Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Козлов, Коррелированная модель Ллойда: точное решение, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 2, 312–321

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8680>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 09:36:47

© 2014 г.

Г. Г. Козлов*

КОРРЕЛИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ЛЛОЙДА: ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Описана точно решаемая модель разупорядоченной системы, представляющая собой обобщенную модель Ллойда, отличающуюся от классической тем, что случайный потенциал не является δ -коррелированным случайным процессом. Показано, что в этом случае точная усредненная функция Грина не зависит от радиуса корреляции случайного потенциала и, как и в классической модели Ллойда, представляет собой кристаллическую функцию Грина, энергетический аргумент которой приобретает мнимую часть, зависящую от степени разупорядочения.

Ключевые слова: модель Ллойда, точно решаемые модели, коррелированные разупорядоченные системы, плотность состояний, усредненная функция Грина.

DOI: 10.4213/tmf8680

1. ВВЕДЕНИЕ

Число публикуемых работ, посвященных моделям разупорядоченных систем, в последние годы заметно возросло, причем все более популярным становится изучение систем с *коррелированным* беспорядком [1]–[11]. В исторически первых моделях случайных систем, как правило, исследовался δ -коррелированный случайный потенциал и вопросу о влиянии корреляций уделялось сравнительно мало внимания. Недавние исследования показали, что корреляции могут приводить к существенно (иногда качественному) изменению энергетической структуры и локализационных свойств разупорядоченных систем.

В любой области теоретической физики чрезвычайно важную роль играют точно решаемые модели, число которых обычно невелико. Точно решаемая модель дает возможность с высокой степенью достоверности накопить качественную информацию о том классе моделей, к которому она относится, позволяет проверить применяемые приближения и указать направление дальнейших исследований. В физике

---

*Научно-исследовательский институт физики им. В. А. Фока, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: gkozlov@photonics.phys.spbu.ru

разупорядоченных систем наиболее известными и важными являются точно решаемые модели Дайсона [12] и Ллойда [13], относящиеся к некоррелированным разупорядоченным системам. В настоящей работе для обобщенной одномерной модели Ллойда, в которой *узельные энергии не являются независимыми случайными величинами*, приводится точное вычисление усредненной функции Грина и показано, что она не зависит от параметра модели, играющего роль радиуса корреляции.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 рассматривается классическая модель Ллойда и приводятся необходимые результаты и определения. В разделе 3 описывается коррелированный беспорядок, для которого в разделе 4 приводится точное вычисление усредненной функции Грина.

2. МОДЕЛЬ ЛЛОЙДА

Матрица $\mathbf{H}$ гамильтониана классической одномерной модели Ллойда имеет следующие элементы:

$$H_{rr'} = \delta_{rr'} \varepsilon_r + w(r - r'), \quad r, r' = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

причем функция $w(r)$ считается заданной и такой, что $w(0) = 0$, а диагональные элементы (энергии узлов) ε_r являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, плотность распределения которых имеет вид (распределение Коши)

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta}{\Delta^2 + \varepsilon^2}. \quad (2)$$

Параметр Δ характеризует степень разупорядоченности системы: при $\Delta \rightarrow 0$ гамильтониан (1) соответствует упорядоченной (кристаллической) системе и диагонализуется в представлении плоских волн. О совокупности пронумерованных узельных энергий часто говорят как о случайном потенциале.

Ллойд [13] сумел точно вычислить матрицу усредненной функции Грина $\langle \mathbf{G}(\Omega) \rangle = \langle [\Omega - \mathbf{H}]^{-1} \rangle$, $\Omega \equiv E + i\delta$, $\delta \rightarrow +0$, для модельной системы (1), (2). Она определяет спектр линейной восприимчивости и плотность состояний системы. В этом разделе мы воспроизведем результат Ллойда с помощью диаграммной техники, подробно изложенной в работе [14] (см. также [15]), которая заключается в следующем. Введем матрицу $\mathbf{W}$ с элементами $W_{rr'} \equiv w(r - r')$. Тогда матрица функции Грина $\mathbf{G}$ может быть представлена в виде следующего ряда [16]:

