Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, Г. Макракис, В. Е. Назайкинский,
Канонический оператор Маслова, одна формула Хёр-
мандера и локализация решения Берри–Балажа в тео-
рии волновых пучков, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 2, 162–
188

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8683>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 06:33:13

© 2014 г. С. Ю. Доброхотов^{*†}, Г. Н. Макракис^{‡§},
В. Е. Назайкинский^{*†}

КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР МАСЛОВА, ОДНА ФОРМУЛА ХЁРМАНДЕРА И ЛОКАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ БЕРРИ–БАЛАЖА В ТЕОРИИ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ

Исследуется вопрос о локализации точных решений трехмерных уравнений Шредингера, представленных в виде произведения функции Эйри (решения Берри–Балажа) и функции Бесселя, известных в параксиальном приближении в оптике как лучи Эйри–Бесселя. Для этого такие решения представляются в виде канонического оператора Маслова на специальных лагранжевых многообразиях, действующего на финитные функции. Затем используется один результат Хёрмандера, позволяющий с помощью формулы коммутации псевдодифференциального оператора и канонического оператора Маслова “вынести” финитные амплитуды из-под канонического оператора, что позволяет получить эффективные формулы, сохраняющие структуру решения, основанную на функциях Эйри и Бесселя. Обсуждается влияние дисперсионных эффектов на полученные решения.

Ключевые слова: уравнения Шредингера, параксиальное приближение, волновые пучки Эйри–Бесселя, локализация, канонический оператор Маслова.

DOI: 10.4213/tmf8683

Памяти Василия Сергеевича Владимирова

1. ВВЕДЕНИЕ

Под *волновым пучком* мы понимаем специального вида решение волнового уравнения или какого-либо из его обобщений либо приближений (учитывающих, например, дисперсию) и аппроксимаций, локализованное в пространстве в окрестности

^{*}Институт проблем механики РАН, Москва, Россия.
E-mails: dobr@ipmnet.ru, nazaikinskii@yandex.ru

[†]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

[‡]Department of Applied Mathematics, University of Crete, Heraklion, Crete, Greece

[§]Institute of Applied and Computational Mathematics, Foundation for Research and Technology-Hellas, Heraklion, Crete, Greece. E-mail: makrakg@iacm.forth.gr

некоторой прямой¹⁾ и распространяющееся вдоль этой прямой. В настоящей статье мы ограничиваемся случаем пространства $\mathbb{R}_x^3 \ni x = (x_1, x_2, x_3)$ и считаем, что указанная прямая – ось x_3 . Такого рода решениям посвящена обширная литература, как математическая, так и физическая (см., например, [1], [2]), и для них разработана соответствующая терминология; так, если решение с точностью до несущественных сомножителей имеет вид $u = F(x_\perp/h, x_3)$, где $x_\perp = (x_1, x_2)$, а h – малый параметр, характеризующий скорость убывания (или осцилляций) решения, то говорят о бесселевых или гауссовых пучках²⁾, если при фиксированном x_3 формфактор $F(\cdot, x_3)$ задается соответственно функцией Бесселя J_0 или гауссовой экспонентой.

Поведение решения типа волнового пучка вдоль оси x_3 может быть различным. В простейшем случае оно описывается сомножителем типа плоской волны $e^{ik(x_3-ct)}$ (гармонически зависящим от времени). В более сложном случае это может быть некоторый волновой пакет, описываемый, например, функцией Эйри – и тогда соответствующие волновые пучки называются пучками Эйри–Бесселя, Эйри–Гаусса и т. д. в зависимости от поведения формфактора по нормали к оси x_3 .

Поясним, какова роль асимптотических конструкций в теории волновых пучков. Для уравнений с постоянными коэффициентами, например для волнового уравнения с постоянной скоростью

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad (1)$$

с помощью разделения переменных, преобразования Фурье по переменным x , частичного преобразования Фурье и т. п. можно получать точные решения, в том числе типа волновых пучков, однако эти решения, за вычетом нескольких исключительных случаев, имеют вид достаточно сложных параметрических интегралов, при анализе которых без асимптотических методов трудно обойтись. Поэтому часто более выгодная стратегия состоит в том, чтобы с самого начала строить не точное, а асимптотическое решение и, возможно, даже заменить исходное уравнение каким-либо асимптотическим приближением к нему. Одним из таких приближений является так называемое *параксиальное приближение* [1], с помощью которого можно описать многие интересные оптические явления, в основе которых лежит распространение волновых пучков. Параксиальное приближение получается, если искать решение уравнения (1) или его учитывающих дисперсию обобщений (см. раздел 5) в виде произведения распространяющейся вдоль оси x_3 быстроосциллирующей плоской волны $e^{ik(x_3-ct)}$ на медленно по сравнению с ней меняющуюся амплитудную функцию $\Psi(x, t)$. После подстановки такого произведения в уравнение, масштабируя подходящим образом независимые переменные и отбрасывая члены более высокого порядка малости, для функции $\Psi(x, t)$ получаем уравнение

$$ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -ihc \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} - \frac{h^2 c}{2k} \Delta_\perp \Psi - \frac{h^2 q}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2}, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad (2)$$

которое и называется уравнением параксиального приближения. Здесь q равно нулю в частном случае исходного уравнения (1) и становится ненулевым при учете

¹⁾ Или, в более общем случае, гладкой кривой.

²⁾ В литературе употребляются также названия *луч Бесселя*, *луч Гаусса* и т. д.; мы будем придерживаться термина *пучок*.

Рис. 1. График пучка Эйри–Бесселя (5) на плоскости (x_1, x_3) при $x_2 = t = 0$.

дисперсии. По существу, уравнение (2) – это трехмерное уравнение Шредингера для свободной частицы, но с другим значением массы и с дополнительным членом первого порядка³⁾, отвечающим дрейфу (сносу).

Оказывается, для этого уравнения можно построить точное решение в виде волнового пучка, используя полученное в 1979 г. Берри и Балажем [3] точное решение одномерного уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (3)$$

для свободной частицы. Это решение имеет вид

$$\psi(x, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{t^3}{3a^2} + \frac{xt}{a}\right)\right) \text{Ai}\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}} \left(x + \frac{t^2}{2a}\right)\right), \quad (4)$$

где $\text{Ai}(z)$ – функция Эйри, а $a > 0$ – постоянная. Для уравнения типа Шредингера (2) это приводит к точным решениям вида

$$\begin{aligned} \Psi_0(x, t) = h^{-2/3} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{q^3 t^3}{3a^2} + \frac{(x_3 - ct)qt}{a} + \frac{\lambda^2 ct}{2k}\right)\right) \times \\ \times \text{Ai}\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}} \left(x_3 - ct + \frac{q^2 t^2}{2a}\right)\right) J_0\left(\frac{\lambda \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{h}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

известным в оптике как пучки Эйри–Бесселя (см. рис. 1). Здесь $J_0(r)$ – функция Бесселя нулевого порядка, а $\lambda > 0$ – постоянная. При $h \rightarrow +0$ функция (5) локализована в окрестности полупространства $\Pi_t = \{x \in \mathbb{R}_x^3 : x_3 \geq ct - q^2 t^2 / 2a\}$. Точнее говоря, она экспоненциально убывает при $h \rightarrow +0$ локально равномерно по x вне Π_t , а внутри Π_t она осциллирует, причем $\Psi_0(x, t) = O(1)$, если $x \in \Pi_t$ не лежит в объединении плоскости $\{x_3 = ct - q^2 t^2 / 2a\}$ и полупрямой $\{x_1 = x_2 = 0, x_3 \geq ct - q^2 t^2 / 2a\}$ (именно

³⁾От этого дополнительного члена можно избавиться стандартной подстановкой $\Psi(x_\perp, x_3, t) = \Phi(x_\perp, x_3 - ct, t)$. Отсюда ясно, что точно так же можно рассмотреть более общее, чем (2), уравнение, в котором скорость дрейфа отлична от c (но по-прежнему постоянна).

для этого мы включили множитель $h^{-2/3}$ в определение функции $\Psi_0(x, t)$, а максимум модуля $|\Psi_0|$ достигается в “движущейся” точке $(x_1 = x_2 = 0, x_3 = ct - q^2 t^2 / 2a)$, в которой $|\Psi_0| \sim h^{-2/3}$.

