Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Хатамов, Неединственность меры Гиббса для шаровой модели Изинга, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 3, 318–328

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8685>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:25:36

© 2014 г.

Н. М. Хатамов*

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ ШАРОВОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА

Изучается новая модель – так называемая шаровая модель Изинга на дереве Кэли порядка $k \geq 2$. Показано, что существует критическая активность $\lambda_{cr} = \sqrt[4]{0.064}$ такая, что при $\lambda \geq \lambda_{cr}$ существует не менее одной трансляционно-инвариантной меры Гиббса, при $0 < \lambda < \lambda_{cr}$ существуют не менее трех трансляционно-инвариантных мер Гиббса, а при некоторых λ можно сказать о существовании пяти трансляционно-инвариантных мер Гиббса и континуума мер Гиббса, не являющихся трансляционно-инвариантными. Для любого нормально-го делителя $\hat{G}$ индекса 2 группового представления на дереве Кэли изучены $\hat{G}$ -периодические меры Гиббса. Доказано, что существует несчетное множество $\hat{G}$ -периодических (не являющихся трансляционно-инвариантными и “шахматно”-периодическими) мер Гиббса.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, шаровая модель Изинга, мера Гиббса.

DOI: 10.4213/tmf8685

1. ВВЕДЕНИЕ

Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ – бесконечное дерево, т. е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер, где V – множество вершин Γ^k , L – его множество ребер. Пусть i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то вершины x и y называются *ближайшими соседями*, и вводится обозначение $\langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такое, что } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Известно, что дерево Кэли представляется как группа G_k , являющаяся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ [1].

Рассмотрим модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1, 1\}$. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$. Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A .

*Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан.
E-mail: nxatamov@mail.ru

Гамильтониан шаровой модели Изинга определяется следующим образом:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\substack{\langle x_0, x_i \rangle, \\ i=1, k+1}} \sigma(x_0)\sigma(x_1)\sigma(x_2)\dots\sigma(x_{k+1}), \quad (1)$$

где $J > 0$.

Обозначим через M множество всех шаров $b(x) = \{y \in V \mid d(x, y) \leq 1\}$ с радиусом 1. Будем называть сужение конфигурации σ на шаре $b \in M$ *ограниченной конфигурацией* σ_b . Тогда определим функцию $U(\sigma_b): \Omega_b \rightarrow \Phi$ следующим образом:

$$U(\sigma_b) = \sigma(x_0)\sigma(x_1)\sigma(x_2)\dots\sigma(x_{k+1}), \quad (2)$$

где Ω_b – пространство конфигураций σ_b , а $x_0, x_i \in V$, такие, что $\langle x_0, x_i \rangle, i = \overline{1, k+1}$.

Таким образом, гамильтониан (1) мы можем записать в следующем виде:

$$H(\sigma) = -J \sum_{b \in M} U(\sigma_b), \quad (3)$$

где $J \in \mathbb{R}$.

Наиболее сложная задача в случае данного гамильтониана – это описание всех отвечающих ему мер Гиббса. Определение меры Гиббса и других понятий, связанных с теорией гиббсовских мер, можно найти, например, в [2]–[4].

2. СИСТЕМА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $x^0 \in V$ – фиксированная точка. Будем писать $x < y$, если путь от x^0 до y проходит через x , и тогда будем говорить, что x и y являются соседями. Вершина y называется потомком x , если $y > x$ и x, y являются соседями. Точка y называется *прямым потомком* точки x , если $y > x$ и x, y являются ближайшими соседями, т. е. $d(x, y) = 1$.

Введем обозначения

$$W_n = \{x \in V \mid d(x^0, x) = n\}, \quad V_n = \{x \in V \mid d(x^0, x) \leq n\}.$$

Для $x \in G_k$ введем обозначение $x_{\downarrow} = \{y \in G_k \mid \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$, где $S(x)$ – множество прямых потомков точки $x \in V$.

Рассмотрим случай $k = 2$. Пусть

$$b(x) = \{x, xa_1, xa_2, xa_3\}, \quad \sigma_{b(x)} = \{\sigma(x), \sigma(xa_1), \sigma(xa_2), \sigma(xa_3)\}.$$

Вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} имеет вид

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x), \sigma_b(x)}^{\sigma_b(x_{\downarrow})} \right\}, \quad (4)$$

где $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$,

$$Z_n = \sum_{\bar{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \exp \left\{ -\beta H(\bar{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x), \bar{\sigma}_b(x)}^{\bar{\sigma}_b(x_{\downarrow})} \right\}$$

и $h_{b, \bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} \in \mathbb{R}$.