$$G_{rr'}(\Omega) = \frac{\delta_{rr'}}{\Omega - \varepsilon_r} + \frac{1}{\Omega - \varepsilon_r} W_{rr'} \frac{1}{\Omega - \varepsilon_{r'}} + \sum_{r''} \frac{1}{\Omega - \varepsilon_r} W_{rr''} \frac{1}{\Omega - \varepsilon_{r''}} W_{r''r'} \frac{1}{\Omega - \varepsilon_{r'}} + \dots \quad (3)$$

Сопоставим величинам $W_{rr'}$ стрелку, соединяющую узлы r и r' , а каждому множителю $[\Omega - \varepsilon_r]^{-1}$ – жирную точку в соответствующем узле r , который будем изображать кружком. Примеры приведены на рис. 1.

Рис. 1. Примеры диаграмм.

Тогда для матричного элемента $G_{rr'}(\Omega)$ функции Грина можно написать следующее выражение:

$$G_{rr'}(\Omega) = \text{сумма всех диаграмм, соединяющих узлы } r \text{ и } r'. \quad (4)$$

Для того чтобы вычислить искомую усредненную функцию Грина, следует проинтегрировать (4) с совместной функцией распределения узельных энергий $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$, которая в случае некоррелированного беспорядка представляется в виде произведения:

$$\rho_{\text{nc}}(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{j=1}^N P(z_j), \quad (5)$$

причем для рассматриваемой модели Ллойда функция $P(z)$ имеет вид (2). Усреднение произвольной диаграммы D в разложении (4) связано с усреднением фактора f_D , определяемого как

$$f_D \equiv \left(\frac{1}{\Omega - \varepsilon_{n_1}} \right)^{g_1} \left(\frac{1}{\Omega - \varepsilon_{n_2}} \right)^{g_2} \cdots \left(\frac{1}{\Omega - \varepsilon_{n_q}} \right)^{g_q}, \quad (6)$$

где $n_1, n_2, \dots, n_q$ – номера узлов, через которые проходит диаграмма D , а $g_1, g_2, \dots, g_q$ – числа посещений диаграммой узлов $n_1, n_2, \dots, n_q$ соответственно (g_i – число жирных точек в узле n_i). Например, для верхней диаграммы рис. 1 $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$ и $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 1$. Ключевым в решении Ллойда является соотношение

$$\int P(z) \left(\frac{1}{E + i0 - z} \right)^n dz = \frac{1}{\pi} \int \frac{\Delta dz}{\Delta^2 + z^2} \left(\frac{1}{E + i0 - z} \right)^n = \left(\frac{1}{E + i\Delta} \right)^n. \quad (7)$$

Принимая во внимание это соотношение и пользуясь тем, что случайные узельные энергии ε_{n_j} , $j = 1, 2, \dots, q$, взаимно независимы, получаем для усредненного фактора f_D следующее выражение:

$$\begin{aligned} \langle f_D \rangle &= \int \prod_{j=1}^N dz_j P(z_j) \left(\frac{1}{\Omega - z_{n_1}} \right)^{g_1} \left(\frac{1}{\Omega - z_{n_2}} \right)^{g_2} \cdots \left(\frac{1}{\Omega - z_{n_q}} \right)^{g_q} = \\ &= \left(\frac{1}{\Omega + i\Delta} \right)^{g_1} \left(\frac{1}{\Omega + i\Delta} \right)^{g_2} \cdots \left(\frac{1}{\Omega + i\Delta} \right)^{g_q}. \end{aligned} \quad (8)$$