С точки зрения физики недостатком как решения (4), так и решения (5) является то, что они не принадлежат пространству L_2 ; иными словами, энергия соответствующих пучков бесконечна. Поэтому с точки зрения современной теории уравнений с частными производными функция (5) – обобщенное решение уравнения Шредингера (2) (см. [4], [5]). Для практического использования нужно “обрезать” эти пучки на бесконечности. Цель данной статьи состоит в том, чтобы показать, как это можно сделать, используя канонический оператор Маслова [6], [7] и одну теорему Хёрмандера [8] о свойствах быстроосциллирующих интегралов, сохранив при этом структуру, основанную на функциях Эйри и Бесселя. Именно, мы построим достаточно большой запас четверок финитных срезающих функций $w_j(x, t)$, $j = 1, \dots, 4$, таких что функция

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) = & h^{-2/3} \exp\left(-\frac{i}{h}\left(\frac{q^3 t^3}{3a^2} + \frac{(x_3 - ct)qt}{a} + \frac{\lambda^2 ct}{2k}\right)\right) \times \\ & \times \left[\text{Ai}\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}}\left(x_3 - ct + \frac{q^2 t^2}{2a}\right)\right) \left(w_1(x, t)J_0\left(\frac{\lambda\rho}{h}\right) + w_3(x, t)J_1\left(\frac{\lambda\rho}{h}\right)\right) + \right. \\ & \left. + \sqrt[3]{h} \text{Ai}'\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}}\left(x_3 - ct + \frac{q^2 t^2}{2a}\right)\right) \left(w_2(x, t)J_0\left(\frac{\lambda\rho}{h}\right) + w_4(x, t)J_1\left(\frac{\lambda\rho}{h}\right)\right) \right], \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\text{Ai}'(z)$ – производная функции Эйри, а $J_1(r)$ – функция Бесселя первого порядка, является асимптотикой при $h \rightarrow +0$ некоторого точного решения уравнения типа Шредингера (2) (см. ниже формулу (25)). Также на этом простом примере пучков Эйри–Бесселя мы проиллюстрируем новые эффективные формулы для канонического оператора Маслова, недавно полученные в работах [9], [10].

2. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

Сначала напомним некоторые элементарные факты, связанные с методом ВКБ.

2.1. Локализация ВКБ-решения. Для уравнения Шредингера (3) рассмотрим задачу Коши

$$\psi|_{t=0} = a_0(x)e^{(i/h)S_0(x)}, \quad (6)$$

где S_0 и $a_0(x)$ – заданные гладкие функции, причем $S_0(x)$ вещественна, а $a_0(x)$ финитна. Хорошо известно, что точное решение этой задачи – бесконечно гладкая функция, причем все нормы

$$\left\| |x|^s h^{k+l} \frac{\partial^{k+l} \psi}{\partial x^k \partial t^l} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_x)}, \quad s, k, l = 0, 1, 2, \dots,$$

ограничены локально равномерно по t .

Чтобы построить асимптотическое решение задачи (3), (6), нужно сделать следующее.

1. С уравнением (3) связана классическая система Гамильтона $\dot{x} = p$, $\dot{p} = 0$ с гамильтонианом $H(p) = p^2/2$ на фазовой плоскости $\mathbb{R}_{(x,p)}^2$ с координатами (x, p) . Найдем семейство траекторий этой системы, начинающихся в точках

$$x = \phi, \quad p = p_0(\phi) \equiv \frac{\partial S_0(\phi)}{\partial \phi},$$

где ϕ – вещественный параметр. Нетрудно видеть, что оно задается формулами

$$x = X(\phi, t) \equiv \phi + tp_0(\phi), \quad p = P(\phi, t) \equiv p_0(\phi).$$

Для каждого фиксированного t эти формулы задают гладкую кривую Λ_t^1 , которая в квазиклассической теории называется одномерным *лагранжевым многообразием*. Параметр ϕ является координатой на Λ_t^1 .

2. Построим на лагранжевых многообразиях Λ_t^1 *действие*

$$S(\phi, t) = S_0(\phi) + \frac{1}{2}tp_0^2(\phi).$$

3. Рассмотрим на лагранжевых многообразиях Λ_t^1 *якобиан*

$$J(\phi, t) = \frac{\partial X(\phi, t)}{\partial \phi} = 1 + t \frac{\partial^2 S_0(\phi)}{\partial \phi^2}.$$

Пусть для некоторого $t_0 > 0$ он удовлетворяет неравенству $J(\phi, t) > \text{const} > 0$ при $t \in [0, t_0]$ и $\phi \in \text{supp } a_0$, где $\text{supp } a_0$ – носитель начальной амплитуды $a_0(x)$. По теореме о неявной функции отображение $\phi \mapsto X(\phi, t)$ является при каждом $t \in [0, t_0]$ локальным диффеоморфизмом некоторой окрестности множества $\text{supp } a_0$ на его образ. Предположим, что, более того, оно взаимно однозначно (это заведомо так, если носитель $\text{supp } a_0$ связан), и через $\phi = \phi(x, t)$ обозначим (гладкое) обратное отображение. Справедливо следующее утверждение [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функция*

$$\psi_{\text{as}}(x, t) = \frac{a_0(\phi(x, t))}{\sqrt{J(\phi(x, t), t)}} e^{(i/\hbar)S(\phi(x, t), t)} \quad (7)$$

является асимптотикой решения $\psi(x, t)$ задачи Коши (3), (6) на отрезке $[0, t_0]$: существуют такие постоянные C_{skl} , $s, k, l = 0, 1, 2, \dots$, что выполнены оценки

$$\left| x^s \frac{\partial^{k+l}(\psi(x, t) - \psi_{\text{as}}(x, t))}{\partial x^k \partial t^l} \right| \leq C_{skl} \hbar, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_0].$$

Заметим, что если в (7) взять $a_0(\phi) = 1$, то получится формальное асимптотическое решение, которое не лежит в пространстве L_2 . Если же взять функцию a_0 в виде функции с компактным носителем, то получится физически осмысленное решение с конечной энергией. Легко доказать, что носитель функции $a_0(\phi(x, t), t)$ (и, следовательно, волнового пакета ψ_{as}) движется по оси x с *групповой скоростью* H_p . Действительно, пусть функция $a_0(x)$ локализована в окрестности некоторой точки x_0 . Тогда функция (7) локализована в окрестности точки $\tilde{x}(t)$, определяемой уравнением $\phi(\tilde{x}(t), t) = x_0$. По определению функции ϕ отсюда следует, что $\tilde{x}(t) = X(x_0, t)$ – проекция траектории системы Гамильтона на ось x , и соответственно $\dot{\tilde{x}}(t) = H_p(p_0(x_0))$.

Из этого хорошо известного простого вычисления можно сделать следующий вывод: чтобы локализовать ВКБ-решение, достаточно умножить начальное условие на *срезающую функцию*, точки носителя которой затем должны двигаться с групповой скоростью. Эта идея (как и само ВКБ-решение) перестает работать, как только появляются фокальные точки. В этом случае асимптотическое решение дается каноническим оператором Маслова.

2.2. Общие формулы асимптотического решения специальной задачи Коши для уравнения типа Шредингера с постоянными коэффициентами. Кратко напомним общий подход Маслова в n -мерном случае, ограничиваясь задачей Коши для уравнения в частных производных типа Шредингера с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(\hat{p})\psi + hH_1(\hat{p})\psi, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0(x, h). \quad (8)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $\hat{p} = -ih\nabla = -ih\partial/\partial x$, а гладкие функции $H(p)$ и $H_1(p)$ называются соответственно *главным* и *субглавным символами*. Символ $H(p)$ называется еще (*классическим*) *гамильтонианом*. Предполагается, что начальная функция задана с помощью канонического оператора Маслова. Рассмотрим $2n$ -мерное фазовое пространство $\mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$ с координатами $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ и предположим, что задано начальное лагранжево многообразие $\Lambda_0^n = \{x = X(\alpha), p = P(\alpha)\}$. Здесь параметры $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – координаты на многообразии Λ_0^n ; во многих приложениях α принадлежит произведению k -мерного тора на $(n-k)$ -мерное евклидово пространство. Для простоты записи удобно обозначать точку $(X(\alpha), P(\alpha))$ просто через α . Нужно также задать некоторую меру μ на Λ_0^n , во многих приложениях достаточно положить $\mu = d\alpha_1 \wedge \dots \wedge d\alpha_n$. Далее нужно зафиксировать некоторую центральную точку α_0 . Обычно мы считаем, что якобиан $J_0(\alpha) = \partial X/\partial \alpha$ отличен от нуля в этой точке (т.е. точка α_0 регулярна). При наличии всех этих объектов можно построить канонический оператор Маслова $K_{\Lambda_0^n}^h$ на многообразии Λ_0^n и функцию $\psi(x) = [K_{\Lambda_0^n}^h A(\alpha)](x)$. Изменение выбора центральной точки просто добавляет унимодулярный множитель вида $e^{i\theta}$ в определение канонического оператора.

