автор благодарен участникам семинара и конференции за полезные и плодотворные обсуждения, особенно А. Алексееву, И. Арефьевой, Д. Бар-Натану, С. Деркачеву, Л. Фаддееву, А. Исаеву, Н. Решетихину, Р. Шредеру, М. Семенову-Тян-Шанскому, В. Спиридонову, В. Тарасову, Л. Тахтаджяну, Й. Тешнеру и А. Верилизие.

Список литературы

- [1] L. C. Biedenharn, *J. Math. Phys.*, **31** (1953), 287–293.
- [2] J. P. Elliott, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, **218**:1134 (1953), 345–370.
- [3] R. Kashaev, Feng Luo, G. Vartanov, *A TQFT of Turaev–Viro type on shaped triangulations*, [arXiv: 1210.8393](#).
- [4] J. E. Andersen, R. Kashaev, *A new formulation of the Teichmüller TQFT*, [arXiv: 1305.4291](#).
- [5] G. Ponzano, T. Regge, “Semiclassical limit of Racah coefficients”, *Spectroscopic and Group Theoretical Methods in Physics*, eds. F. Bloch, S. G. Cohen, A. De-Shalit, S. Sambursky, I. Talmi, North-Holland, Amsterdam, 1968, 1–58.
- [6] V. G. Turaev, O. Ya. Viro, *Topology*, **31**:4 (1992), 865–902.
- [7] L. D. Faddeev, *Lett. Math. Phys.*, **34**:3 (1995), 249–254.
- [8] T. Shintani, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **24**:1 (1977), 167–199.
- [9] N. Kurokawa, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **67**:3 (1991), 61–64.
- [10] E. W. Barnes, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **19** (1904), 374–425.
- [11] L. D. Faddeev, *Current-like variables in massive and massless integrable models*, [arXiv: hep-th/9408041](#).
- [12] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, A. Yu. Volkov, *Commun. Math. Phys.*, **219**:1 (2001), 199–219.
- [13] A. Yu. Volkov, *Commun. Math. Phys.*, **258**:2 (2005), 257–273.
- [14] S. L. Woronowicz, *Rev. Math. Phys.*, **12**:6 (2000), 873–920.
- [15] R. M. Kashaev, “Discrete Liouville equation and Teichmüller theory”, *Handbook of Teichmüller Theory*, v. III, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, **17**, Eur. Math. Soc. (EMS), Zürich, 2012, 821–851.
- [16] V. P. Spiridonov, *УМН*, **56**:1(337) (2001), 181–182.

Поступила в редакцию 6.03.2014