Говорят, что вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ для всех $n \geq 1$ согласованно, если

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \quad (5)$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$. В этом случае существует единственная мера μ на Ω_V такая, что

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

Рассмотрим конфигурации

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \{+, +, +, +\}, & \sigma_1 &= \{+, -, +, +\}, \\ \sigma_2 &= \{+, +, -, -\}, & \sigma_3 &= \{+, -, -, -\}, \\ -\sigma_0 &= \{-, -, -, -\}, & -\sigma_1 &= \{-, +, -, -\}, \\ -\sigma_2 &= \{-, -, +, +\}, & -\sigma_3 &= \{-, +, +, +\} \end{aligned}$$

на единичном шаре. Обозначим

$$\begin{aligned} h_{b,\sigma_0}^{\sigma_0} &= h_{b,0}, & h_{b,\sigma_1}^{\sigma_0} &= h_{b,1}, & h_{b,\sigma_2}^{\sigma_0} &= h_{b,2}, & h_{b,-\sigma_1}^{\sigma_1} &= h_{b,3}, \\ h_{b,-\sigma_2}^{\sigma_1} &= h_{b,4}, & h_{b,-\sigma_3}^{\sigma_1} &= h_{b,5}, & h_{b,\sigma_1}^{-\sigma_1} &= h_{b,6}, & h_{b,\sigma_2}^{-\sigma_1} &= h_{b,7}, \\ h_{b,\sigma_3}^{-\sigma_1} &= h_{b,8}, & h_{b,-\sigma_0}^{\sigma_0} &= h_{b,9}, & h_{b,-\sigma_1}^{-\sigma_0} &= h_{b,10}, & h_{b,-\sigma_2}^{-\sigma_0} &= h_{b,11}. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть $k = 2$. Для $a \in M$ через b, c обозначим прямых потомков шара (см. [2]).

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 1 из работы [5]. Эта теорема дает необходимые и достаточные условия на $h_{b,i}$, при которых выполняется соотношение (5).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k = 2$. Вероятностное распределение $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, в (4) согласованно тогда и только тогда, когда для любого $a \in M$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} y_{a,0} &= y_{a,6} = \frac{y_{b,0} + \lambda^2 y_{b,1} + y_{b,2}}{\lambda^2 y_{b,0} + y_{b,1} + \lambda^2 y_{b,2}} \frac{y_{c,0} + \lambda^2 y_{c,1} + y_{c,2}}{\lambda^2 y_{c,0} + y_{c,1} + \lambda^2 y_{c,2}}, \\ y_{a,1} &= y_{a,7} = \frac{y_{b,0} + \lambda^2 y_{b,1} + y_{b,2}}{\lambda^2 y_{b,0} + y_{b,1} + \lambda^2 y_{b,2}} \frac{\lambda^2 y_{c,3} + y_{c,4} + \lambda^2}{\lambda^2 y_{c,0} + y_{c,1} + \lambda^2 y_{c,2}}, \\ y_{a,2} &= y_{a,8} = \frac{\lambda^2 y_{b,3} + y_{b,4} + \lambda^2}{\lambda^2 y_{b,0} + y_{b,1} + \lambda^2 y_{b,2}} \frac{\lambda^2 y_{c,3} + y_{c,4} + \lambda^2}{\lambda^2 y_{c,0} + y_{c,1} + \lambda^2 y_{c,2}}, \\ y_{a,3} &= y_{a,9} = \frac{y_{b,3} + \lambda^2 y_{b,4} + 1}{\lambda^2 y_{b,0} + y_{b,1} + \lambda^2 y_{b,2}} \frac{y_{c,3} + \lambda^2 y_{c,4} + 1}{\lambda^2 y_{c,0} + y_{c,1} + \lambda^2 y_{c,2}}, \\ y_{a,4} &= y_{a,10} = \frac{y_{c,3} + \lambda^2 y_{c,4} + 1}{\lambda^2 y_{c,0} + y_{c,1} + \lambda^2 y_{c,2}}, & y_{a,5} &= 1, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\lambda = e^{J\beta}$, $\beta = 1/T$, $y_{a,i} = e^{h_{a,i} - h_{a,11}}$, $i = \overline{0, 10}$.