Построим теперь асимптотику решения задачи Коши (8) с начальным условием вида

$$\psi_0(x, h) = [K_{\Lambda_0^n}^h A(\alpha)](x),$$

где $A(\alpha)$ – некоторая гладкая финитная функция (амплитуда) на Λ_0^n . Схема построения решения состоит из следующих шагов. Гамильтониан $H(p)$ порождает фазовый поток g_H^t в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$, переводящий любую точку $(\tilde{x}, \tilde{p}) \in \mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$ в точку $(\tilde{x} + tH_p(\tilde{p}), \tilde{p})$. Применение потока g_H^t к Λ_0^n дает лагранжево многообразие

$$\Lambda_t^n = g_H^t \Lambda_0^n = \{x = X(\alpha) + tH_p(P(\alpha)), p = P(\alpha)\}.$$

Естественно рассматривать α как координаты на Λ_t^n . Построим амплитуду

$$A(\alpha, t) = A(\alpha)e^{-itH_1(P(\alpha))}.$$

Предположим теперь для простоты, что точка α_0 регулярна на Λ_t^n и что матрица H_{pp} положительно определена. Введем функцию

$$\gamma(t) = t(\langle p, H_p \rangle - H)(P(\alpha_0)) - \frac{\pi}{2} \mathbf{m}(t)h, \quad (9)$$

где $\mathbf{m}(t)$ – число нулей якобиана $J(\alpha_0, t) = \det(X_\alpha + tH_{pp}P_\alpha)(\alpha_0)$ на отрезке $[0, t]$, т.е. индекс Морса траектории $(X(\alpha_0) + tH_p(P(\alpha_0)), P(\alpha_0))$. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1 [6], [7]. *Главный член асимптотического решения задачи (8) можно записать в виде*

$$\psi(x, t) = e^{(i/h)\gamma(t)} K_{\Lambda_t^n}^h [A(\alpha) e^{-itH_1(P(\alpha))}] (x, t). \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно общей теории канонического оператора в пространстве $\mathbb{R}_x^n$ функция (10) оказывается локализованной при $h \rightarrow +0$ в окрестности проекции носителя $\text{supp } A \subset \Lambda_t^n$ функции $A(\alpha)$ на пространство $\mathbb{R}_x^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно было бы использовать стандартный метод Фурье, чтобы представить точное решение задачи Коши (8) в интегральной форме и затем использовать для его анализа метод стационарной фазы. Однако поиск стационарных точек и исследование их вклада могут оказаться весьма нетривиальными. Представление (10), основанное на подходящих лагранжевых многообразиях, уже включает в себя результаты всех таких исследований, и поэтому оно, как правило, гораздо более эффективно, чем представление, основанное на методе Фурье.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В ситуациях, рассматриваемых в настоящей статье, $\mathbf{m}(t) = 0$ и (за исключением раздела 5) $H_1(p) = 0$.

В некоторых специальных ситуациях в формуле (10) можно взять амплитуду с некомпактным носителем, $A = 1$ (см. также ниже) и глобально выразить ее правую часть в терминах специальных функций, таких как функции Эйри (см. (4)) или Бесселя (см. (5)). В этом случае функция $\psi(x, t)$ не принадлежит пространству типа L_2 , т. е. не обладает конечной энергией. Локализовать формальное решение (10) в этом случае совсем просто: согласно замечанию 1 достаточно умножить амплитуду $A = 1$ на срезающую функцию $\mathbf{e}(\alpha)$. Однако при этом “элегантное” представление решения через специальную функцию может быть потеряно. Мы покажем, что в этих ситуациях можно прокоммутировать срезающую функцию с каноническим оператором и получить следующую формулу:

$$K_{\Lambda_t^n}^h (\mathbf{e}(\alpha) A(\alpha)) = \hat{a} K_{\Lambda_t^n}^h A(\alpha) + O(h),$$

где $\hat{a}$ – явно выписываемый дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами, которые выражаются через функцию $\mathbf{e}(\alpha)$ (вид этого выражения, конечно, зависит от многообразия Λ_t^n). Таким образом, после локализации решение по-прежнему выражается через функции Эйри и Бесселя (и их производные).

В связи с последней формулой упомянем следующие два тесно связанных важных свойства канонического оператора Маслова и быстроосциллирующих интегралов Хёрмандера.

ТЕОРЕМА 2 [6]. Пусть $R(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$ – псевдодифференциальный оператор с гладким символом $R(x, p)$. Тогда справедлива следующая формула его коммутации с каноническим оператором Маслова:

$$R(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}) K_{\Lambda^n}^h A(\alpha) = K_{\Lambda^n}^h (R|_{\Lambda^n} A(\alpha)) + O(h), \quad (11)$$

где $R|_{\Lambda^n} = R(X(\alpha), P(\alpha))$ – сужение символа R на многообразие Λ^n .

ТЕОРЕМА 3 [8]. Рассмотрим быстроосциллирующий интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^k} A(x, \xi) e^{(i/h)\Phi(x, \xi)} d\xi, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_k),$$

где переменная x пробегает некоторую область D пространства $\mathbb{R}^n$, а функции $A(x, \xi)$ и $\Phi(x, \xi)$ гладкие, причем A финитна, а Φ вещественнозначна. Предположим, что дифференциалы функций $\Phi_{\xi_1}, \dots, \Phi_{\xi_k}$ линейно независимы в любой точке множества⁴⁾

$$C_\Phi = \{(x, \xi) : \Phi_{\xi_1} = 0, \dots, \Phi_{\xi_k} = 0\},$$

и пусть $\tilde{A}(x, \xi)$ – финитная функция такая, что $\tilde{A}(x, \xi) = A(x, \xi)$ при $(x, \xi) \in C_\Phi$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^k} A(x, \xi) e^{(i/h)\Phi(x, \xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^k} \tilde{A}(x, \xi) e^{(i/h)\Phi(x, \xi)} d\xi + O(h). \quad (12)$$

Теоремы 2 и 3 в совокупности образуют важный инструмент, позволяющий преобразовывать асимптотические решения, заданные с помощью канонического оператора (см., например, [10]).

3. КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР МАСЛОВА В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ, ФУНКЦИЯ ЭЙРИ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ БЕРРИ

3.1. Параболическая кривая и функция Эйри. Здесь мы объясним, как локализовать решение Берри–Балажа одномерного уравнения Шредингера. Прежде всего напомним взаимосвязь (см. [11]) между решением типа функции Эйри и некоторым одномерным некомпактным лагранжевым многообразием (незамкнутой кривой) на фазовой плоскости $\mathbb{R}_{(x,p)}^2$. Рассмотрим кривую

$$\Lambda_0^1 = \left\{ x = X_0(\phi) = \frac{a\phi^2}{2}, p = P_0(\phi) = \phi \right\},$$

где $\phi \in \mathbb{R}$ – (лагранжева) координата на Λ_t^1 (ее роль в п. 2.2 играет координата α), а $a > 0$ – вещественный параметр. Фазовый поток $g_{p^2/2}^t$, соответствующий гамильтониану $p^2/2$, переводит это многообразие в одномерные лагранжевы многообразия (кривые)

$$\Lambda_t^1 = \left\{ x = X(\phi, t) \equiv a\frac{\phi^2}{2} + t\phi, p = P(\phi, t) \equiv \phi \right\},$$

на каждой из которых параметр ϕ также можно выбрать в качестве координаты.

Пусть задана некоторая гладкая функция $A(\phi)$ на Λ_0^1 и, следовательно, на Λ_t^1 . Зафиксируем центральную точку с координатой ϕ_0 на Λ_0^1 . Сдвигая ее с помощью фазового потока $g_{p^2/2}^t$, получим центральные точки с той же координатой ϕ_0 на всех кривых Λ_t^1 .

Вычислим якобианы

$$J(\phi, t) = \frac{\partial X}{\partial \phi} \equiv a\phi + t, \quad \tilde{J}(\phi, t) = \frac{\partial P}{\partial \phi} \equiv 1.$$

⁴⁾У Хёрмандера [8] это условие, гарантирующее, что C_Φ – гладкое многообразие размерности n , называется условием невырожденности фазовой функции $\Phi(x, \xi)$.

Уравнение

$$J(\phi, t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \phi = -\frac{t}{a}$$

задает координаты фокальной точки ($x = -t^2/2a$, $p = -t/a$) (лагранжевой особенности) на Λ_t^1 , которая является вершиной параболы Λ_t^1 . Рассмотрим случай, когда $t \geq 0$, и выберем $\phi_0 > 0$, тогда $J(\phi_0, t) > 0$, и центральная точка ни на одном из многообразий Λ_t^1 не является фокальной. Это означает, что индекс Морса $\mathbf{m}(t)$ в формуле (9) равен нулю.