Это выражение соответствует диаграмме D функции Грина *упорядоченной* системы, у которой все узельные энергии равны нулю и произведена замена энергетического аргумента $\Omega \rightarrow \Omega + i\Delta$. Поскольку приведенный расчет справедлив для любой диаграммы в разложении (4), мы приходим к результату Ллойда: *усредненная функция Грина разупорядоченной системы с гамильтонианом (1) и некоррелированным беспорядком типа Коши (2) равна функции Грина $\mathbf{G}^{\text{od}}$ упорядоченной системы с гамильтонианом вида (1) при $\varepsilon_r = 0$, $r = 1, 2, \dots, N$, в которой следует произвести замену энергетического аргумента $\Omega \rightarrow \Omega + i\Delta$:*

$$\langle \mathbf{G}(\Omega) \rangle = \mathbf{G}^{\text{od}}(\Omega + i\Delta). \quad (9)$$

Явный вид матрицы функции Грина $\mathbf{G}^{\text{od}}$ упорядоченной (и циклической) системы можно написать [16], пользуясь тем, что собственные векторы (1) при $\varepsilon_r = 0$, $r = 1, 2, \dots, N$, представляют собой плоские волны. Для одномерной системы эта матрица имеет вид

$$G_{rr'}^{\text{od}}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(r-r')q}}{\Omega - J_q} dq, \quad J_q = \sum_r w(r) e^{-iqr}. \quad (10)$$

В следующем разделе будет описан коррелированный дискретный случайный процесс $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_N$, полная совместная функция распределения $\rho(z_1, z_2, \dots, z_N)$ которого не представляется произведением вида (5). В разделе 4 мы покажем, что для разупорядоченной системы с гамильтонианом (1), в котором узельные энергии ε_r представляют собой реализацию такого случайного процесса, результат (9) сохраняется.

3. КОРРЕЛИРОВАННЫЙ БЕСПОРЯДОК

Получим коррелированную последовательность узельных энергий ε_r , $r = 1, 2, \dots, N$, с помощью следующей процедуры *сглаживания*¹⁾ [17], [18]. Введем совокупность независимых случайных величин ξ_i , $i = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty$. Пусть каждая из введенных случайных величин ξ_i имеет функцию распределения $P(\xi)$, которую мы будем считать заданной и не зависящей от номера i . Узельные энергии ε_n получим из этих величин как реализацию следующего дискретного случайного процесса:

$$\varepsilon_n = (1 - e^{-\alpha}) \sum_{m \leq n} e^{\alpha(m-n)} \xi_m, \quad \alpha > 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

При таком построении ε_n будут коррелированы с характерным радиусом корреляции $R = 1/\alpha$, причем для корреляционной функции $\langle \varepsilon_n \varepsilon_{n'} \rangle$ имеет место выражение

$$\langle \varepsilon_n \varepsilon_{n'} \rangle = \langle \xi^2 \rangle \left(\frac{1 - e^{-\alpha}}{1 + e^{-\alpha}} \right) e^{-\alpha|n-n'|} = \langle \xi^2 \rangle \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) e^{-\alpha|n-n'|}, \quad (12)$$

где $\beta \equiv e^{-\alpha}$, $\beta \in [0, 1]$.

¹⁾ Аналогичный механизм корреляции рассматривался в работе [10] при расчете степени локализации состояний в коррелированной системе.

Из определения (11) нетрудно получить следующее важное для дальнейшего исследования соотношение:

$$\varepsilon_{n+1} = \beta\varepsilon_n + (1 - \beta)\xi_{n+1}. \quad (13)$$

Корреляционная функция (12) имеет смысл только при конечном втором моменте $\langle \xi^2 \rangle$ функции $P(\xi)$ и в случае, если $P(\xi)$ есть функция Коши (2), не существует. Тем не менее и в этом случае последовательность (11) нельзя считать некоррелированной, поскольку, как мы увидим ниже, ее функция распределения не имеет вида (5). Наконец, отметим, что последовательность (11) причинно-коррелирована, т. е. ε_n зависит только от тех ξ_m , у которых $m \leq n$.

