Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Талалов, Об одной струнной модели “экзотических” частиц, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 2, 233–244

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf869>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:54:46

© 1998 г.

С. В. Талалов*

ОБ ОДНОЙ СТРУННОЙ МОДЕЛИ “ЭКЗОТИЧЕСКИХ” ЧАСТИЦ

В рамках предложенного ранее автором подхода к D4-струнной динамике исследован случай бозонной струны. Построены физические состояния и найден спектр масс. Показано, что линейная зависимость между квадратом массы струны μ^2 и “спином” $\hbar\sqrt{s(s+1)}$ является следствием масштабной инвариантности теории.

Реджевский спектр свободной струны $s = c + \alpha' \mu^2$, где $\alpha' \simeq 0.9 \text{ ГэВ}^{-2}$, как известно, хорошо согласуется с экспериментальными данными об основных семействах резонансов. Между тем адронная спектроскопия располагает информацией о семействах частиц с “экзотической” зависимостью массы от спина, в частности о семействах, траектории Редже которых имеют нестандартные наклоны α'_c [1, 2]. В этой связи, по-видимому, представляет интерес разработка струнных моделей с иным спектром масс [3, 4]. Существующие струнные теории различаются, как правило, выбором лагранжиана, исходной геометрией пространства-времени, а также методами квантования [5, 6]. Гамильтоново описание классической динамики при этом однозначно фиксируется действием.

Вместе с таким подходом существует возможность рассматривать гамильтонов формализм вне его связи с лагранжевой структурой теории, что отмечалось еще Дираком. При этом введенные в теорию тем или иным способом гамильтоновы переменные должны “... быть набором переменных, способным служить начальными данными, — они должны быть независимы друг от друга и достаточны для фиксации состояния движения” [7].

В работах [8, 9] предложен подход к описанию динамики спиновой струны в D4-пространстве-времени, основанный на нестандартном выборе гамильтоновой структуры на поверхности связей. Там же показано, что масса и спин струны связаны соотношением $\alpha_n \mu_n^2 = \sqrt{s(s+1)}$, где константы α_n определяются некоторой спектральной задачей в

*Филиал Самарского государственного педагогического института им. В. В. Куйбышева, Тольятти, Самарская обл., Россия. E-mail: svt@tpi.tlt.ru

пространстве состояний. Такая задача была сформулирована в общем виде, и методы ее решения детально не изучались. В работе [10], в частности, был исследован специальный предельный случай $\alpha' \rightarrow 0$, $\Psi_{\pm} \rightarrow 0^{(1)}$, соответствующий бозонной струне в “низкоэнергетическом” пределе. Отметим, что величины $\Psi_{\pm}$ в предложенном подходе – это сложные функционалы вводимых фундаментальных переменных, так что редукция рассмотренной ранее автором спиновой струны к “бозонному” случаю $\Psi \equiv 0$, $\alpha' \neq 0$ неочевидна.

1. В данной статье мы рассмотрим, используя идеи и методы работ [8, 9], классическую и квантовую динамику открытой струны с действием [5]

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{h} \{h^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X_\mu\}, \quad (1)$$

где двумерные поля $X_\mu = X_\mu(\xi^0, \xi^1)$ являются компонентами радиус-вектора $\mathbf{X} \in E_{1,3}$ относительно некоторого постоянного базиса $\mathbf{t}^\mu$. Параметры ξ^0, ξ^1 на мировом листе выбраны так, что $\xi^0 \in (-\infty, \infty)$, $\xi^1 \in [0, \pi]$. Уравнения $\delta S / \delta h^{ij} = 0$ приводят, как хорошо известно, к равенствам

$$(\partial_{\pm} X(\xi))^2 = 0, \quad (2)$$

где $\partial_{\pm}$ – производные по конусным координатам $\xi_{\pm} = \xi^1 \pm \xi^0$. Для устранения из теории конформного произвола

$$\xi_{\pm} \rightarrow \tilde{\xi}_{\pm} = \pm A(\pm \xi_{\pm}), \quad A(\xi + 2\pi) = A(\xi) + 2\pi,$$