Действие на кривой Λ_t^1 задается формулой

$$s(\phi, t) = \int_{\phi_0}^{\phi} P dX = \theta(\phi) \equiv a \frac{\phi^3}{3} + t \frac{\phi^2}{2} - a \frac{\phi_0^3}{3} - t \frac{\phi_0^2}{2}.$$

Нам нужно также приращение фазы

$$\gamma(t) = \frac{t}{2} \phi_0^2.$$

Наконец, нам понадобятся индексы Маслова. Зададим индекс Маслова $m(\phi_0) = 0$ в (неособой) центральной точке ϕ_0 . Рассмотрим теперь особую карту. Соответствующий якобиан не обращается в нуль: $\tilde{J}(\phi, t) = \partial P / \partial \phi = 1$. Поэтому все многообразие Λ_t^1 можно покрыть одной особой картой. Знаки якобианов $\tilde{J}(\phi_0, t)$ и $J(\phi_0, t)$ совпадают, и индекс Маслова $\tilde{m}$ этой особой карты также равен нулю. Поэтому в соответствии с общими формулами можно представить решение через канонический оператор Маслова в виде

$$\psi(x, t) = [K_{\Lambda_t^1}^h A](x, t) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi h}} e^{-(i/h)a\phi_0^3/3} \int_{-\infty}^{-\infty} e^{(i/h)(-ap^3/6 - tp^2/2 + px)} A(p) dp \quad (13)$$

(мы учли тот факт, что $P(\phi, t) = p$). Замена переменной интегрирования

$$p = -\eta \frac{\sqrt[3]{2h}}{\sqrt[3]{a}} - \frac{t}{a}$$

приводит к выражению

$$\psi(x, t) = \frac{C_0}{\sqrt[6]{h}} e^{-it^3/3ha^2} e^{-ixt/ah} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\eta^3/3 + y\eta)} A\left(-\eta \frac{\sqrt[3]{2h}}{\sqrt[3]{a}} - \frac{t}{a}\right) d\eta \right), \quad (14)$$

где

$$y = -\sqrt[3]{\frac{2}{h^2 a}} \left(x + \frac{t^2}{2a} \right), \quad C_0 = \frac{\sqrt{\pi} e^{i\pi/4}}{\sqrt[6]{2a^2}} e^{-(i/h)a\phi_0^3/3}.$$

Если взять амплитуду $A = 1$, то интеграл в правой части формулы (14) превращается в функцию Эйри $\text{Ai}(y)$, и мы приходим к формуле (4) и решению с бесконечной энергией для уравнения Шредингера. Эта конструкция продемонстрирована на рис. 2.

Рис. 2. Движущаяся парабола (лагранжевы многообразия, заданные на фазовой плоскости) в разные моменты времени и графики вещественных частей соответствующих им решений Берри–Балажа. “Пик” параболы – фокальная точка – сначала бежит справа налево, затем останавливается и бежит слева направо. Решение достигает максимума в окрестности этих точек, слева от них оно экспоненциально затухает, а справа осциллирует, и весь неограниченный волновой пакет перемещается таким же образом. Заметим, что и верхняя, и нижняя “половины” вносят вклад в осцилляции пакета, при этом групповая скорость, соответствующая верхней части параболы, положительна, а нижней – отрицательна.

3.2. Локализация решения Берри. Согласно замечанию 1, выбирая в качестве $A(\phi)$ финитную функцию, получим решение с конечной энергией. Поставим задачу о выражении этого решения через функцию Эйри и ее производные.

Скомбинируем формулы (11) и (13). Если амплитуду $A(\phi)$ представить в виде $A(\phi) = R(X(\phi, t), P(\phi, t))$, то мы можем записать правую часть формулы (13) как

действие псевдодифференциального оператора $R(\overset{1}{x}, \overset{1}{p})$ на функцию Эйри. Проблема в том, что в окрестности фокальной точки заданная амплитуда $A(\phi)$ не представлена в таком виде. Чтобы преодолеть это неудобство, воспользуемся формулой хёрмандеровского типа (12) и заменим амплитуду $A(\phi)$ такой функцией, которая может быть представлена в виде некоторой функции $R(x, P(\phi, t))$. Как только мы это сделаем, мы сможем воспользоваться формулой коммутации (11) и в итоге получить искомое представление, основанное на функции Эйри.

Уравнение $X(\phi, t) = x$ для координаты ϕ имеет два решения

$$\phi^{\pm} = -\frac{t}{a} \pm \frac{\sqrt{t^2 + 2ax}}{a}.$$

Перепишем эти решения в виде

$$\phi^{\pm} + \frac{t}{a} = \pm \sqrt{Q}, \quad Q(x, t) = \frac{t^2 + 2ax}{a^2},$$

и представим амплитуду $A(\phi)$ в виде суммы четной и нечетной функций аргумента $\phi + t/a$:

$$\begin{aligned} A(\phi) &= \frac{1}{2} \left(A\left(\phi + \frac{t}{a} - \frac{t}{a}\right) + A\left(-\left(\phi + \frac{t}{a}\right) - \frac{t}{a}\right) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\phi + \frac{t}{a} \right) \frac{A(\phi + t/a - t/a) - A(-(\phi + t/a) - t/a)}{\phi + t/a}. \end{aligned}$$

Теперь можно ввести две четные (и потому зависящие только от z) функции аргумента $\sqrt{z}$:

$$\begin{aligned} g_1^+(z, t) &= \frac{1}{2} \left(A\left(\sqrt{z} - \frac{t}{a}\right) + A\left(-\sqrt{z} - \frac{t}{a}\right) \right), \\ g_2^+(\sqrt{z}, t) &= \frac{1}{2\sqrt{z}} \left(A\left(\sqrt{z} - \frac{t}{a}\right) - A\left(-\sqrt{z} - \frac{t}{a}\right) \right). \end{aligned}$$

Заменяя z на $Q(x, t)$ и используя теорему Хёрмандера (теорема 3), можно переписать интеграл (13) в виде

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi h}} e^{-(i/h)a\phi_0^3/3} \int_{-\infty}^{\infty} \left(g_1^+(Q(x, t), t)|_{\Lambda_t^1} + \left(\phi + \frac{t}{a}\right) g_2^+(Q(x, t), t)|_{\Lambda_t^1} \right) \times \\ &\times e^{(i/h)(-a\phi^3/6 - t\phi^2/2 + \phi x)} d\phi = \\ &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi h}} e^{-(i/h)a\phi_0^3/3} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(g_1^+(Q(x, t), t) + \frac{t}{a} g_2^+(Q(x, t), t) \right) \Big|_{\Lambda_t^1} \times \right. \\ &\times e^{(i/h)(-a\phi^3/6 - t\phi^2/2 + \phi x)} d\phi + \\ &\left. + \int_{-\infty}^{\infty} (g_2^+(Q(x, t), t)p)|_{\Lambda_t^1} e^{(i/h)(-a\phi^3/6 - t\phi^2/2 + \phi x)} d\phi \right]. \end{aligned}$$

Теперь мы хотим воспользоваться формулой коммутации (11). Проблема в том, что в действительности функции g_1^+ , g_2^+ определены только при неотрицательных

$t^2 + 2ax$. Этого вполне достаточно, чтобы использовать их “внутри” канонического оператора, но недостаточно, чтобы вынести их из-под канонического оператора. Для этого мы должны построить что-то вроде аналитического продолжения функций g_1^+ , g_2^+ для отрицательных значений $t^2 + 2ax$. Интегралы в последних формулах экспоненциально убывают по параметру h , а именно как $\exp\left(-\frac{1}{h}\sqrt{\frac{2}{a}}\left|x+\frac{t^2}{2a}\right|^{3/2}\right)$ при $x + t^2/2a < -\delta$, $\delta < 0$. Поэтому, используя идеи разложений метода комплексного роста (см. [11]–[13]), можно продолжить эти функции по формулам

$$\tilde{g}_j(z, t) = g_j(0, t) + \frac{\partial g_j^+}{\partial z}(0, t)z + \cdots + \frac{1}{k!} \frac{\partial^k g_j^+}{\partial z^k}(0, t)z^k, \quad z < 0,$$

где k – натуральное число, причем для практических целей достаточно взять $k = 3$ или $k = 4$. Эта формула не особенно удобна для практических вычислений, поскольку приходится работать с производными функций, записанных как выражения, зависящие от $\sqrt{z}$. Поэтому лучше использовать следующее продолжение:

$$g_j^-(z, t) = 3g_j^+(0, t) - 3g_j^+(-z, t) + g_j^+(-2z, t), \quad z < 0.$$

Оно совпадает с $\tilde{g}_j(z, t)$ с точностью до $O(z^4)$ (см. приложение). Положим

$$g_j(z, t) = \begin{cases} g_j^-(z, t), & z < 0, \\ g_j^+(z, t), & z > 0, \end{cases}$$

и напомним

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &\simeq \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi h}} e^{-(i/h)a\phi_0^3/3} \left(g_1(Q(x, t), t) + g_2(Q(x, t), t) \left(\frac{t}{a} - ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i/h)(-a\phi^3/6 - t\phi^2/2)} e^{(i/h)\phi x} d\phi = \\ &= \frac{C_0}{\sqrt[6]{h}} \left(g_1(Q(x, t), t) + g_2(Q(x, t), t) \left(\frac{t}{a} - ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \times \\ &\quad \times e^{-it^3/3ha^2} e^{-ixt/ah} \operatorname{Ai} \left(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}} \left(x + \frac{t^2}{2a} \right) \right) = \\ &= \frac{C_0}{\sqrt[6]{h}} e^{-it^3/3ha^2} e^{-ixt/ah} \left[g_1(Q(x, t), t) \operatorname{Ai} \left(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}} \left(x + \frac{t^2}{2a} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - ihg_2(Q(x, t), t) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Ai} \left(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}} \left(x + \frac{t^2}{2a} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда получается следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{C_0}{\sqrt[6]{h}} e^{-it^3/3ha^2} e^{-ixt/ah} \left[g_1(Q(x, t), t) \operatorname{Ai} \left(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}} \left(x + \frac{t^2}{2a} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + i\sqrt[3]{\frac{2h}{a}} g_2(Q(x, t), t) \operatorname{Ai}' \left(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}} \left(x + \frac{t^2}{2a} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где $\operatorname{Ai}'(z) = d\operatorname{Ai}(z)/dz$. Тогда существует точное решение $\tilde{\psi} \in L_2$ уравнения Шредингера (3) такое, что $\tilde{\psi} - \psi = O(h^{5/6})$.