3.1. Функция распределения узельной энергии в коррелированной цепочке. Функция распределения любой узельной энергии ε_n случайного процесса (11) не зависит от ее номера n . Обозначим указанную функцию через $\sigma(\varepsilon)$ и рассчитаем ее для $n = 0$ стандартным способом [17], [18]. В качестве исходных используем следующие общие выражения для искомой функции $\sigma(\varepsilon)$ и соответствующей характеристической функции $\tilde{\sigma}(t)$:

$$\sigma(\varepsilon) = \left\langle \delta\left(\varepsilon - [1 - \beta] \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m \xi_m\right) \right\rangle \equiv \int e^{i\varepsilon t} \tilde{\sigma}(t), \quad (14)$$

$$\tilde{\sigma}(t) = \frac{1}{2\pi} \left\langle \exp\left[-it\left([1 - \beta] \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m \xi_m\right)\right] \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \prod_{m=0}^{\infty} \int P(\xi) e^{-it[1 - \beta]\beta^m \xi} d\xi. \quad (15)$$

Здесь угловые скобки соответствуют усреднению по независимым случайным величинам ξ_m . Обозначая преобразование Фурье функции $P(\xi)$ через $\tilde{P}(t)$,

$$\tilde{P}(t) = \int P(\xi) e^{-it\xi} d\xi,$$

получаем для $\tilde{\sigma}(t)$ следующую формулу:

$$\tilde{\sigma}(t) = \frac{1}{2\pi} \prod_{m=0}^{\infty} \tilde{P}(t[1 - \beta]\beta^m). \quad (16)$$

Если $P(\xi)$ представляет собой распределение Коши (2), то

$$\tilde{P}(t) = e^{-|t|\Delta} \Rightarrow \tilde{\sigma}(t) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-|t|[1 - \beta]\Delta \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m\right) = \frac{1}{2\pi} e^{-|t|\Delta}, \quad (17)$$

и мы приходим к выводу, что в этом случае функция распределения узельных энергий в виде случайного процесса (11) также имеет вид функции Коши (2):

$$\sigma(\varepsilon) = P(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta}{\Delta^2 + \varepsilon^2}. \quad (18)$$

3.2. Функция распределения случайного процесса (11). Дискретный коррелированный случайный процесс ε_n (11) полностью определяется совместной функцией распределения всех узельных энергий $\rho(z_1, z_2, \dots, z_N)$, которую можно вычислить аналитически. Для этого введем функции совместной плотности вероятности первых M ($0 < M \leq N$) узельных энергий $\rho_M(z_1, z_2, \dots, z_M)$, так что $\rho_M(z_1, z_2, \dots, z_M) dz_1 \dots dz_M$ – вероятность того, что $\varepsilon_i \in [z_i, z_i + dz_i]$, $i = 1, 2, \dots, M$. Пользуясь соотношением (13), можно получить рекуррентное соотношение, выражающее ρ_{M+1} через ρ_M :

$$\begin{aligned} \rho_{M+1}(z_1, z_2, \dots, z_{M+1}) &= \langle \delta(z_1 - \varepsilon_1) \dots \delta(z_M - \varepsilon_M) \delta(z_{M+1} - \varepsilon_{M+1}) \rangle = \\ &= \langle \delta(z_1 - \varepsilon_1) \dots \delta(z_M - \varepsilon_M) \delta(z_{M+1} - \beta \varepsilon_M - [1 - \beta] \xi_{M+1}) \rangle = \\ &= \int d\xi dy_1 \dots dy_M \rho_M(y_1, \dots, y_M) \times \\ &\quad \times P(\xi) \delta(z_1 - y_1) \dots \delta(z_M - y_M) \delta(z_{M+1} - \beta y_M - [1 - \beta] \xi) = \\ &= \frac{1}{1 - \beta} \rho_M(z_1, \dots, z_M) P\left(\frac{z_{M+1} - \beta z_M}{1 - \beta}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Последовательно применяя это соотношение и учитывая, что $\rho_1(z) = \sigma(z)$, получаем следующее выражение для функции $\rho_M(z_1, \dots, z_M)$:

$$\begin{aligned} \rho_M(z_1, z_2, \dots, z_M) &= \\ &= \frac{1}{[1 - \beta]^{M-1}} \overbrace{P\left(\frac{z_M - \beta z_{M-1}}{1 - \beta}\right) P\left(\frac{z_{M-1} - \beta z_{M-2}}{1 - \beta}\right) \dots P\left(\frac{z_2 - \beta z_1}{1 - \beta}\right)}^{M-1} \sigma(z_1). \end{aligned} \quad (20)$$