3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА

В этом разделе изучаются трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели (3) на дереве Кэли. Заметим, что трансляционно-инвариантные меры Гиббса соответствуют решениям (7) с $y_{a,i} = y_i$ при всех $a \in M$ и $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

В (7) положим $y_{a,i} = y_i \in \mathbb{R}_+$ при всех $a \in M$ и получим

$$\begin{aligned} y_0 &= \left(\frac{y_0 + \lambda^2 y_1 + y_2}{\lambda^2 y_0 + y_1 + \lambda^2 y_2} \right)^2, \\ y_1 &= \left(\frac{y_0 + \lambda^2 y_1 + y_2}{\lambda^2 y_0 + y_1 + \lambda^2 y_2} \right) \left(\frac{\lambda^2 y_3 + y_4 + \lambda^2}{\lambda^2 y_0 + y_1 + \lambda^2 y_2} \right), \\ y_2 &= \left(\frac{\lambda^2 y_3 + y_4 + \lambda^2}{\lambda^2 y_0 + y_1 + \lambda^2 y_2} \right)^2, \\ y_3 &= \left(\frac{y_3 + \lambda^2 y_4 + 1}{\lambda^2 y_0 + y_1 + \lambda^2 y_2} \right)^2, \\ y_4 &= \frac{y_3 + \lambda^2 y_4 + 1}{\lambda^2 y_0 + y_1 + \lambda^2 y_2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\lambda > 0$.

ЛЕММА 1. Систему уравнений (8) можно привести к виду

$$\begin{aligned} f(y, \lambda) &= (\lambda^2(y^2 + \lambda^2 y + 1)^2 - (\lambda^4 - 1)y^2(\lambda^2 y^2 + y + \lambda^2))^2(y^2 + \lambda^2 y + 1)^3 \times \\ &\times [\lambda^2(y^2 + \lambda^2 y + 1)^6 + y(\lambda^2(y^2 + \lambda^2 y + 1)^2 - \\ &- (\lambda^4 - 1)y^2(\lambda^2 y^2 + y + \lambda^2))(\lambda^2 y^2 + y + \lambda^2)(y^2 + \lambda^2 y + 1)^3 + \\ &+ y^2 \lambda^2(\lambda^2 y^2 + y + \lambda^2)^2(\lambda^2(y^2 + \lambda^2 y + 1)^2 - \\ &- (\lambda^4 - 1)y^2(\lambda^2 y^2 + y + \lambda^2))^2]^{-1} - y = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $y = y_4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $y_4 = y$, то $y_3 = y^2$. Из пятого уравнения системы (8) получаем

$$\lambda^2 y_0 + y_1 + \lambda^2 y_2 = \frac{y^2 + \lambda^2 y + 1}{y}. \quad (10)$$

Тогда

$$y_0 + y_2 = \frac{y^2 + \lambda^2 y + 1}{\lambda^2 y} - \frac{y_1}{\lambda^2}. \quad (11)$$

Используя равенства (10) и (11), из второго уравнения системы (8) имеем

$$y_1 = \frac{y(\lambda^2 y^2 + y + \lambda^2)(y^2 + \lambda^2 y + 1)^2}{\lambda^2(y^2 + \lambda^2 y + 1)^2 - (\lambda^4 - 1)y^2(\lambda^2 y^2 + y + \lambda^2)}. \quad (12)$$

Тогда получим

$$y_0 + \lambda^2 y_1 + y_2 = \frac{(y^2 + \lambda^2 y + 1)^3}{y(\lambda^2(y^2 + \lambda^2 y + 1)^2 - (\lambda^4 - 1)y^2(\lambda^2 y^2 + y + \lambda^2))}. \quad (13)$$

Рис. 1. График функции $f(y, \lambda)$ при $\lambda = 0.53$.

Умножая на λ^2 первое и третье уравнения системы (8), сложим первое, второе и третье уравнения из той же системы. Используя полученные выше равенства, получим (9). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Для модели (3) существует $\lambda_{\text{ср}} = \sqrt[4]{0.064}$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_{\text{ср}}$ существует не менее одной трансляционно-инвариантной меры Гиббса, при $0 < \lambda < \lambda_{\text{ср}}$ существуют не менее трех трансляционно-инвариантных мер Гиббса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим свойства функции $f(y, \lambda)$:

- 1) $f(0, \lambda) = \lambda^2 > 0$;
- 2) $f(+\infty, \lambda) = -\infty < 0$.