Рис. 3. Графики функций $g_1(Q(x, t), t)$ и $g_2(Q(x, t), t)$ в разные моменты времени.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Можно рассмотреть уравнение Шредингера

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{qh^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

с положительным параметром q (обратная масса) и построить решение, аналогичное (15). Легко видеть, что для этого достаточно сделать замену $t \rightarrow qt$ во всех предыдущих формулах и конструкциях.

Несмотря на достаточно сложное по форме определение функций g_1 , g_2 и q , их компьютерная реализация и последующее графическое исследование функции ψ вида (15) с помощью программы *Mathematica* [14] не составляют особого труда. При этом анализ поведения функции ψ при различных t и при разнообразных значениях параметров осуществляется практически в режиме реального времени (см. рис. 3 и 4).

4. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ПУЧКИ ЭЙРИ–БЕССЕЛЯ

В этом разделе мы построим локализованное решение, соответствующее решению (5).

4.1. Решение с помощью канонического оператора Маслова. Двумерное лагранжево многообразие, отвечающее функции Бесселя J_0 , было представлено и обсуждалось в работе [9]. Здесь мы скомбинируем его с упомянутым выше одномерным многообразием, соответствующим функции Эйри. Пусть $\mathbb{R}_{(x,p)}^6$ – ше-

Рис. 4. Локализованное решение Берри–Балажа в те же моменты времени, что и на рис. 2, 3. Носитель срезающей функции на параболе Λ_t^1 сначала находится на верхней половине Λ_t^1 , и таким временам соответствует пакет, описываемый ВКБ-решением, затем носитель срезающей функции захватывает “пик” параболы – фокальную точку, и у решения возникает резкий максимум. Нижний рисунок соответствует ситуации, когда срезающая функция переместилась на нижнюю половину Λ_t^1 и решение опять принимает вид волнового пакета, описываемого ВКБ-решением.

Рис. 5. Цилиндр и его проекция на двумерную плоскость.

стимерное фазовое пространство с координатами $p = (p_\perp, p_3)$, $x = (x_\perp, x_3)$, где $p_\perp = (p_1, p_2)$, $x_\perp = (x_1, x_2)$. Выберем начальное многообразие Λ_0^3 в $\mathbb{R}_{(x,p)}^6$ в виде

$$\Lambda_0^3 = \left\{ p_\perp = \lambda \mathbf{n}(\psi), p_3 = \phi, x_\perp = \mathbf{n}(\psi)\alpha, x_3 = \frac{\phi^2}{2} \right\}.$$

Переменные $\alpha_1 = \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = \phi \in \mathbb{R}$ и $\alpha_3 = \psi \in \mathbb{S} = \mathbb{R} \pmod{2\pi}$ суть координаты на Λ_0^3 , а λ – некоторое положительное число. Зафиксируем центральную точку на Λ_t^3 с координатами $(\alpha, \phi_0, \psi_0) = (+0, \phi_0, 0)$, где ϕ_0 такая же, как и в предыдущем разделе.

Рассмотрим гамильтониан

$$H = cp_3 + \frac{c}{2k}p_\perp^2 + \frac{q}{2}p_3^2$$

и соответствующий фазовый поток g_H^t на фазовом пространстве $\mathbb{R}_{(x,p)}^6$. Фазовый поток g_H^t , примененный к многообразию Λ_0^3 , дает семейство $\{\Lambda_t^3 = g_H^t \Lambda_0^3\}$ трехмерных лагранжевых многообразий

$$\Lambda_t^3 = \left\{ p_\perp = \lambda \mathbf{n}(\psi), p_3 = \phi, x_\perp = \mathbf{n}(\psi) \left(\alpha + t\lambda \frac{c}{k} \right), x_3 = a \frac{\phi^2}{2} + tq\phi + tc \right\},$$

где переменные (α, ϕ, ψ) являются координатами на каждом из Λ_t^3 . При фиксированном t многообразие Λ_t^3 диффеоморфно произведению двумерной плоскости на окружность. Его также можно представить как расслоение, базой которого является парабола, а слоями – двумерные цилиндры. Проекция параболы на ось x_3 – полуось, а проекция цилиндра (см. также [15]) – две “склеенные” в одной точке плоскости (см. рис. 5). Поэтому проекция многообразия Λ_t^3 на конфигурационное пространство $\mathbb{R}_x^3$ представляет собой четыре “склеенных” движущихся полупространства $\Pi = \{x_3 \geq -t^2/2a\}$. Пусть $A(\alpha, \phi, \psi)$ – гладкая амплитуда на Λ_t^3 . Следующее утверждение описывает, как устроен канонический оператор Маслова на Λ_t^3 .

ЛЕММА 1. Действие канонического оператора Маслова на многообразии Λ_t^3 на функцию $A(\alpha, \phi, \psi)$ может быть представлен в виде

$$[K_{\Lambda_t^3}^h A](x, t) = \frac{i\lambda}{2\pi} e^{(i/h)tc\lambda^2/2k} e^{-i\pi m/2} e^{-(i/h)a\phi_0^3/3} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} [e^{(i/h)(\lambda(\mathbf{n}(\psi), x_{\perp}) + \phi(x_3 - ct) - a\phi^3/6 - tq\phi^2/2)} A(\alpha(x, t, \phi, \psi), \phi)]_{\alpha=\alpha(x, \psi, \phi)} d\psi d\phi. \quad (16)$$

Функция $\Phi(x, t) = [K_{\Lambda_t^3}^h A](x, t)$ является асимптотическим решением уравнения Шредингера (2). В формуле (16) $\alpha(x, \psi, \phi)$ определено в (21).

Мы воспользуемся интегральной формулой (16), чтобы построить асимптотические решения уравнения (2), обобщающие решение (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулами из работы [10]. В соответствии с общими формулами центральной точкой на Λ_t^3 является точка с координатами $(\alpha_0, \phi_0, \psi_0) = (+0, \phi_0, 0)$. Найдём сначала эйконал (фазу) τ :

$$\tau = \int_{(\alpha^c, \phi^c, \psi^c)}^{(\alpha, \phi, \psi)} P dX = \lambda\alpha + \theta(\phi),$$

где

$$\theta(\phi) = \frac{a}{3}\phi^3 + \frac{tq}{2}\phi^2 - \left(\frac{a}{3}\phi_0^3 + \frac{tq}{2}\phi_0^2\right).$$

Приращение фазы вдоль траектории, состоящей из центральных точек, дается формулой

$$\int_0^t (\langle p, H_p \rangle - H)|_{p_{\perp}=\lambda n(0), p_3=\phi_0} dt = \frac{tc\lambda^2}{2k} + \frac{tq\phi_0^2}{2}.$$

Перейдем теперь к эйконал-координатам (τ, ϕ, ψ) . “Старая” координата α выражается через τ по формуле

$$\alpha = \frac{\tau - \theta}{\lambda}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = a\phi^2 + tq\phi.$$

Матрица Якоби $\partial X / \partial(\tau, \phi, \psi)$ задается формулой

$$\frac{\partial X}{\partial(\tau, \phi, \psi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \cos \psi & \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \cos \psi & -\sin \psi \left(\alpha + t\lambda \frac{c}{k} \right) \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \sin \psi & \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \sin \psi & \cos \psi \left(\alpha + t\lambda \frac{c}{k} \right) \\ 0 & a\phi + tq & 0 \end{pmatrix},$$

а якобиан – ее определитель – формулой

$$J = J^{(1,2,3)} \equiv J(\tau, \phi, \psi) \equiv \det \frac{\partial X}{\partial(\tau, \phi, \psi)} \equiv -(a\phi + tq) \left(\alpha(\tau, \phi) + t\lambda \frac{c}{k} \right).$$