В рассматриваемом нами случае $\sigma(z) = P(z)$, где $P(z)$ определяется формулой (2). Полагая $M = N$, получаем окончательное выражение для полной совместной функции распределения случайного процесса (11):

$$\begin{aligned} \rho(z_1, z_2, \dots, z_N) &= \overbrace{P\left(\frac{z_N - \beta z_{N-1}}{1 - \beta}\right) P\left(\frac{z_{N-1} - \beta z_{N-2}}{1 - \beta}\right) \dots P\left(\frac{z_2 - \beta z_1}{1 - \beta}\right)}^{N-1} \frac{P(z_1)}{[1 - \beta]^{N-1}}, \\ P(z) &= \frac{1}{\pi} \frac{\Delta}{\Delta^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

4. КОРРЕЛИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ЛЛОЙДА

Рассчитаем теперь усредненную функцию Грина разупорядоченной цепочки с гамильтонианом (1), в котором узельные энергии являются реализацией коррелированного случайного процесса (11). Рассмотрим, как и в разделе 2, произвольную диаграмму D , проходящую через узлы, номера которых мы без потери общности можем считать расположенными в порядке возрастания: $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_q \leq N$. Среднее значение $\langle f_D \rangle$ фактора (6) рассматриваемой диаграммы будет теперь определяться формулой, отличающейся от (8):

$$\begin{aligned} \langle f_D \rangle &= \int dz_1 dz_2 \dots dz_N \left(\frac{1}{E + i\delta - z_{n_1}} \right)^{g_1} \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{E + i\delta - z_{n_2}} \right)^{g_2} \dots \left(\frac{1}{E + i\delta - z_{n_q}} \right)^{g_q} \rho(z_1, z_2, \dots, z_N), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\delta \rightarrow +0$, а функция $\rho(z_1, z_2, \dots, z_N)$ для рассматриваемой коррелированной модели Ллойда имеет вид (21). Поскольку $\delta > 0$, сомножители в круглых скобках в соотношении (22), представляемые как функции комплексных $z_{n_1}, \dots, z_{n_q}$, не имеют особенностей в нижней полуплоскости комплексных $z_{n_1}, \dots, z_{n_q}$. Это позволяет использовать формулу (7) при вычислении фигурирующих в (22) интегралов следующим образом.