необходимо выбрать калибровочные условия. Поэтому далее мы будем рассматривать только такие струнные конфигурации (мировые листы) $\{X_\mu(\xi^0, \xi^1)\}$, для которых существует светоподобный вектор $\mathbf{n}_\mu = \mathbf{n}_\mu[X]$, $\partial_{\pm} \mathbf{n}_\mu = 0$ такой, что выполнены равенства

$$\mathbf{n}^\mu[X] \partial_{\pm} X_\mu(\xi) = \pm \frac{p_+}{2}. \quad (3)$$

Здесь p_+ – некоторая фиксированная константа, имеющая размерность длины. Заметим, что если мы сделаем дополнительную редукцию, потребовав, чтобы $\mathbf{n}_\mu[X] = \mathbf{n}_{+\mu} = (1, 0, 0, 1)$, то получим стандартную калибровку светового конуса для бозонной струны, которая, как известно, нарушает явную релятивистскую инвариантность теории. Рассматриваемый нами “слабый” вариант светоподобной калибровки совместим как с релятивистской, так и с масштабной инвариантностью в пространстве $E_{1,3}$. Действительно, пусть заданы произвольные матрица Лоренца Λ и константа $\rho > 0$. Тогда, если мировой лист $\{X(\xi^0, \xi^1)\}$ удовлетворяет условию (3) для некоторого светоподобного вектора $\mathbf{n}$, то мировой лист $\{\rho \Lambda X(\xi^0, \xi^1)\}$ удовлетворяет этому же условию и для светоподобного вектора $\rho^{-1} \Lambda^{-1} \mathbf{n}$.

¹⁾ $\Psi_{\pm}$ – спиноры на мировом листе.

Исходное конфигурационное пространство спиновой струны, рассмотренной в работах [9, 10], параметризовалось переменными $X_\mu(\xi^1)$, $\Psi_\pm(\xi^1)$, κ . Дополнительная переменная κ , имеющая размерность длины, была введена в теорию как коэффициент перед спинорной частью действия. Это возможно, поскольку, во-первых, спинорная часть действия обращается на уравнения движения в нуль и, во-вторых, в рассмотренной теории нет каких-либо преобразований суперсимметрии. Отметим, что введение такой переменной позволяет, в частности, сделать классическую теорию масштабно-инвариантной: при преобразованиях $X \rightarrow \rho X$, $\Psi \rightarrow \rho^{1/2} \Psi$, $\kappa \rightarrow \rho \kappa$ действие приобретает лишь нормировочный множитель. При построении гамильтоновой динамики на основе стандартных скобок Пуассона имеем, что $p_\kappa = 0$ для импульса p_κ , канонически-сопряженного переменной κ . В этом случае можно положить $\kappa = l$, где l – фиксированная константа. Однако последнее равенство не является, вообще говоря, тривиальной связью для какого-либо нестандартного выбора пуассоновой структуры теории. Из сказанного следует, что корректная редукция $\Psi_\pm \equiv 0$ требует в случае применения методов [8, 9] рассмотрения исходного конфигурационного пространства с координатами $X_\mu(\xi^1)$, κ , несмотря на то что переменная κ является для действия (1) циклической и ее введение выглядит здесь формальной процедурой. Заметим, что наличие в теории фиксированной константы p_+ не противоречит масштабной инвариантности теории в пространстве Минковского. Переход к размерным параметрам $\xi_\pm \rightarrow p_+ \xi_\pm$ устраняет, очевидно, константу p_+ из правых частей равенств (3), так что данная константа фиксирует масштаб плоскости (ξ^0, ξ^1) , а не “изотопического” пространства $E_{1,3}$.

Введем параметризацию допустимых струнных конфигураций, обладающую следующими свойствами: соответствующие переменные разделяются на “внутренние”, которые инвариантны относительно масштабных преобразований и преобразований Пуанкаре пространства $E_{1,3}$, и “внешние”, преобразующиеся как тензоры при преобразованиях Лоренца и инвариантны относительно масштабных преобразований плоскости (ξ^0, ξ^1) . Отметим, что идея отделения внутренних степеней свободы от внешних предлагалась для другой модели ранее в работе [11].