Фокальные точки определяются из уравнений

$$\alpha(\tau, \phi) + t\lambda \frac{c}{k} = 0, \quad (17)$$

$$a\phi + tq = 0. \quad (18)$$

Решения уравнения (17) задают в $\mathbb{R}_x^3$ ось x_3 – множество $\{x_\perp = 0\}$. Уравнение (18) определяет в полупространстве Π_t луч $\Gamma_t = \{x_\perp = 0, x_3 \geq x_3^*(t)\}$ и двумерную плоскость $\Sigma_t = \{x_3 = x_3^*(t)\}$, где $x_3^*(t) \equiv -t^2 q^2 / 2a + ct$ (см. рис. 6). Таким образом, каустиками являются плоскость Σ_t и луч Γ_t . В точке $x_\perp = 0, x_3 = x_3^*(t)$ (в которой пересекаются эти две каустики) матрица Якоби приобретает вид

$$\frac{\partial X}{\partial(\tau, \phi, \psi)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \cos \psi & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} \sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и имеет минимально возможный ранг, равный единице. Таким образом, точка $x_\perp = 0, x_3 = x_3^*(t)$ является наиболее сильной фокальной точкой на Λ_t^3 . Определитель матрицы (P, P_ϕ, P_ψ) равен

$$\det(P, P_\phi, P_\psi) = \det \begin{pmatrix} \lambda \cos \psi & 0 & -\lambda \sin \psi \\ \lambda \sin \psi & 0 & \lambda \cos \psi \\ \phi & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\lambda^2 \neq 0. \quad (19)$$

Таким образом, согласно [10] многообразие Λ_t^3 покрывается одной сингулярной картой (которую обозначим через U), а канонический оператор определяется с помощью интегрирования по ϕ и ψ . Приведем соответствующие формулы, следуя работе [9]. Учитывая, что в силу глобальности карты U влияние ее индекса Маслова m на решение сводится к выбору постоянного множителя, мы опустим его вычисление.

Найдем решение $\tau(x, t, \phi, \psi)$ уравнения

$$\begin{aligned} \langle P, x - X \rangle &\equiv \lambda \langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle - \tau + \theta - t \frac{\lambda^2 c}{k} + \phi x_3 - \phi \left(\frac{a\phi^2}{2} + tq\phi + tc \right) \equiv \\ &\equiv -\tau + \lambda \langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle + \phi(x_3 - ct) - \frac{a}{6}\phi^3 - \frac{1}{2}tq\phi^2 - \frac{a}{3}\phi_0^3 - \frac{1}{2}tq\phi_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Оно имеет вид

$$\tau(x, t, \phi, \psi) = \lambda \langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle + \phi(x_3 - ct) - \frac{a}{6}\phi^3 - \frac{1}{2}tq\phi^2 - \frac{a}{3}\phi_0^3 - \frac{1}{2}tq\phi_0^2. \quad (20)$$

Мы также можем написать

$$\alpha(x, t, \phi, \psi) = \langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle - \frac{t\lambda c}{k} + \frac{\phi}{\lambda} \left(x_3 - \frac{a}{2}\phi^2 - tq\phi - ct \right). \quad (21)$$

Зададим меру $\mu = d\tau \wedge d\phi \wedge d\psi$ на Λ_t^3 . Из вида исходного уравнения вытекает, что она сохраняет свою форму на семействе многообразий Λ_t^3 , так что канонический оператор Маслова можно записать в виде (см. формулу (27) в [10])

$$\begin{aligned} \Psi &= [K_U^h A](x, h) = \frac{ie^{-i\pi m/2}}{2\pi h} e^{(i/h)(tc\lambda^2/2k + tq\phi_0^2/2)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left[e^{i\tau/h} A(\alpha(x, t, \phi, \psi), \phi) \sqrt{|\det(P, P_\phi, P_\psi)|} \right]_{\tau=\tau(x, t, \phi, \psi)} d\psi d\phi. \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь, используя формулы (19), (20) и (21), получаем выражение (16).

Рис. 6. Каустики – лагранжевы сингулярности лагранжева многообразия C_τ . По ним происходит переход с одного листа на другой при движении по многообразию C_τ .

4.2. Выражение через функции Эйри и Бесселя. Используем теперь формулу хёрмандеровского типа для упрощения интеграла (22) (см. также [9], [10]). Возьмем аксиально-симметричную (не зависящую от переменной ψ) амплитуду $A = A(\alpha, \phi)$ на многообразии Λ_0^3 . Формула Хёрмандера утверждает, что $A(\alpha(x, t, \phi, \psi), \phi)$ можно заменить другой гладкой функцией $A'(x, t, \psi, \phi)$, совпадающей с нею на многообразии C_τ , отвечающем фазовой функции $\tau(x, t, \phi, \psi)$, и это приведет лишь к малой поправке в ответе. Мы изменим функцию A в два этапа.

1. Положим $x_3 = X_3 = a\phi^2/2 + tq\phi + ct$ в (21). Это дает гладкую функцию

$$\tilde{\alpha}(x, t, \phi, \psi) = \alpha(x, t, \phi, \psi)|_{x_3=X_3} = \langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle - \frac{t\lambda c}{k}.$$

Очевидно, функции $A(\alpha(x, t, \phi, \psi), \phi)$ и $A(\tilde{\alpha}(x, t, \psi), \phi)$ совпадают на C_τ , и мы можем использовать последнюю вместо первой в интеграле (22).

2. Теперь, следуя [9], [10], представим функцию $A(\tilde{\alpha}(x, t, \phi, \psi), \phi)$ в виде

$$A = \frac{A(\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle - t\lambda c/k, \phi) + A(-\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle - t\lambda c/k, \phi)}{2} + \langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle \frac{A(\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle - t\lambda c/k, \phi) - A(-\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle - t\lambda c/k, \phi)}{2\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle}.$$

Здесь первое слагаемое и второе слагаемое без множителя $\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle$ суть четные функции от $\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle$ и, следовательно, гладкие функции от $\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle^2$. Таким образом, мы можем заменить в них $\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle^2$ на $x_\perp^2$, не меняя их значения на C_τ .

В результате получим функцию

$$A = \frac{A(|x_{\perp}| - t\lambda c/k, \phi) + A(-|x_{\perp}| - t\lambda c/k, \phi)}{2} + \\ + \langle \mathbf{n}(\psi), x_{\perp} \rangle \frac{A(|x_{\perp}| - t\lambda c/k, \phi) - A(-|x_{\perp}| - t\lambda c/k, \phi)}{2|x_{\perp}|}$$

такую, что $\tilde{A}|_{C_{\tau}} = A|_{C_{\tau}}$. Такое представление позволяет факторизовать интеграл (16) и воспользоваться следующими интегральными представлениями функций Бесселя J_0 и $J_1 = -J'_0$:

$$J_0\left(\frac{\lambda|x_{\perp}|}{h}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(i\lambda/h)\langle x_{\perp}, \mathbf{n}(\psi) \rangle} d\psi, \\ J_1\left(\frac{\lambda|x_{\perp}|}{h}\right) = \frac{1}{2\pi i|x_{\perp}|} \int_0^{2\pi} \langle x_{\perp}, \mathbf{n}(\psi) \rangle e^{(i\lambda/h)\langle x_{\perp}, \mathbf{n}(\psi) \rangle} d\psi.$$

В итоге получаем

$$u = \frac{C}{2h} e^{(i/h)(tc\lambda^2/2k + tq\phi_0^2/2)} \times \\ \times \left[J_0\left(\frac{\lambda\rho}{h}\right) \int_{\mathbb{R}} \left(A\left(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\right) + A\left(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\right) \right) e^{(i/h)(\phi(x_3 - ct) - a\phi^3/6 - tq\phi^2/2)} d\phi + \\ + J_1\left(\frac{\lambda\rho}{h}\right) \int_{\mathbb{R}} \left(A\left(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\right) - A\left(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\right) \right) e^{(i/h)(\phi(x_3 - ct) - a\phi^3/6 - tq\phi^2/2)} d\phi \right], \quad (23)$$

где $\rho = |x_{\perp}|$. Два последних интеграла такие же, как и в (13), если сделать замену $t \rightarrow qt$ и $x \rightarrow x - ct$ (с дополнительной зависимостью от ρ и t как от параметров). Итак, мы можем использовать формулу (15) для упрощения выражения (23).