Тогда ясно, что при любых $\lambda > 0$ существует по крайней мере одно решение уравнения $f(y, \lambda) = 0$.

Можно доказать, что $(\lambda^{-2/3}, \lambda)$ является решением уравнения $f(y, \lambda) = 0$ (см. ниже доказательство теоремы 4). В этой точке рассмотрим значение функции $f'_y(y, \lambda)$, получим

$$f'_y(\lambda^{-2/3}, \lambda) = -\frac{3\lambda^{8/3}(5\lambda^{4/3} - 2)}{(1 - \lambda^{1/3} + \lambda^{2/3})^2(1 + \lambda^{1/3} + \lambda^{2/3})^2(1 - \lambda^{2/3} + \lambda^{4/3})^2}.$$

Если $f'_y(\lambda^{-2/3}, \lambda) > 0$, т. е. $0 < \lambda < \sqrt[4]{0.064}$, то уравнение $f(y, \lambda) = 0$ имеет не менее трех решений. Теорема доказана.

При некоторых $\lambda \in (0, +\infty)$ могут существовать другие трансляционно-инвариантные меры, кроме описанных в теореме 2. Например, рис. 1 демонстрирует существование не менее пяти трансляционно-инвариантных мер Гиббса при $\lambda = 0.53$.

Действительно, численный анализ показывает, что, например, при $\lambda = 0.53$ решениями уравнения $f'_y(y, 0.53) = 0$ являются следующие значения: $y_1 = 0.642531$, $y_2 = 1.10499$, $y_3 = 2.77189$, $y_4 = 5.57841$. Точки $(y_i, 0.53)$, $i = \overline{1, 4}$, являются критическими точками функции $f(y, 0.53)$.

Вычисляя значения функции в этих точках, получим

$$\begin{aligned} f(y_1, 0.53) &= -0.008561695 < 0, \\ f(y_2, 0.53) &= 0.008113591 > 0, \\ f(y_3, 0.53) &= -0.23894615 < 0, \\ f(y_4, 0.53) &= 0.008776144 > 0. \end{aligned}$$

Тогда можно заключить, что при $\lambda = 0.53$ уравнение $f(y, \lambda) = 0$ имеет не менее пяти решений. Анализ показывает, что интервал таких λ есть $(\lambda_{\text{сг}}, 0.54)$.

Применяя методы работ [6], [7], легко доказывается следующая

ТЕОРЕМА 3. *При $0 < \lambda < \lambda_{\text{сг}}$ существует континуум мер Гиббса, не являющихся трансляционно-инвариантными.*

Предположим, что

$$y_{a,0} = y_{a,3}, \quad y_{a,1} = y_{a,4}, \quad y_{a,2} = 1 \quad \forall a \in M. \quad (14)$$

Тогда из (7) следует

$$\begin{aligned} y_{a,0} &= \frac{y_{b,0} + \lambda^2 y_{b,1} + 1}{\lambda^2 y_{b,0} + y_{b,1} + \lambda^2} \frac{y_{c,0} + \lambda^2 y_{c,1} + 1}{\lambda^2 y_{c,0} + y_{c,1} + \lambda^2}, \\ y_{a,1} &= \frac{y_{b,0} + \lambda^2 y_{b,1} + 1}{\lambda^2 y_{b,0} + y_{b,1} + \lambda^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Имеем следующую лемму.

ЛЕММА 2. А. *Пусть $\lambda > 1$. Если $y_a = (y_{a,0}, y_{a,1})$, $a \in M$, является решением системы (15), то $y_i^- \leq y_{a,i} \leq y_i^+$ для любого $i = 0, 1$, $a \in M$, где $(y_0^-, y_0^+, y_1^-, y_1^+)$ – решения системы*

$$\begin{aligned} y_0^- &= \left(\frac{y_0^- + \lambda^2 y_1^+ + 1}{\lambda^2 y_0^- + y_1^+ + \lambda^2} \right)^2, \\ y_0^+ &= \left(\frac{y_0^+ + \lambda^2 y_1^- + 1}{\lambda^2 y_0^+ + y_1^- + \lambda^2} \right)^2, \\ y_1^- &= \frac{y_0^- + \lambda^2 y_1^+ + 1}{\lambda^2 y_0^- + y_1^+ + \lambda^2}, \\ y_1^+ &= \frac{y_0^+ + \lambda^2 y_1^- + 1}{\lambda^2 y_0^+ + y_1^- + \lambda^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Б. *Пусть $\lambda < 1$. Если $y_a = (y_{a,0}, y_{a,1})$, $a \in M$, является решением системы (15), то $y_i^- \leq y_{a,i} \leq y_i^+$ для любого $i = 0, 1$, $a \in M$, где $(y_0^-, y_0^+, y_1^-, y_1^+)$ – решения системы*

