Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Алгебраический взгляд на калибровочные теории, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 2, 217–233

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8691>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 09:46:56

© 2014 г.

В. В. Жаринов*

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ВЗГЛЯД НА КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

Калибровочные теории составляют базис современной физики элементарных частиц. Общепризнанные математические основы этих теорий лежат в дифференциальной геометрии, точнее в теории связностей в главном расслоении. Предлагается другой подход к математическому описанию калибровочных теорий, опирающийся на объединение алгебраических и геометрических методов.

Ключевые слова: дифференцирование, главное расслоение, ковариантная производная, калибровка, поле Янга–Миллса, действие Янга–Миллса, калибровочная инвариантность, пространство модулей.

DOI: 10.4231/tmf8691

1. ВВЕДЕНИЕ

Первой калибровочной теорией по сути была теория электромагнетизма Максвелла. Она была обобщена Янгом и Миллсом [1] на неабелев случай для объяснения сохранения изотопического спина в физике элементарных частиц. Вскоре стала понятной связь этой калибровочной теории с теорией связностей в главном расслоении, развитой незадолго до этого Эресманом [2]. Доходчивое изложение геометрического взгляда на калибровочные теории можно найти, например, в статье [3] и книгах [4]–[6]. Проблемы квантования калибровочных теорий и пути решения этих проблем представлены в книге [7]. В настоящей работе предлагается другой подход к математическому описанию калибровочных теорий, опирающийся на объединение геометрических и алгебраических методов.

Всюду ниже мы используем стандартную алгебраическую терминологию (см., например, монографию [8]) и следующие обозначения:

- $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – числовое поле;
- $\pi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$, $p \mapsto \pi(p) = x$, – гладкое векторное расслоение с типичным слоем $\mathbb{V}$, где $\mathcal{V}$, $\mathcal{M}$ – гладкие многообразия, $\mathbb{V}$ – векторное пространство;
- $\mathcal{A} = C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{F})$ – унитарная (т. е. содержащая единичный элемент) ассоциативная коммутативная алгебра всех гладких функций на $\mathcal{M}$;

*Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zharinov@mi.ras.ru

- $\mathcal{F}(\pi) = \{\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{V}) \mid \pi \circ \Phi = \text{id}_{\mathcal{M}}\}$ – $\mathcal{A}$ -модуль всех гладких сечений расслоения π (здесь и всюду ниже значок $\circ$ обозначает композицию отображений);
- $\text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$ – $\mathcal{A}$ -модуль всех эндоморфизмов $\mathcal{A}$ -модуля $\mathcal{F}(\pi)$, в частности $M(\phi\Phi) = \phi M(\Phi)$ для всех $M \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$, $\phi \in \mathcal{A}$, $\Phi \in \mathcal{F}(\pi)$;
- $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ – $\mathbb{F}$ -линейное пространство всех эндоморфизмов $\mathbb{F}$ -линейного пространства $\mathcal{A}$;
- $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{F}(\pi))$ – $\mathbb{F}$ -линейное пространство всех эндоморфизмов $\mathbb{F}$ -линейного пространства $\mathcal{F}(\pi)$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для начала приведем основные компоненты обобщенного комплекса де Рама (подробнее см., например, работу [9]).

2.1. Дифференцирование. Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная ассоциативная коммутативная алгебра. Обозначим через $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ алгебру Ли всех *дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$* , т. е. $\mathcal{A}$ -модуль всех эндоморфизмов $\chi \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$, удовлетворяющих *правилу Лейбница*

$$\chi(\phi\psi) = \chi(\phi)\psi + \phi\chi(\psi), \quad \chi \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \quad \phi, \psi \in \mathcal{A},$$

где структура $\mathcal{A}$ -модуля задана правилом $(\phi\chi)(\psi) = \phi\chi(\psi)$, $\phi, \psi \in \mathcal{A}$, $\chi \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, а структура алгебры Ли – коммутатором $[\chi, \eta] = \chi \circ \eta - \eta \circ \chi$, $\chi, \eta \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Аналогично, пусть $\mathcal{F}$ – $\mathcal{A}$ -модуль. Обозначим через $\mathfrak{D}(\mathcal{F})$ алгебру Ли всех *дифференцирований $\mathcal{A}$ -модуля $\mathcal{F}$* , т. е. $\mathcal{A}$ -модуль всех пар $\mathbf{X} = (X, \chi) \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{F}) \times \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, удовлетворяющих *правилу Лейбница*

$$X(\phi\Phi) = \chi(\phi)\Phi + \phi X(\Phi), \quad \mathbf{X} = (X, \chi) \in \mathfrak{D}(\mathcal{F}), \quad \phi \in \mathcal{A}, \quad \Phi \in \mathcal{F},$$