Пусть $\mathbf{n}_\mu$ – светоподобный вектор, обеспечивающий выполнение условий (3) для какого-либо мирового листа $\{\mathbf{X}(\xi^0, \xi^1)\}$. Выберем некоторый базис $\mathbf{e}_\mu \in E_{1,3}$ такой, что $\mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu = g_{\mu\nu}$ и $(\mathbf{e}_0)^\mu + (\mathbf{e}_3)^\mu = (\kappa/p_+) \mathbf{n}^\mu$. Определим далее поперечную моду $f(\xi)$ разложением

$$\begin{aligned} \pm \frac{2}{\kappa} \partial_\pm X^\mu(\xi_\pm) \mathbf{t}_\mu = & \left(1 + \frac{4\pi\alpha'}{p_+^2} |f(\pm\xi_\pm)|^2 \right) \mathbf{e}_0 - 2 \frac{\sqrt{4\pi\alpha'}}{p_+} \operatorname{Re} f(\pm\xi_\pm) \mathbf{e}_1 + \\ & + 2 \frac{\sqrt{4\pi\alpha'}}{p_+} \operatorname{Im} f(\pm\xi_\pm) \mathbf{e}_2 - \left(1 - \frac{4\pi\alpha'}{p_+^2} |f(\pm\xi_\pm)|^2 \right) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Равенства (2), (3) и граничные условия $X'(0) = X'(\pi) = 0$ выполнены тождественно для произвольной комплексной 2π -периодической функции $f(\xi)$. Исследуем неоднозначность в ее определении. Пусть $\Lambda_n(a, c)$ – некоторая матрица Лоренца из стационарной

подгруппы $L(n)$ вектора $\mathbf{n}_\mu$. Символом $()^\#$ мы будем обозначать локальное отображение $L_+^\uparrow \rightarrow SL(2, C)$. Поскольку

$$\Lambda_n^\#(a, c) = \begin{pmatrix} e^{ia} & c \\ 0 & e^{-ia} \end{pmatrix}, \quad a \in [0, 2\pi), \quad c - \text{комплексное число},$$

поперечная мода $f(\xi)$ содержит в своем определении произвол

$$f(\xi) \rightarrow \tilde{f}(\xi) = e^{-ia} f(\xi) + c, \quad (5)$$

который может быть фиксирован какими-либо тремя условиями. Очевидно, что в силу разложения (4) глобальные преобразования Лоренца $\mathbf{X} \rightarrow \Lambda \mathbf{X}$ можно рассматривать как преобразования базиса $\mathbf{e}_\mu$, считая поперечную моду скаляром. В этом случае для параметризации “проективных” векторов $\partial_\pm X_\mu / \kappa$ нам необходимо добавить в теорию шесть параметров $q_1, \dots, q_6$, задающих положение базиса $\mathbf{e}_\mu$ относительно базиса $\mathbf{t}_\mu$. Подчеркнем, что подобной возможности мы лишены при $\mathbf{n}_\mu[X] = \mathbf{n}_{+\mu}$, поскольку в этом случае согласно (4) допустимыми преобразованиями Лоренца являются преобразования $\Lambda_{n_+}(a, c)$. Что касается произвола (5), то его удобно фиксировать лишь частично, потребовав, чтобы

$$\int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi = 0. \quad (6)$$

Оставшийся произвол в фазовом множителе оказывается вполне естественным при квантовании теории. Таким образом, построено отображение

$$\{\partial_\pm X_\mu(\xi_\pm) / \kappa\} \xleftrightarrow{p_+} (f(\xi); q_1, \dots, q_6) / \{\Lambda_n(a, 0)\}.$$

Полученная поперечная мода инвариантна относительно дилатаций пространства $E_{1,3}$ (дополненных, как отмечалось, соответствующими дилатациями переменной κ). Это не противоречит тому, что функция f размерная, т.к. в силу определения ее масштаб фиксирован выбором константы p_+ .

Для восстановления мирового листа $\{X_\mu(\xi^0, \xi^1)\}$ переменных $f(\xi)$, $q_1, \dots, q_6$ недостаточно. Мы должны добавить еще некоторый вектор Z_μ , компоненты которого имеют смысл констант интегрирования $\partial_\pm X_\mu \rightarrow X_\mu$. Определим множество (Z_μ, q_i) . В дальнейшем нам будет удобно представлять 4-векторы в матричной форме: $\widehat{X} = X^\mu \sigma_\mu$. Как следствие разложения (4) мы можем записать, что

$$\partial_\pm \widehat{X}(\xi_\pm) = \pm \frac{1}{2} T^\dagger(\pm \xi_\pm) (1 + \sigma_3) T(\pm \xi_\pm), \quad (7)$$

где матрица $T = \sqrt{\kappa} T_0 B$, матрица

$$T_0(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{4\pi\alpha'}}{p_+} f(\xi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а постоянная матрица $B \in SL(2, C)$ определяется как $B = (\Lambda_\nu^\mu)^\#$ по матрице Лоренца Λ , связывающей базисы $\mathbf{e}_\mu$ и $\mathbf{t}_\mu$.