$$\begin{aligned} y_0^- &= \left(\frac{y_0^+ + \lambda^2 y_1^- + 1}{\lambda^2 y_0^+ + y_1^- + \lambda^2} \right)^2, \\ y_0^+ &= \left(\frac{y_0^- + \lambda^2 y_1^+ + 1}{\lambda^2 y_0^- + y_1^+ + \lambda^2} \right)^2, \end{aligned}$$

$$y_1^- = \frac{y_0^+ + \lambda^2 y_1^- + 1}{\lambda^2 y_0^+ + y_1^- + \lambda^2},$$

$$y_1^+ = \frac{y_0^- + \lambda^2 y_1^+ + 1}{\lambda^2 y_0^- + y_1^+ + \lambda^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Пусть $\lambda > 1$. Очевидно, что $0 < y_{a,0} < \lambda^4$, $0 < y_{a,1} < \lambda^2$ для любого $a \in M$.

Рассмотрим функцию

$$f(u, v) = \frac{u + \lambda^2 v + 1}{\lambda^2 u + v + \lambda^2},$$

где $0 < u < \lambda^4$, $0 < v < \lambda^2$. Нетрудно видеть, что $(2\lambda^2 + 1)/2\lambda^2 < f(u, v) < \lambda^2$. Таким образом, для $y_{a,i}$ мы получаем

$$\left(\frac{2\lambda^2 + 1}{2\lambda^2}\right)^2 < y_{a,0} < \lambda^2, \quad \frac{2\lambda^2 + 1}{2\lambda^2} < y_{a,1} < \lambda^2.$$

Теперь рассмотрим функцию $f(u, v)$ с условиями

$$\left(\frac{2\lambda^2 + 1}{2\lambda^2}\right)^2 < u < \lambda^4, \quad \frac{2\lambda^2 + 1}{2\lambda^2} < v < \lambda^2.$$

Итерируя эту процедуру, мы получим $y_{i,n}^- \leq y_{a,i} \leq y_{i,n}^+$, $i = 0, 1$, где $y_{i,n}^\pm$, $i = 0, 1$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют равенствам

$$y_{0,n+1}^- = \left(\frac{y_{0,n}^- + \lambda^2 y_{1,n}^+ + 1}{\lambda^2 y_{0,n}^- + y_{1,n}^+ + \lambda^2}\right)^2,$$

$$y_{0,n+1}^+ = \left(\frac{y_{0,n}^+ + \lambda^2 y_{1,n}^- + 1}{\lambda^2 y_{0,n}^+ + y_{1,n}^- + \lambda^2}\right)^2,$$

$$y_{1,n+1}^- = \frac{y_{0,n}^- + \lambda^2 y_{1,n}^+ + 1}{\lambda^2 y_{0,n}^- + y_{1,n}^+ + \lambda^2},$$

$$y_{1,n+1}^+ = \frac{y_{0,n}^+ + \lambda^2 y_{1,n}^- + 1}{\lambda^2 y_{0,n}^+ + y_{1,n}^- + \lambda^2},$$

где $y_{0,1}^- = 0$, $y_{0,1}^+ = \lambda^4$, $y_{1,1}^- = 0$, $y_{1,1}^+ = \lambda^2$. Видно, что $y_{i,n}^-$ ($y_{i,n}^+$), $i = 0, 1$, являются возрастающими (убывающими) и ограниченными последовательностями. Поэтому существуют $\lim_{x \rightarrow \infty} y_{i,n}^\pm = y_i^\pm$, $i = 0, 1$.