Проведем интегрирование в соотношении (22) по всем z_j , у которых $n_q < j \leq N$. При этом у входящей в это соотношение функции (21) исчезнут первые $N - n_q$ сомножителей типа $P((z_N - \beta z_{N-1})/(1 - \beta))$, $P((z_{N-1} - \beta z_{N-2})/(1 - \beta))$, ... и знаменатель $[1 - \beta]^{N-1}$ заменится на $[1 - \beta]^{n_q-1}$. Интегрирование по z_{n_q} затрагивает только входящий в (21) лоренциан $P((z_{n_q} - \beta z_{n_q-1})/(1 - \beta))$ и может быть выполнено с помощью формулы (7). Используя эту формулу, можно убедиться в том, что указанное интегрирование соответствует умножению на фактор $1 - \beta$ и замене $z_{n_q} \rightarrow \beta z_{n_q-1} - i\Delta(1 - \beta)$ во входящем в подынтегральное выражение в (22) сомножителе $(1/(E + i\delta - z_{n_q}))^{g_q}$. При этом полюс этой функции (по аргументу z_{n_q-1}) будет по-прежнему располагаться в верхней полуплоскости, что позволяет провести следующее интегрирование по z_{n_q-1} аналогичным образом. В функции совместной плотности вероятности (21) от этой переменной зависит сомножитель $P((z_{n_q-1} - \beta z_{n_q-2})/(1 - \beta))$. Как и в предыдущем случае, интегрирование по z_{n_q-1} соответствует умножению на фактор $1 - \beta$ и замене $z_{n_q-1} \rightarrow \beta z_{n_q-2} - i\Delta(1 - \beta)$ в сомножителе $(1/(E + i\delta - \beta z_{n_q-1} + i\Delta(1 - \beta)))^{g_q}$, возникшем в результате предыдущего интегрирования, и т.д. Следовательно, каждое новое интегрирование по z_j с все меньшим номером j соответствует умножению на $1 - \beta$ (т.е. сокращению такого множителя в знаменателе выражения (21)) и замене $z_j \rightarrow \beta z_{j-1} - i\Delta(1 - \beta)$ аргумента в последнем сомножителе. Когда номер i переменной интегрирования снизится настолько, что $j = n_{q-1}$, дальнейшие интегрирования можно проводить аналогично (т.е. просто производя замену аргументов), только теперь указанные выше замены следует производить также и в сомножителе $(1/(E + i\delta - z_{n_{q-1}}))^{g_{q-1}}$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что интегрирование по всем переменным в (22) соответствует последовательным заменам фигурирующих в (22) символов $z_{n_q}, \dots, z_{n_2}, z_{n_1}$ по приведенным выше правилам. Указанные замены для символа z_{n_q} производятся следующим способом²⁾:

$$\begin{aligned} z_{n_q} &= \beta z_{n_q-1} - i\Delta(1 - \beta), & \text{где} \\ z_{n_q-1} &= \beta z_{n_q-2} - i\Delta(1 - \beta), & \text{где} \\ z_{n_q-2} &= \beta z_{n_q-3} - i\Delta(1 - \beta), & \text{где} \quad \dots \\ &\dots & \\ z_3 &= \beta z_2 - i\Delta(1 - \beta), & \text{где} \\ z_2 &= \beta z_1 - i\Delta(1 - \beta). \end{aligned} \tag{23}$$

Последнее интегрирование по z_1 соответствует замене $z_1 \rightarrow -i\Delta$, поскольку это интегрирование производится с функцией $P(z_1)$ (см. (21)). Нетрудно видеть, что при $z_1 = -i\Delta$ цепочка замен (23) упрощается и соответствует замене $z_{n_j} = -i\Delta$,

²⁾Поскольку n_q является самым большим из номеров n_j узлов рассматриваемой диаграммы, замены остальных символов также входят в приводимую ниже последовательность.

$j = 1, 2, \dots, n_q$. Таким образом, усреднение (22) соответствует просто замене всех величин z_{n_j} , $j = 1, 2, \dots, q$, на $-i\Delta$, как и в случае некоррелированной модели Ллойда (8), и мы приходим к выводу, что *усредненная функция Грина коррелированной модели Ллойда с узельными энергиями вида (11) не зависит от радиуса корреляции $R = -1/\ln \beta$ и оказывается такой же, как и в отсутствие корреляций*, т. е. определяется формулой (9).

Отсутствие зависимости усредненной функции Грина от радиуса корреляции $R = -1/\ln \beta$ показывает своеобразную масштабную инвариантность рассматриваемой коррелированной модели Ллойда, поскольку пространственная зависимость (зависимость от номера узла) случайного потенциала ε_n (11) оказывается для различных R существенно различной (см. рис. 2в, 2г).