В соответствии с результатами работы [9] имеем следующие формулы для нетеровских инвариантов P_μ и $M_{\mu\nu}$:

$$\widehat{P} = \frac{1}{8\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} T^\dagger(\xi)(1 + \sigma_3)T(\xi) d\xi, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \widehat{M} &= \widehat{Z} \otimes \widehat{P} - \widehat{P} \otimes \widehat{Z} + \\ &+ \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} (T^\dagger(\xi) \otimes T^\dagger(\eta)) W(\xi, \eta) (T(\xi) \otimes T(\eta)) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$W(x, y) = \frac{1}{4} \left(\frac{x-y}{4\pi} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left[\frac{x-y}{4\pi} \right] \right) (1 + \sigma_3) \otimes (1 + \sigma_3).$$

Пусть $S_\mu = -(\sqrt{P_\omega P^\omega}/2) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\nu\lambda} P^\sigma$ – вектор Любаньского–Паули. Введем величины $S_{(0)\mu}$, $P_{(0)}^\mu$ и $M_{(0)}^{\mu\nu}$. По определению они строятся по формулам (8), (9), как и соответствующие тензоры без индекса (0), но с заменой $T(\xi) \rightarrow T_0(\xi)$ и $Z = 0$. Необходимо подчеркнуть, что все величины с индексом (0) зависят только от поперечной моды $f(\xi)$. Легко проверить справедливость “масштабного” равенства

$$(P_\mu P^\mu)^2 (S_{(0)\nu} S_{(0)}^\nu) - (S_\rho S^\rho) (P_{(0)\tau} P_{(0)}^\tau)^2 = 0. \quad (10)$$

Аналогично работе [8] доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть даны произвольные вектор P_μ такой, что $(P)^2 \geq 0$, и антисимметричный тензор $M_{\mu\nu}$. Предположим, что их компоненты связаны равенством (10), где величины $P_{(0)\mu}$ и $S_{(0)\mu}$ построены по некоторой комплексной 2π -периодической функции $f(\xi)$, удовлетворяющей условию (6), так, как сказано выше. Тогда существуют матрица $B \in SL(2, C)$, константа $\kappa > 0$ и вектор Z_μ такие, что

$$\begin{aligned} \widehat{P} &= \kappa B^\dagger \widehat{P}_{(0)} B, \\ \widehat{M} &= \widehat{Z} \otimes \widehat{P} - \widehat{P} \otimes \widehat{Z} + \kappa^2 (B^\dagger \otimes B^\dagger) \widehat{M}_{(0)} (B \otimes B). \end{aligned}$$

Произвол в определении матрицы B задается некоторой группой $U \approx U(1)$, а вектора Z_μ – группой T_p сдвигов $Z_\mu \rightarrow Z_\mu + aP_\mu$. Пусть $G_2 = U \times T_p$. Таким образом, мы имеем взаимно однозначное соответствие

$$\{X_\mu(\xi^0, \xi^1); \kappa\}/G_2 \xleftrightarrow{p+} (f(\xi); P_\mu, M_{\mu\nu}). \quad (11)$$

По построению ξ^0 -динамика струны $X_\mu(\xi^1)$, где $\xi^1 \in [0, \pi]$, – это сдвиг аргумента у функции $f(\xi)$, которая, напомним, определена с точностью до фазового множителя.

Установленное соответствие позволяет параметризовать множество классов смежности $\{X_\mu(\xi^0, \xi^1); \kappa\}/G_2$ новыми переменными $f(\xi)$, P_μ и $M_{\mu\nu}$, для которых мы постулируем следующие скобки Пуассона:

$$\{f(\xi), \bar{f}(\zeta)\} = \delta'(\xi - \zeta), \quad \{M_{\alpha\beta}, P_\gamma\} = g_{\beta\gamma}P_\alpha - g_{\alpha\gamma}P_\beta, \quad (12)$$

$$\{M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}\} = g_{\alpha\delta}M_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma}. \quad (13)$$

Остальные возможные скобки равны нулю. Отметим, что в стандартном случае, когда $\mathbf{n}_\mu[X] = \mathbf{n}_{+\mu}$, скобки (12) и (13) могут быть выведены как скобки Дирака для обычной пуассоновой структуры $\{X_\mu, \partial_0 X_\nu\} \propto g_{\mu\nu}\delta(\xi - \eta)$ и связей (2) и (3). Однако в этом случае переменные $f(\xi)$, P_μ и $M_{\mu\nu}$ не являются независимыми. Симплектические листья выбранной пуассоновой структуры, вообще говоря, параметризуются тремя аннуляторами – величинами $P_\mu P^\mu$, $S_\mu S^\mu$ и $\int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi$. Как обсуждалось выше (см. (6)), последний интеграл всегда можно считать равным нулю.