Б. Пусть $\lambda < 1$. Очевидно, что $0 < y_{a,0} < 1/\lambda^4$, $0 < y_{a,1} < 1/\lambda^2$ для любого $a \in M$. Рассмотрим функцию

$$f(u, v) = \frac{u + \lambda^2 v + 1}{\lambda^2 u + v + \lambda^2}$$

с условиями $0 < u < 1/\lambda^4$, $0 < v < 1/\lambda^2$. Видно, что $2/(\lambda^2 + 1/\lambda^2) < f(u, v) < 1/\lambda^2$. Следовательно, для $y_{a,i}$ мы получаем

$$\left(\frac{2}{\lambda^2 + 1/\lambda^2}\right)^2 < y_{a,0} < \frac{1}{\lambda^4}, \quad \frac{2}{\lambda^2 + 1/\lambda^2} < y_{a,1} < \frac{1}{\lambda^2}.$$

Теперь рассмотрим функцию $f(u, v)$ с условиями

$$\left(\frac{2}{\lambda^2 + 1/\lambda^2} \right)^2 < u < \frac{1}{\lambda^4}, \quad \frac{2}{\lambda^2 + 1/\lambda^2} < v < \frac{1}{\lambda^2}.$$

Итерируя эту процедуру, мы можем получить $y_{i,n}^- \leq y_{a,i} \leq y_{i,n}^+$, $i = 0, 1$, где $y_{i,n}^\pm$, $i = 0, 1$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} y_{0,n+1}^- &= \left(\frac{y_{0,n}^+ + \lambda^2 y_{1,n}^- + 1}{\lambda^2 y_{0,n}^+ + y_{1,n}^- + \lambda^2} \right)^2, \\ y_{0,n+1}^+ &= \left(\frac{y_{0,n}^- + \lambda^2 y_{1,n}^+ + 1}{\lambda^2 y_{0,n}^- + y_{1,n}^+ + \lambda^2} \right)^2, \\ y_{1,n+1}^- &= \frac{y_{0,n}^+ + \lambda^2 y_{1,n}^- + 1}{\lambda^2 y_{0,n}^+ + y_{1,n}^- + \lambda^2}, \\ y_{1,n+1}^+ &= \frac{y_{0,n}^- + \lambda^2 y_{1,n}^+ + 1}{\lambda^2 y_{0,n}^- + y_{1,n}^+ + \lambda^2}, \end{aligned}$$

где $y_{0,1}^+ = 0$, $y_{0,1}^- = 1/\lambda^4$, $y_{1,1}^+ = 0$, $y_{1,1}^- = 1/\lambda^2$. Отсюда видно, что $y_{i,n}^-$ ($y_{i,n}^+$), $i = 0, 1$, являются возрастающими (убывающими) и ограниченными последовательностями. Поэтому существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{i,n}^\pm$, $i = 0, 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Если $y = (y_0^-, y_0^+, y_1^-, y_1^+)$ – решение системы (16), то $y_0^- = y_0^+$ тогда и только тогда, когда $y_1^- = y_1^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из системы (16) мы имеем

$$\begin{aligned} (y_0^- - y_0^+)(1 + AB y_1^+) + AB(1 + y_0^-)(y_1^- - y_1^+) &= 0, \\ (y_0^- - y_0^+)y_1^+ B + (B + 1 + B y_0^-)(y_1^- - y_1^+) &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{y_0^- + \lambda^2 y_1^+ + 1}{\lambda^2 y_0^- + y_1^+ + \lambda^2} + \frac{y_0^+ + \lambda^2 y_1^- + 1}{\lambda^2 y_0^+ + y_1^- + \lambda^2} > 0, \\ B &= \frac{\lambda^4 - 1}{(\lambda^2 y_0^- + y_1^+ + \lambda^2)(\lambda^2 y_0^+ + y_1^- + \lambda^2)} > 0. \end{aligned}$$

Если $y_0^- = y_0^+$, то из первого уравнения системы (17) имеем $y_1^- = y_1^+$. Если $y_1^- = y_1^+$, то из второго уравнения системы (17) имеем $y_0^- = y_0^+$. Лемма доказана.

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА

В этом разделе при условии (14) изучим периодические меры Гиббса. Запишем систему (15) в следующем виде:

$$\begin{aligned} h_{a,0} &= \ln \left(\frac{e^{h_{b,0}} + \lambda^2 e^{h_{b,1}} + 1}{\lambda^2 e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + \lambda^2} \frac{e^{h_{c,0}} + \lambda^2 e^{h_{c,1}} + 1}{\lambda^2 e^{h_{c,0}} + e^{h_{c,1}} + \lambda^2} \right), \\ h_{a,1} &= \ln \frac{e^{h_{b,0}} + \lambda^2 e^{h_{b,1}} + 1}{\lambda^2 e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + \lambda^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $h_{a,i} = \ln y_{a,i}$, $i = 0, 1$. Исследуем периодические решения системы (18).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть H_0 – подгруппа группы G_k . Совокупность векторов $h = \{h_a = (h_{a,0}, h_{a,1}) \mid a \in G_k\}$ называется H_0 -периодической, если $h_{ya,i} = h_{a,i}$ для любых $a \in G_k$ и $y \in H_0$, $i = 0, 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мера Гиббса, соответствующая H_0 -периодической совокупности векторов, называется H_0 -периодической.