Положим

$$f_1^+(\rho, t, z) = \frac{1}{4} \left(A\left(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) + A\left(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) + \right. \\ \left. + A\left(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) + A\left(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) \right), \\ f_2^+(\rho, t, z) = \frac{1}{4\sqrt{z}} \left(A\left(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) - A\left(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) + \right. \\ \left. + A\left(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) - A\left(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) \right), \\ f_3^+(\rho, t, z) = \frac{1}{4} \left(A\left(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) + A\left(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) - \right. \\ \left. - A\left(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) - A\left(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) \right), \\ f_4^+(\rho, t, z) = \frac{1}{4\sqrt{z}} \left(A\left(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) - A\left(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) - \right. \\ \left. - A\left(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) + A\left(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\right) \right),$$

и далее

$$\begin{aligned} f_j^-(\rho, t, z) &= 3f_j^+(\rho, t, 0) - 3f_j^+(\rho, t, -z) + f_j^+(\rho, t, -2z), \quad z < 0, \\ f_j(\rho, t, z) &= \begin{cases} f_j^-(\rho, t, z), & z < 0, \\ f_j^+(\rho, t, z), & z > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

и

$$Z(x, t) = \frac{t^2 q^2 + 2a(x - ct)}{a^2}.$$

Используя формулы (23) и (15), получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $A(\alpha, \phi)$ – финитная функция, C_0 – некоторая комплексная константа и

$$\begin{aligned} \Psi(\rho, x_3, t) &= \frac{C_0}{h^{6/5}} e^{(i/h)tc\lambda^2/2k} e^{-it^3/3ha^2} e^{-ixt/ah} \times \\ &\times \left[\text{Ai}\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}}\left(x_3 - ct + \frac{q^2 t^2}{2a}\right)\right) \left(f_1(\rho, t, Z(x_3, t))J_0\left(\frac{\lambda\rho}{h}\right) + \right. \right. \\ &+ f_3(\rho, t, Z(x_3, t))J_1\left(\frac{\lambda\rho}{h}\right) + i\sqrt[3]{h}\sqrt[3]{\frac{2}{a}} \text{Ai}'\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}}\left(x_3 - ct + \frac{q^2 t^2}{2a}\right)\right) \times \\ &\times \left. \left(f_2(\rho, t, Z(x_3, t))J_0\left(\frac{\lambda\rho}{h}\right) + f_4(\rho, t, Z(x_3, t))J_1\left(\frac{\lambda\rho}{h}\right)\right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда существует решение $\tilde{\Psi}(\rho, x_3, t)$ уравнения (2) с ограниченной L_2 -нормой такое, что при $t \in [0, \tilde{t}]$ выполнена оценка

$$\tilde{\Psi}(\rho, x_3, t) - \Psi(\rho, x_3, t) = O(h),$$

где $\tilde{t}$ – не зависящая от h постоянная.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Все коэффициенты в последней формуле – гладкие финитные функции переменных (ρ, x_3) , а функция $\Psi(x, t)$ принадлежит пространству L_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Последняя формула может быть представлена в виде

$$\Psi = \left(a_0(\rho, x_3, t) - iha_1(\rho, x_3, t)\frac{\partial}{\partial x_3} - iha_2(\rho, x_3, t)\frac{\partial}{\partial \rho} + h^2 a_3(\rho, x_3, t)\frac{\partial^2}{\partial \rho \partial x_3} \right) \Psi_0,$$

где Ψ_0 – решение (5), а коэффициенты $a_j(\rho, x_3, t)$ – гладкие функции, финитные относительно x_1, x_2, x_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если амплитуда имеет вид $A(\alpha, \phi) = A_1(\alpha)A_2(\phi)$, то функция Ψ факторизуется и может быть представлена в виде произведения $\Psi_1(x_3, t)\Psi_2(\rho, t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Подчеркнем еще раз, что несмотря на достаточно громоздкое представление функций f_j , их компьютерная реализация не представляет особого труда, и анализ зависимости функций (25) как от переменной t , так и от параметров проводится с помощью программы *Mathematica* [14] очень оперативно, в режиме реального времени (см. рис. 7 и 8). Аналогичный анализ, основанный на вычислении быстроосциллирующих интегралов, занимает существенно больше времени (десятки минут), а оперативное изменение параметров практически невозможно.

Рис. 7. Действие срезающей функции на пучок Эйри-Бесселя по нормали к оси x_3 – “локализация” функции Бесселя по переменной $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (изображена также функция Бесселя) и на плоскости (x_1, x_2) .

Рис. 8. Поведение локализованного пучка Эйри–Бесселя на плоскости (x_1, x_3) . Срезающая функция подобрана таким образом, чтобы в начальный и конечный моменты времени ее носитель не пересекался с “самой сильной” фокальной точкой. На среднем рисунке эта фокальная точка принадлежит носителю срезающей функции, а асимптотика решения резко возрастает в ее окрестности.

5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПУЧКОВ ЭЙРИ–БЕССЕЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ ДИСПЕРСИОННЫХ ПОПРАВКИ

Очень часто оптические пучки описываются уравнением волнового типа с дисперсией

$$g^2 \left(-i \frac{\partial}{\partial t} \right) u + \Delta u = 0, \quad (26)$$

где $g(p_0)$ – нечетная гладкая функция (для простоты будем считать, что она монотонна и ее производная всюду положительна), а оператор $g^2(-i \partial/\partial t)$ понимается как псевдодифференциальный [11]. (Волновое уравнение получается отсюда при $g(p_0) = p_0/c$.)

Если $\mathcal{H}(z)$ – гладкий простой корень уравнения $g(p_0) = z$, то функцию $g^2(p_0) - z^2$ можно представить в виде

$$g^2(p_0) - z^2 = G(p_0, z)(p_0^2 - \mathcal{H}^2(z)),$$

где $G(p_0, z)$ – гладкая функция. Теперь уравнение (26) переписывается в виде

$$G \left(-i \frac{\partial}{\partial t}, -\Delta \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathcal{H}^2(\sqrt{-\Delta}) \right) u = 0.$$

Ясно, что если функция u удовлетворяет псевдодифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathcal{H}^2(\sqrt{-\Delta}) u, \quad (27)$$

то она удовлетворяет и исходному уравнению. Напомним, что функция $\mathcal{H}^2(|p|)$ называется *символом* оператора $\mathcal{H}^2(\sqrt{-\Delta})$. Уравнение (27) можно факторизовать, представив его в виде

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}(\sqrt{-\Delta}) \right) \left(-i \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{H}(\sqrt{-\Delta}) \right) u = 0.$$

Выбирая один из сомножителей (второй рассматривается аналогично), приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 2. Пусть функция u удовлетворяет уравнению,

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{H}(\sqrt{-\Delta}) u, \quad (28)$$

тогда функция u удовлетворяет и исходному уравнению с дисперсией (26).

С физической точки зрения это решение выделяет волны, бегущие в одном из возможных направлений. В дальнейшем мы рассматриваем уравнение (28): оно имеет первый порядок по времени, и изучать его в некотором смысле проще, чем исходное уравнение. Чтобы рассмотреть волны, бегущие в противоположном направлении, нужно поменять знак в уравнении (28).

Зафиксируем некоторое число k и будем искать решение u в виде

$$u = e^{-i\mathcal{H}(k)t + ikx_3} \Psi(x_\perp, x_3 - Vt, t) = 0, \quad V = \mathcal{H}'(k), \quad (29)$$

где $\Psi(x_\perp, x_3, t)$ – новая неизвестная функция. Подстановка этой функции в уравнение (28) дает уравнение

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\mathcal{H}(k) \Psi + i\mathcal{H}'(k) \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} + \mathcal{H} \left(\sqrt{-\Delta_\perp + \left(k - i \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2} \right) \Psi.$$

Введем новые переменные (x', t') по формулам $x = x'/h^2$, $t = t'/h^3$, положим $\hat{p} = -ih \partial / \partial x'$ и перепишем последнее уравнение в виде

$$ih^3 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\mathcal{H}(k) \Psi - h\mathcal{H}'(k) \hat{p}_3 \Psi + \mathcal{H} \left(\sqrt{h^2 \hat{p}_\perp^2 + (k + h\hat{p}_3)^2} \right) \Psi. \quad (30)$$

Далее используются только новые переменные (x', t') , причем штрихи мы, начиная с этого места, опускаем.