Мы можем восстановить скобки на всем множестве допустимых мировых листов $\{X_\mu(\xi^0, \xi^1)\}$, добавив к введенным выше координатам на соответствующих смежных классах координаты на группе G_2 и сопряженные к ним. Заметим, что равенство (10) должно рассматриваться нами далее как (единственная) гамильтонова связь, которая в соответствии с общими методами после квантования примет вид уравнения, определяющего спектр и допустимые состояния теории [7]. Поскольку формула (10) не содержит координат на группе G_2 , мы не будем здесь выполнять указанную реконструкцию (см. [9]).

Явная форма связи (10) во введенном фазовом пространстве $\mathcal{H}_1$ с координатами $f(\xi)$, P_μ и $M_{\mu\nu}$ имеет вид

$$- (\alpha' P_\nu P^\nu)^2 \left\{ \left(\int_0^{2\pi} |f(\xi)|^2 d\xi \right) \left(i \int_0^{2\pi} \bar{f}(\xi) \int^\xi f(\zeta) d\zeta d\xi \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\pi \left| \int_0^{2\pi} |f(\xi)|^2 \int^\xi f(\zeta) d\zeta d\xi \right|^2 \right\} = S_\mu S^\mu \left(\int_0^{2\pi} |f(\xi)|^2 d\xi \right)^3,$$

где первообразная $\int^\xi f(\xi) d\xi \equiv \mathcal{F}(\xi)$ выбрана так, что выполнено условие

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(\xi) d\xi = 0.$$

Данная связь определяет некоторую поверхность $\mathcal{S} \in \mathcal{H}_1$, тогда

$$\mathcal{S} = \bigcup_{r \geq 0} \mathcal{S}_r,$$

где символами $\mathcal{S}_r$ обозначены множества переменных, удовлетворяющих при заданном вещественном числе r условиям

$$\int_0^{2\pi} |f(\xi)|^2 d\xi - 2\pi r = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha'}{2\pi} P_\nu P^\nu \right)^2 \left\{ r \left(i \int_0^{2\pi} \bar{f}(\xi) \int^\xi f(\zeta) d\zeta d\xi \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left| \int_0^{2\pi} |f(\xi)|^2 \int^\xi f(\zeta) d\zeta d\xi \right|^2 \right\} + S_\mu S^\mu r^3 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Такая форма записи связи (10) более удобна при квантовании.

Заметим, что величина

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi)|^2 d\xi$$

имеет смысл гамильтониана динамической системы (1) на поверхности связей (2) и (3), записанного в новых переменных. Поскольку при всяком $r \geq 0$ скобки левых частей (14) и (15) обращаются в нуль (в сильном смысле), то такое представление поверхности $\mathcal{S}$ корректно.

2. Рассмотрим квантовый вариант предложенной модели. Пусть b_n^+, b_n ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) – операторы рождения и уничтожения, действующие в пространстве Фока $\mathfrak{G}_0$ и удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям $[b_n, b_m^+] = \delta_{mn}$, а $\{\mu_i^2(s)\}$ – некоторая последовательность неотрицательных чисел, где $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$, $i = 0, 1, \dots, \infty$. Квантовые состояния струны по определению являются векторами пространства

$$\mathfrak{G} = \bigoplus_{i,s} (\mathfrak{G}_0 \otimes \mathfrak{G}_{\mu_i^2(s),s}),$$

где $\mathfrak{G}_{\mu^2,s}$ – пространства неприводимых представлений алгебры Пуанкаре $\mathcal{P}$, отвечающие собственным значениям μ^2 и s соответствующих операторов Казимира $P^\mu P_\mu$ и

$S^\nu S_\nu$ [12]. В дальнейшем будет доказано, что существует последовательность $\mu_i^2(s)$ такая, что допустимые условиями связей векторы состояния имеют ненулевую конечную норму.