Определим $F: h = (h_0, h_1) \rightarrow F(h) \in \mathbb{R}$ следующим образом:

$$F(h) = \frac{e^{h_0} + \lambda^2 e^{h_1} + 1}{\lambda^2 e^{h_0} + e^{h_1} + \lambda^2}.$$

Пусть $G_k^{(2)}$ – подгруппа группы G_k , состоящая из слов четной длины. Очевидно, что $G_k^{(2)}$ является подгруппой индекса 2.

Пусть

$$h_{a,i} = \begin{cases} h_i, & \text{если } c_a \in G_2^{(2)}, \\ h'_i, & \text{если } c_a \in G_2 \setminus G_2^{(2)}, \end{cases} \quad i = 0, 1,$$

где c_a – центр шара a . Тогда из (18) имеем

$$\begin{aligned} h_0 &= 2 \ln \frac{e^{h'_0} + \lambda^2 e^{h'_1} + 1}{\lambda^2 e^{h'_0} + e^{h'_1} + \lambda^2}, \\ h'_0 &= 2 \ln \frac{e^{h_0} + \lambda^2 e^{h_1} + 1}{\lambda^2 e^{h_0} + e^{h_1} + \lambda^2}, \\ h_1 &= \ln \frac{e^{h'_0} + \lambda^2 e^{h'_1} + 1}{\lambda^2 e^{h'_0} + e^{h'_1} + \lambda^2}, \\ h'_1 &= \ln \frac{e^{h_0} + \lambda^2 e^{h_1} + 1}{\lambda^2 e^{h_0} + e^{h_1} + \lambda^2}. \end{aligned} \tag{19}$$

ТЕОРЕМА 4. Для модели (3) при $\lambda > 0$ и при условиях (14) существует единственная $G_2^{(2)}$ -периодическая мера Гиббса. Более того, эта мера совпадает с трансляционно-инвариантной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $h_0 = h'_0$, $h_1 = h'_1$. Из (19) имеем

$$\begin{aligned} h_0 &= 2 \ln \frac{e^{h_0} + \lambda^2 e^{h_1} + 1}{\lambda^2 e^{h_0} + e^{h_1} + \lambda^2}, \\ h_1 &= \ln \frac{e^{h_0} + \lambda^2 e^{h_1} + 1}{\lambda^2 e^{h_0} + e^{h_1} + \lambda^2}. \end{aligned} \tag{20}$$

Система уравнений (20) имеет единственное решение (h_0^*, h_1^*) . Действительно, из (20) имеем $\lambda^2 e^{3h_1} - 1 = 0$. Пусть $e^{h_1} = z$, тогда $Q(z) = \lambda^2 z^3 - 1 = 0$. Следовательно, уравнение $Q(z) = 0$ имеет единственное положительное решение $z^* = 1/\sqrt[3]{\lambda^2}$, т. е. система (20) имеет единственное решение (h_0^*, h_1^*) , где $h_0^* = 2 \ln(1/\sqrt[3]{\lambda^2})$, $h_1^* = 1/\sqrt[3]{\lambda^2}$.

Теперь рассмотрим случай $h_0 \neq h'_0$, $h_1 \neq h'_1$. Из (19) имеем

$$\begin{aligned} h_1 &= \ln \frac{e^{2h'_1} + \lambda^2 e^{h'_1} + 1}{\lambda^2 e^{2h'_1} + e^{h'_1} + \lambda^2}, \\ h'_1 &= \ln \frac{e^{2h_1} + \lambda^2 e^{h_1} + 1}{\lambda^2 e^{2h_1} + e^{h_1} + \lambda^2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Из (21) получим многочлен (при $z = e^{h_1}$)

$$P(z) = (\lambda^6 + 2\lambda^2)z^5 + 3\lambda^4 z^4 + (2\lambda^6 + \lambda^2)z^3 - (\lambda^4 + 2)z^2 - 3\lambda^2 z - (2\lambda^4 + 1) = 0.$$

Легко получим разложение $P(z) = Q(z) \cdot M(z)$, где $M(z) = (\lambda^4 + 2)z^2 + 3\lambda^2 z + 2\lambda^4 + 1$.