Проиллюстрируем полученный результат примерами, когда функция Грина $\mathbf{G}^{\text{od}}(\Omega)$ (10) может быть вычислена аналитически. Первым (хорошо известным) примером такого рода является случай, когда гамильтониан имеет вид ленточной матрицы $H_{rr'}^{\text{tb}} = \delta_{r,r'+1} + \delta_{r,r'-1}$ и диагональные элементы функции Грина определяются как $G_{nn}^{\text{od}}(\Omega) = [\Omega^2 - 4]^{-1/2}$. Согласно полученным выше результатам средняя плотность состояний $\rho_{\Delta}^{\text{tb}}(E) = -\pi^{-1} \text{Im Sp} \langle \mathbf{G} \rangle$ случайной матрицы (1) с узельными энергиями ε_r вида (11) и при $w(r) = \delta_{r,1} + \delta_{r,-1}$ не зависит от радиуса корреляции $R = -1/\ln \beta$ и равна

$$\rho_{\Delta}^{\text{tb}}(E) = -\frac{N}{\pi} \text{Im} \frac{1}{\sqrt{(E + i\Delta)^2 - 4}}. \quad (24)$$

Вторым (менее известным) примером является случай, когда матрица упорядоченного гамильтониана имеет вид $H_{r,r'}^{\text{ex}} = v_0 e^{-|r-r'|/R_0}$. В этом случае матрица функции Грина принимает вид³⁾

$$\Gamma_{r,r'}(\Omega) = A e^{-|r-r'|\eta} + \frac{\delta_{r,r'}}{\Omega}, \quad (25)$$

³⁾Формула (25) не пользуется широкой популярностью, и автору не удалось найти ссылку на нее. Поэтому кратко опишем, как она получается. Для замкнутой в кольцо цепочки функция $\Gamma(u)$ зависит только от разности своих индексов $\Gamma_{l,l'}(u) = \Gamma_r(u)$, $r \equiv l - l'$. Стандартные выкладки приводят к следующему выражению вида (10) для $\Gamma_r(u)$:

$$\Gamma_r(u) = \frac{1}{N} \sum_{q=-\pi}^{\pi} \frac{e^{-iqr}}{u - J_q},$$

где $J_q \equiv \sum_r w(r) e^{iqr}$. Для случая экспоненциальной функции $w(r)$ функция J_q представляет собой сумму геометрической прогрессии и точно вычисляется. В приведенной формуле для $\Gamma_r(u)$ суммирование ведется по первой зоне Бриллюэна с шагом $\Delta q = 2\pi/N$ и в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ может быть заменено интегрированием. Пользуясь периодичностью подынтегральной функции, можно распространить интегрирование на $2M + 1$ зону Бриллюэна и затем получить искомый интеграл, поделив результат на $2M + 1$:

$$\frac{1}{N} \sum_{q=-\pi}^{\pi} \dots \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq \dots = \frac{1}{2\pi(2M+1)} \int_{-\pi(1+2M)}^{\pi(2M+1)} dq \dots$$

Для экспоненциальной функции $w(r)$ функция J_q такая, что последний интеграл при $M \rightarrow \infty$ может быть вычислен по вычетам стандартным замыканием контура по большому кругу. При этом число вычетов растет пропорционально M , что обеспечивает существование предела при $M \rightarrow \infty$.

Рис. 2. Коррелированная модель Ллойда при различных радиусах корреляции R и разных видах функции $w(r)$, описывающей недиагональные элементы гамильтониана (1). Плотность состояний гамильтониана (1) при $w(r) = \delta_{1,r} + \delta_{-1,r}$ (а) и при $w(r) = v_0 e^{-|r|/R_1}$ ($R_1 = 1$, $v_0 = e^{1/R_1}$) (б). Шумящие зависимости получены численной диагонализацией гамильтониана (1), гладкие кривые – расчетом по формулам (24) и (26) соответственно. Плотности состояний получены при радиусах корреляции $R = 0.1$ (а) и $R = 30$ (б). Реализации случайных потенциалов при радиусах корреляции $R = 0.1$ (в) и $R = 30$ (г). По оси абсцисс отложен номер узла n , по оси ординат – ε_n (11). Во всех случаях $\Delta = 1$. Размер случайных матриц при численных расчетах $N = 4000$.