Пусть далее $A = A[f(\xi); P_\mu, M_{\mu\nu}]$ – некоторая динамическая переменная. Квантование Υ рассматриваемой теории – это отображение

$$A \rightarrow \Upsilon(A) \equiv A[\sqrt{\hbar}F(\xi); P_\mu, M_{\mu\nu}],$$

где введена функция

$$F(\xi) = \sum_{n>0} \sqrt{n} (b_{-n} e^{-in\xi} + b_n^+ e^{in\xi})$$

такая, что $[F(\xi), F^+(\eta)] = i\delta'(\xi - \eta)$, а символами P_μ и $M_{\mu\nu}$ здесь обозначены соответствующие операторы, действующие в пространствах $\mathfrak{G}_{\mu^2, s}$ (в дальнейшем будем считать, что $\hbar = 1$). Правила построения функций от операторов таковы:

- 1) произведения $F(\xi) \dots F^+(\eta)$ определены как : $F(\xi) \dots F^+(\eta) ::$
- 2) все операторы P_μ расположены слева от операторов $M_{\mu\nu}$;
- 3) произведения $M_{\mu_1\nu_1} M_{\mu_2\nu_2} \dots$ упорядочены в соответствии с правилом $\mu_i < \nu_i$, $\mu_1 \leq \mu_2 \dots \leq \mu_n$.

Таким образом, все наблюдаемые в теории определены как операторы в пространстве $\mathfrak{G}$ (при этом оператор b_n понимается как $\bigoplus_{i,s} (b_n \otimes 1)$ и т.д.).

Введем обозначения

$$\begin{aligned} H_0 &= \Upsilon \left(\frac{1}{2\pi} \int |f(\xi)|^2 d\xi \right) = \sum_n |n| b_n^+ b_n, \\ A_1 &= \Upsilon \left(\frac{i}{2\pi} \int \bar{f}(\xi) \int^\xi f(\eta) d\eta d\xi \right) = \sum_{n \neq 0} \text{sgn}(n) b_n^+ b_n, \\ A_2^2 &= \Upsilon \left(\frac{1}{4\pi^2} \left| \int |f(\xi)|^2 \int^\xi f(\eta) d\eta d\xi \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Отметив отсутствие аномальных членов в коммутаторах левых частей квантовых формул (14) и (15), запишем уравнения, определяющие допустимые (“физические”) векторы $|\psi_{\text{phys}}\rangle$,

$$(H_0 - r) |\psi_{\text{phys}}\rangle = 0, \quad (16)$$

$$[(\alpha' P_\nu P^\nu)^2 (r A_1^2 + A_2^2) + S_\mu S^\mu r^3] |\psi_{\text{phys}}\rangle = 0. \quad (17)$$

ТЕОРЕМА 2. *В соответствии с определением пространства $\mathfrak{G}$ существует такой выбор последовательности $\{\mu_i^2(s)\}$, что система уравнений (16), (17) имеет ненулевые решения с конечной нормой.*

Действительно, выбранная структура пространства состояний позволяет искать частные решения системы (16), (17) в виде

$$|\psi_{\text{phys}}\rangle = |\mu_\phi^2, s\rangle |\phi\rangle,$$

где $|\mu_\phi^2, s\rangle \in \mathfrak{G}_{\mu^2, s}$, $|\phi\rangle \in \mathfrak{G}_0$ и, возможно, $\mu^2 = \mu^2(|\phi\rangle)$. Такое представление для $|\psi_{\text{phys}}\rangle$ приводит к следующим спектральным задачам в пространстве $\mathfrak{G}_0$:

$$(H_0 - r) |\phi\rangle = 0, \quad (18)$$

$$[(rA_1^2 + A_2^2) - \lambda r^3] |\phi\rangle = 0, \quad (19)$$

где константа

$$\lambda = \frac{s(s+1)}{(\alpha'\mu^2)^2}$$

имеет при $r \neq 0$ смысл спектрального параметра. Собственные значения r_N спектральной задачи (18) являются целыми: $r_N = N$ ($N = 0, 1, 2, \dots$). Соответствующие собственные подпространства $\mathfrak{G}_N$ образованы векторами

$$|l_1, \dots, l_m\rangle = \prod_{i=1}^m b_{l_i}^+ |0\rangle, \quad m = 1, \dots, N,$$

такими, что

$$\sum_{i=1}^m |l_i| = N.$$

Справедливо разложение

$$\mathfrak{G}_0 = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathfrak{G}_N, \quad \text{где} \quad \mathfrak{G}_0 = \{c|0\rangle\},$$