Введем теперь функции (главный и субглавный символы)

$$\begin{aligned} H(p) &= \left(\frac{c}{2k} p_\perp^2 + \frac{q}{2} p_3^2 \right), \\ H_1(p, h) &= \frac{1}{h^3} (\mathcal{H}(\sqrt{h^2 p_\perp^2 + (k + hp_3)^2}) - \mathcal{H}(k) \Psi - h\mathcal{H}'(k) p_3 - h^2 H(p)) = \\ &= \frac{1}{6k^2} (-3p_\perp^2 p_3 \mathcal{H}'(k) + 3kp_\perp^2 p_3 \mathcal{H}''(k) + k^2 p_3^3 \mathcal{H}'''(k)) + O(h), \end{aligned} \quad (31)$$

где $c = \mathcal{H}'(k)$, $q = \mathcal{H}''(k)$. Перепишем уравнение (30) в виде уравнения типа уравнения Шредингера с “возмущающим” оператором

$$ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H(\hat{p}) \Psi + hH_1(\hat{p}, h) \Psi. \quad (32)$$

Пусть Φ – некоторое решение уравнения

$$ih \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H(\hat{p}) \Phi,$$

тогда решение уравнения (32) представляется в виде

$$\Psi = e^{-iH_1(\hat{p})t} \Phi. \quad (33)$$

Построим теперь асимптотику функции Ψ . Предположим, что h – малый положительный параметр, и возьмем Φ в виде (16). Тогда мы можем применить формулу коммутации (11) и получить асимптотическое решение в виде

$$\begin{aligned} \Psi &= [K_U^h A_0 e^{-itH_1(P(\alpha, \psi, \phi), h)}](x, h) = \\ &= \frac{C}{2\pi} e^{(i/h)tc\lambda^2/2k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} [e^{(i/h)(\lambda \langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp \rangle + \phi x_3 - a\phi^3/6 - tq\phi^2/2)} \times \\ &\quad \times A(\alpha, \phi) e^{-itH_1(P(\alpha, \psi, \phi), 0)}]_{\alpha=\alpha(x, \psi, \phi)} d\psi d\phi + O(h), \end{aligned}$$

где

$$C = i\lambda e^{-i\pi m/2} e^{-(i/h)a\phi_0^3/3}.$$

Для каждого фиксированного времени t к последнему выражению можно применить теорему 5 и представить его в виде пучка Эйри–Бесселя, если функцию A взять в виде $A = A_0(\alpha, \psi, \phi) e^{itH_1(P(\alpha, \psi, \phi))}$. Полагая $P(\alpha, \psi, \phi) = (P_\perp(\alpha, \psi, \phi), P_3) = (\lambda \mathbf{n}(\psi), \phi)$ и используя формулу (31), находим

$$H_1(P(\alpha, \psi, \phi)) = \frac{1}{6k^2} (-3\lambda^2 \phi \mathcal{H}'(k) + 3k\lambda^2 \phi \mathcal{H}''(k) + k^2 \phi^3 \mathcal{H}'''(k)) + O(h)$$

и

$$\begin{aligned} \Psi = [K_U^h A_0 e^{-itH_1(P(\alpha, \psi, \phi), h)}](x, h) = \frac{C}{2\pi} e^{(i/h)tc\lambda^2/2k} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} [e^{(i/h)(\lambda(\mathbf{n}(\psi), x_\perp) + \phi(x_3 - c't) - a'\phi^3/6 - \phi^2 tq/2)} A(\alpha, \phi)]_{\alpha=\alpha(x, \psi, \phi)} d\psi d\phi + O(h), \end{aligned}$$

где

$$c' = \frac{h\lambda^2}{2k^2} (\mathcal{H}'(k) - k\mathcal{H}''(k)), \quad a' = a - th\mathcal{H}'''(k).$$

Подынтегральное выражение в формуле для функции Ψ совпадает с подынтегральным выражением в формуле (16) с точностью до замены $c \rightarrow c'$, $a \rightarrow a'$. Поэтому мы можем использовать теорему 5, представив функцию Ψ в виде (25) с $c = c'$ и $a = a'$. Наконец, мы должны сделать замены $x \rightarrow xh^3$, $t \rightarrow h^3$ и воспользоваться формулой (29). Эта процедура дает асимптотическое решение уравнения (26).

ПРИЛОЖЕНИЕ

О продолжении функции $f(\sqrt{x})$ при четной функции $f(z)$ на отрицательные значения x

Пусть $f(z) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – четная функция ($f(z) = f(-z)$). Тогда функция $g(x) = f(\sqrt{x})$ бесконечно гладкая при $x \geq 0$. Считая (даже если функция $f(z)$ аналитическая) известными только ее значения при $z \in \mathbb{R}$, рассмотрим задачу о построении гладкой функции $h(x)$, $x \leq 0$, такой, что

$$h^j(0) = g^{(j)}(0), \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (34)$$

Простейшее теоретическое решение, при котором $h(x)$ строится в виде удовлетворяющей условиям (34) линейной комбинации экспонент $e^{\mu_k x}$, где μ_k – корни степени $2n$ из $(-1)^{n+1}$, лежащие в правой полуплоскости, дает продолжение минимальной нормы в $W_2^n(\mathbb{R}_+^1)$ (см. п. 2 в [16]), но неудобно для практических вычислений (если только $f(z)$ не задана аналитическим выражением), так как требует подсчета производных от $g(x)$ в нуле, а они содержат неопределенности типа $0/0$ (например, $g'(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f'(\sqrt{x})(2\sqrt{x})^{-1}$). Выберем попарно различные числа $\lambda_k \leq 0$, $k = 0, \dots, n-1$, и положим

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k g(\lambda_k x), \quad x \leq 0.$$

Тогда из условий (34) для коэффициентов c_k получим систему уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^j c_k = 1, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (35)$$

определитель которой – определитель Вандермонда $\Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq 0$. Находя отсюда коэффициенты c_k , получаем удобное конструктивное выражение для $h(x)$. Например, если взять $\lambda_k = -k$, то, решая уравнение (35), получаем следующие продолжения $h_n(x)$ с согласованием производных до порядка не выше $n-1$:

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k+1} (-1)^k g(-kx), \quad x \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

В частности,

$$\begin{aligned} h_1(x) &= g(0), & h_2(x) &= 2g(0) - g(-x), \\ h_3(x) &= 3g(0) - 3g(-x) + g(-2x), \\ h_4(x) &= 4g(0) - 6g(-x) + 4g(-2x) - g(-3x). \end{aligned} \quad (36)$$

Благодарности. С. Ю. Доброхотов и В. Е. Назайкинский признательны сотрудникам Archimedes Center for Modeling, Analysis and Computation (АСМАС) и Department of Applied Mathematics, University of Crete, за поддержку и гостеприимство. Авторы благодарны А. П. Киселеву за полезные дискуссии. Работа поддержана РФФИ (грант № 14-01-00521_а) и АСМАС, Крит, Греция (грант FP7-REGPDT-2009-1).

Список литературы

- [1] M. Lax, W. H. Louisell, W. B. McKnight, *Phys. Rev. A*, **11**:4 (1975), 1365–1370.
- [2] Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, **43**:261 (1897), 125–132; J. Durnin, *J. Opt. Soc. Amer.*, **4**:4 (1987), 651–654; J. Durnin, J. J. Miceli, J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.*, **58**:15 (1987), 1499–1501; D. McGloin, K. Dholakia, *Contemporary Phys.*, **46**:1 (2005), 15–28; A. P. Kiselev, *Optics and Spectroscopy*, **102**:4 (2007), 603–622; G. A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu, D. N. Christodoulides, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:21 (2007), 213901, 4 pp.; A. Chong, W. H. Renninger, D. N. Christodoulides, F. W. Wise, *Nature Photonics*, **4**:2 (2010), 103–106; K. Dholakia, T. Čižmár, *Nature Photonics*, **5**:6 (2011), 335–342; A. P. Kiselev, A. B. Plachenov, P. Chamorro-Posada, *Phys. Rev. A*, **85**:4 (2012), 043835, 11 pp.; T. Graf, J. Moloney, S. Vankataramani, *Physica D*, **243**:1 (2013), 32–44.
- [3] M. V. Berry, N. L. Balazs, *Amer. J. Phys.*, **47** (1979), 264–267.
- [4] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике. Современные физико-технические проблемы*, Наука, М., 1979.
- [5] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 2000.
- [6] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, МГУ, М., 1965.
- [7] В. П. Маслов, М. В. Федорук, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [8] L. Hörmander, *Acta Math.*, **127**:1 (1971), 79–183.
- [9] С. Ю. Доброхотов, Г. Н. Макракис, В. Е. Назайкинский, Т. Я. Тудоровский, *ТМФ*, **177**:3 (2013), 355–386.

- [10] S. Yu. Dobrokhotov, G. Makrakis, V. E. Nazaikinskii, “Fourier integrals and a new representation of Maslov’s canonical operator near caustics”, *Spectral Theory and Differential Equations*, V. A. Marchenko 90th Anniversary Collection, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, [arXiv: 1307.2292](#) (to appear).
- [11] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.
- [12] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, М., 1977.
- [13] В. Г. Данилов, Ле Бу Ань, *Матем. сб.*, **110(152)**:3(11) (1979), 323–368; V. L. Dubnov, V. P. Maslov, V. E. Nazaikinskii, *Russ. J. Math. Phys.*, **3**:2 (1995), 141–190.
- [14] Wolfram Research, *Mathematica*, www.wolfram.com/mathematica, Champaign, Ill, 2014.
- [15] С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, А. И. Шафаревич, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 792–796.
- [16] Г. А. Калябин, *Тр. МИАН*, **255** (2006), 161–169.

Поступила в редакцию 25.03.2014