где

$$A \equiv \frac{V}{(\Omega - V)\Omega\sqrt{1 - T^2}}, \quad V \equiv v_0 \operatorname{th} \frac{1}{R_0}, \quad \frac{1}{T} \equiv \frac{V - \Omega}{\Omega} \operatorname{ch} \frac{1}{R_0}, \quad \operatorname{ch} \eta \equiv \left| \frac{1}{T} \right|,$$

а плотность состояний случайной матрицы (1) при $w(r) = v_0 e^{-|r-r'|/R_0}$ и ε_r (11) определяется выражением⁴⁾

$$\rho_{\Delta}^{\text{ex}}(E) = -\frac{N}{\pi} \operatorname{Im} \Gamma_{00}(E + i\Delta + v_0). \quad (26)$$

⁴⁾Появление в этой формуле сдвига v_0 связано с тем, что функция Грина (25) получена для матрицы $\mathbf{H}^{\text{ex}}$, у которой диагональные элементы отличны от нуля и равны v_0 .

Для этих двух случаев численная диагонализация случайных матриц вида (1) при различных радиусах корреляции R показала, что плотность состояний описывается формулами (24) и (26) (с точностью до шумов) и действительно не зависит от R , несмотря на то что вид случайного потенциала (11) меняется очень сильно (рис. 2).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведен точный расчет усредненной функции Грина для коррелированной модели Ллойда. Показано, что для случайного потенциала рассматриваемого вида усредненная функция Грина не зависит от параметра случайного потенциала, играющего роль радиуса корреляции последнего. Полученный результат иллюстрируется численными расчетами.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (контракт № 11.G34.31.0067 с Санкт-Петербургским государственным университетом и научным руководителем А.В. Кавокиным). Автор также благодарит Санкт-Петербургский университет за исследовательский грант 11.38.67.2012.

Список литературы

- [1] F. M. Izrailev, A. A. Krokhin, N. M. Makarov, *Phys. Rep.*, **512**:3 (2012), 125–254, arXiv: 1110.1762.
- [2] M. Titov, H. Schomerus, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:12 (2005), 126602, 4 pp.
- [3] L. I. Deych, M. V. Erementchouk, A. A. Lisyansky, *Physica B*, **338**:1–4 (2003), 79–81.
- [4] A. Croy, P. Cain, M. Schreiber, *Eur. Phys. J. B*, **82**:2 (2011), 107–112.
- [5] O. Derzhko, J. Richter, *Phys. Rev. B*, **59**:1 (1999), 100–103.
- [6] O. Derzhko, J. Richter, *Phys. Rev. B*, **55**:21 (1997), 14298–14310.
- [7] V. A. Malyshev, A. Rodriguez, F. Dominguez-Adame, *Phys. Rev. B*, **60**:20 (1999), 14140–14146.
- [8] F. A. B. F. de Moura, M. L. Lyra, *Phys. Rev. Lett.*, **81**:1 (1998), 3735–3738.
- [9] D. H. Danlap, H.-L. Wu, P. W. Phillips, *Phys. Rev. Lett.*, **65**:1 (1990), 88–91.
- [10] Г. Г. Козлов, *ТМФ*, **171**:1 (2012), 124–134.
- [11] G. G. Kozlov, *Appl. Math.*, **2**:8 (2011), 965–974.
- [12] F. J. Dyson, *Phys. Rev.*, **92**:6 (1953), 1331–1338.
- [13] P. Lloyd, *J. Phys. C*, **2**:10 (1969), 1717–1725.
- [14] C. R. Gochanour, H. C. Andersen, M. D. Fayer, *J. Chem. Phys.*, **70**:9 (1979), 4254–4271.
- [15] G. G. Kozlov, *The watching operators method in the theory of Frenkel exciton. Novel criterion of localization and its exact calculation for the non diagonal disordered 1D chain's zero-state*, arXiv: cond-mat/9909335.
- [16] И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, М., 1982.
- [17] Б. М. Миллер, А. Р. Панков, *Теория случайных процессов в примерах и задачах*, Физматлит, М., 2007.
- [18] Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров, *Теория случайных процессов и ее инженерное приложение*, Высшая школа, М., 2000.