а также включения

$$A_1 \mathfrak{G}_N \subset \mathfrak{G}_N, \quad A_2^2 \mathfrak{G}_N \subset \mathfrak{G}_N.$$

Это позволяет нам искать собственные векторы $|\phi_\lambda\rangle$ задачи (19) как $|\phi_\lambda\rangle = |\phi_{N,\lambda}\rangle \in \mathfrak{G}_N$. Поскольку размерность d_N каждого пространства $\mathfrak{G}_N$ конечна, спектральная задача (19) сводится к серии матричных задач порядка d_N , $N = 1, 2, \dots$

Пусть векторы $\{|N, l\rangle; l = 0, 1, \dots, d_N\}$ являются векторами введенного выше базиса $|l_1, \dots, l_m\rangle$ пространства $\mathfrak{G}_N$, пронумерованными некоторым образом. Тогда для любого $N = 1, 2, \dots$ спектральные числа $\lambda = \lambda_l(N)$ – это корни алгебраических уравнений

$$\det \left[\langle l', N | A_1^2 | N, l \rangle + \frac{1}{N} \langle l', N | A_2^2 | N, l \rangle - \lambda N^2 \delta_{ll'} \right] = 0. \quad (20)$$

Как видно из (19), спектральные числа λ неотрицательны, так что $\mu^4 > 0$.

Пусть $\mu_0^2(s)$, $s = 0, 1/2, 1, \dots$, – произвольная последовательность неотрицательных чисел, а последовательность $\mu_n^2(s)$, $n = 1, \dots, \infty$ (“спектр возбуждений”), определена формулой

$$\alpha' \mu_n^2(s) = \sqrt{\frac{s(s+1)}{\lambda_{(n)}}}, \quad s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots,$$

где $\lambda_{(n)}$ – (дискретное) спектральное множество задачи (19) с выбранной тем или иным способом натуральной нумерацией (n). Таким образом, требуемая для построения полного пространства состояний струны $\mathfrak{G}$ последовательность $\mu_i^2(s)$ указана.

Физические векторы состояния имеют вид

$$|\psi_{\text{phys}}\rangle = \sum_{n,s} c_{n,s} |\mu_n^2(s), s\rangle |\phi_{(n)}\rangle,$$

где $|\phi_0\rangle = |0\rangle$, $|\phi_{(n)}\rangle$, $n = 1, \dots, \infty$, – собственный вектор спектральной задачи (19), отвечающий собственному значению $\lambda_{(n)}$, а произвольные постоянные $c_{n,s}$ удовлетворяют условию $\sum_{n,s} |c_{n,s}|^2 < \infty$. Введенные величины $\mu_0^2(s)$ имеют смысл масс струны спина s в том случае, если все ее внутренние степени свободы “заморожены”. Такая струна подобна свободной бесструктурной релятивистской частице, масса которой может принимать, вообще говоря, любые значения. Воспользуемся принципом соответствия для определения чисел $\mu_0^2(s)$ в рассматриваемой модели. В классической теории все внутренние степени свободы подавлены, если $f(\xi) \equiv 0$. Как легко показать при помощи разложения (4), мировой лист при этом вырождается в светоподобный луч

$$\mathbf{X}(\xi^0, \xi^1) = \mathbf{Z} + \kappa(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_3)\xi^0,$$

так что при любом s по определению положим $\mu_0^2(s) = 0$.

3. По-видимому, предложенная модель может быть рассмотрена в качестве некоторого обобщенного вигнеровского подхода к (элементарной) квантовой частице как к объекту, описываемому (неприводимым) представлением алгебры Пуанкаре $\mathcal{P}$. В рассматриваемой теории квантовая струна описывается представлением пуассоновой алгебры $\mathcal{W}_\infty \otimes \mathcal{P}$, где $\mathcal{W}_\infty$ – алгебра Гейзенберга–Вейля с релятивистски-инвариантным

базисом. Таким образом, струна естественно интерпретируется как релятивистская частица с бесконечным, вообще говоря, числом внутренних степеней свободы, возбуждение которых приводит к возникновению ненулевой массы.