Так как уравнение $Q(z) = 0$ имеет единственное решение и уравнение $M(z) = 0$ не имеет решения, то $P(z) = 0$ имеет единственное решение. Теорема доказана.

Число букв a_i , $i = \overline{1, k+1}$, участвующих в несократимой записи слова x , обозначим через $\omega_x(a_i)$. Пусть $\emptyset \neq A \subseteq N_2 = \{1, 2, 3\}$ и

$$H_A = \left\{ x \in G_2 \mid \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ четно} \right\}.$$

Очевидно, что H_A является подгруппой индекса 2 (см. [8]).

Пусть

$$h_{a,j} = \begin{cases} h_j, & c_a \in H_A, \\ h'_j, & c_a \in G_2 \setminus H_A, \end{cases} \quad j = 0, 1.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} h_0 &= \begin{cases} \ln F(h) + \ln F(h') & \text{или } 2 \ln F(h), & \text{если } |A| = 1, \\ 2 \ln F(h') & \text{или } \ln F(h) + \ln F(h'), & \text{если } |A| = 2; \end{cases} \\ h'_0 &= \begin{cases} \ln F(h) + \ln F(h') & \text{или } 2 \ln F(h'), & \text{если } |A| = 1, \\ 2 \ln F(h) & \text{или } \ln F(h) + \ln F(h'), & \text{если } |A| = 2; \end{cases} \\ h_1 &= \ln F(h) \quad \text{или} \quad \ln F(h'); \\ h'_1 &= \ln F(h') \quad \text{или} \quad \ln F(h). \end{aligned} \quad (22)$$

Случай $|A| = 3$ соответствует случаю $H_A = G_2^{(2)}$, изученному выше.

ТЕОРЕМА 5. Для модели (3) при условии (14) существуют несчетное число H_A -периодических мер Гиббса. Более того, эти меры не являются трансляционно-инвариантными и не являются $G_2^{(2)}$ -периодическими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система (22) имеет решение тогда и только тогда, когда $F(h) = F(h')$. Отсюда получаем

$$t_1(s_0 - t_0) + (t_1 - s_1)(t_0 + 1) = 0,$$

где $t_i = e^{h_i}$, $s_i = e^{h'_i}$, $i = 0, 1$.

В этом уравнении обозначим $s_0 - t_0 = \alpha$. Тогда справедливы равенства $s_0 = t_0 + \alpha$, $s_1 = t_1 + t_1 \alpha / (t_0 + 1)$. Из (22) имеем $t_0 = (1 - t_1^2) / (\lambda^2 t_1 - 1)$ и уравнение $\lambda^2 t_1^3 - 1 = 0$, которое имеет единственное положительное решение $t_1^* = 1 / \sqrt[3]{\lambda^2}$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} t_1 &= t_1^* = \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}, \quad t_0 = t_0^* = \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^4}}, \quad s_0 = s_0^*(\alpha) = t_0^* + \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^4}} + \alpha, \\ s_1 &= s_1^*(\alpha) = t_1^* + \frac{t_1^* \alpha}{t_0^* + 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} + \frac{\alpha \sqrt[3]{\lambda^2}}{\sqrt[3]{\lambda^4} + 1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует решение $(\ln t_0^*, \ln t_1^*, \ln s_0^*(\alpha), \ln s_1^*(\alpha))$ системы (22). Более того, эти решения различны при различных α . Теорема доказана.

Благодарности. Автор глубоко признателен профессору У. А. Розикову за постановку задачи и полезные советы по работе.

Список литературы

- [1] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [2] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, М., Мир, 1992.
- [3] К. Престон, *Гиббсовские состояния на счетных множествах*, Мир, М., 1977.
- [4] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [5] У. А. Розиков, Г. Т. Мадгозиев, *ТМФ*, **167**:2 (2011), 311–322.
- [6] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, *ТВП*, **35**:2 (1990), 220–230.
- [7] У. А. Розиков, *ТМФ*, **118**:1 (1999), 95–104.
- [8] U. A. Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.

Поступила в редакцию 29.03.2014