Построенные в настоящей работе внутренние переменные $f(\xi)$ параметризуют множество смежных классов $\{X_\mu(\xi^0, \xi^1); \kappa\}/\{P \otimes D\}$, где P – группа Пуанкаре, а D – группа дилатаций. Такое многообразие, вероятно, может быть интерпретировано как некоторое двумерное внутреннее пространство-время микрочастицы. Его масштаб задается константой p_+ и не связан с выбором масштаба в пространстве $E_{1,3}$, который определяется не зависящей от времени динамической переменной κ . В этом случае предложенный подход согласуется с представлением о том, что на расстояниях порядка планковских геометрия пространства-времени не является простой редукцией геометрии больших расстояний [13]. Отличие найденного спектра масс от стандартного спектра бозонной струны связано именно с этим свойством теории. Действительно, несложно выписать классическое выражение для “масштабной” переменной κ в терминах введенных фазовых координат $f(\xi)$, P_μ :

$$\kappa^2 = 2\alpha' p_+^2 \frac{P_\mu P^\mu}{\mathcal{H}_0},$$

где величина

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2\pi} \int |f|^2 d\xi$$

является, как отмечалось, гамильтонианом рассматриваемой динамической системы на поверхности связей. Квантовый спектр $\mathcal{H}_0$ – это множество натуральных чисел, так что наложение условия $\kappa = p_+$, делающего указанные масштабные преобразования зависимыми, приводит после соответствующего выбора схемы квантования к стандартному эквидистантному спектру струны.

В предложенном выше подходе показано, что наклоны $\alpha_n = \alpha' \sqrt{\lambda_n}$ зависят от собственных значений определенной спектральной задачи. Таким образом, с каждой траекторией Редже связывается определенное внутреннее квантовое состояние – соответствующий собственный вектор²⁾ $|\phi_{(n)}\rangle$. Рассмотренная выше теория показывает, что данные состояния естественно нумеруются натуральным числом N (“собственной энергией” поперечной моды f) и индексом $j = 1, \dots, d_N$ (номером собственного вектора задачи (19) в пространстве $\mathfrak{G}_N$). Здесь мы имеем аналогию с реальной ситуацией: все резонансы, лежащие на одной траектории, характеризуются числом N образующих их кварков. Заметим, что при стандартном рассмотрении (см., например, [6]) траектории Редже проводятся чисто формально после нанесения найденного спектра масс на плоскость (s, μ^2) . Что касается интерсепта s_0 , то в рассмотренной модели он одинаков для

²⁾ Интересно, что вектору $|0\rangle$ соответствует семейство безмассовых частиц произвольного спина.

всех асимптотических пределов: $s_0 = -1/2$. По-видимому, тот или иной способ нарушения масштабной инвариантности предложенной теории приведет к появлению траекторий, обладающих различными значениями s_0 . В этой связи напомним, что исключительная роль точки $l = -1/2$ в комплексной плоскости углового момента была давно открыта в одной из реалистических моделей потенциального рассеяния [14].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 96-01-00299.

Список литературы

- [1] *K. Igi*. Phys. Rev. D. 1977. V. 16. № 1. P. 196.
- [2] *Л. Г. Ландсберг*. УФН. 1994. Т. 164. № 11. С. 1129.
- [3] *B. M. Barbashov*. Classical dynamics of rotating string with massive ends: the Regge trajectories and quark masses. In: Strong Interactions at Long Distances. Ed. L. L. Jenkovszky. Palm Harbor: Hadronic Press, 1995. P. 257.
- [4] *Л. Д. Соловьев*. ТМФ. 1996. Т. 106. № 2. С. 209.
- [5] *М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен*. Теория суперструн. Т. 1. М.: Мир, 1990.
- [6] *Л. Бринк, М. Энно*. Принципы теории струн. М.: Мир, 1991.
- [7] *P. A. M. Dirac*. Can. J. Math. 1950. V. 2. № 2. P. 129; 1951. V. 3. № 1. P. 1; *П. А. М. Дирак*. К созданию квантовой теории поля. М.: Наука, 1990.
- [8] *S. V. Talalov*. J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 2443.
- [9] *С. В. Талалов*. ТМФ. 1996. Т. 106. № 2. С. 182.
- [10] *С. В. Талалов*. ТМФ. 1996. Т. 109. № 1. С. 80.
- [11] *G. P. Pron'ko*. Rev. Math. Phys. 1990. V. 2. № 3. P. 355.
- [12] *А. Барут, Р. Рончка*. Теория представлений групп и ее приложения. М.: Мир, 1980.
- [13] *Д. И. Блохинцев*. Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
- [14] *V. N. Gribov, I. Ya. Pomerenchuk*. Phys. Rev. Lett. 1962. V. 9. № 5. P. 238.

Поступила в редакцию 17.XI.1997 г.