где структура $\mathcal{A}$ -модуля задана покомпонентным правилом $\phi\mathbf{X} = (\phi X, \phi\chi)$, $\phi \in \mathcal{A}$, $\mathbf{X} = (X, \chi) \in \mathfrak{D}(\mathcal{F})$, а структура алгебры Ли – покомпонентным коммутатором

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = ([X, Y], [\chi, \eta]), \quad \mathbf{X} = (X, \chi), \quad \mathbf{Y} = (Y, \eta) \in \mathfrak{D}(\mathcal{F}).$$

Множество $\text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F})$ имеет структуры $\mathcal{A}$ -модуля и унитарной ассоциативной алгебры, заданные правилами $(\phi M)(\Phi) = \phi M(\Phi)$ и $MN = M \circ N$ для всех $\phi \in \mathcal{A}$, $M, N \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F})$ и $\Phi \in \mathcal{F}$. Обозначим через $\mathfrak{gl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F})$ алгебру Ли, ассоциированную с алгеброй $\text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F})$, с коммутатором $[M, N] = M \circ N - N \circ M$ для всех $M, N \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеется естественное вложение алгебр Ли*

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}) &\simeq \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{D}(\mathcal{F}), \\ M &\mapsto \mathbf{M} = (M, 0). \end{aligned}$$

Более того, образ $\mathfrak{D}_0(\mathcal{F})$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F})$ есть идеал алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{F})$ и подмодуль $\mathcal{A}$ -модуля $\mathfrak{D}(\mathcal{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\mathbf{X} = (X, \chi)$, $\mathbf{M} = (M, 0) \in \mathfrak{D}(\mathcal{F})$, где $M \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F})$, тогда

$$[\mathbf{X}, \mathbf{M}] = ([X, M], [\chi, 0]) = ([X, M], 0), \quad [X, M] \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}).$$

2.2. Дифференциальные формы. Пусть $\mathcal{A} = C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{F})$ и $\mathcal{K}$ – $\mathcal{A}$ -модуль.

Обозначим через $\Omega(\mathcal{M}; \mathcal{K}) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \Omega^q(\mathcal{M}; \mathcal{K})$ $\mathcal{A}$ -модуль всех форм на многообразии $\mathcal{M}$ с коэффициентами в $\mathcal{A}$ -модуле $\mathcal{K}$, где $\mathcal{A}$ -модули

$$\Omega^q(\mathcal{M}; \mathcal{K}) = \begin{cases} 0, & q < 0 \text{ или } q > m, \\ \mathcal{K}, & q = 0, \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\wedge_{\mathcal{A}}^q \mathfrak{D}(\mathcal{A}); \mathcal{K}), & 1 \leq q \leq m, \end{cases}$$

$$m = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{M} = \dim_{\mathcal{A}} \mathfrak{D}(\mathcal{A}).$$

Каждой 1-форме $\varkappa \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{D}(\mathcal{K})) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}); \mathfrak{D}(\mathcal{K}))$, действующей по правилу $\chi \mapsto \varkappa(\chi) = \mathbf{X} = (X, \chi)$, ставится в соответствие эндоморфизм $d_{\varkappa} \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\mathcal{M}; \mathcal{K}))$, где $d_{\varkappa}^q = d_{\varkappa}|_{\Omega^q(\mathcal{M}; \mathcal{K})} : \Omega^q(\mathcal{M}; \mathcal{K}) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathcal{M}; \mathcal{K})$, $q \in \mathbb{Z}$, действующий по формуле Картана

$$\begin{aligned} d_{\varkappa} \omega(\chi_0, \dots, \chi_q) = & \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq r \leq q} (-1)^r X_r(\omega(\chi_0, \dots, \check{\chi}_r, \dots, \chi_q)) + \right. \\ & \left. + \sum_{0 \leq r < s \leq q} (-1)^{r+s} \omega([\chi_r, \chi_s], \chi_0, \dots, \check{\chi}_r, \dots, \check{\chi}_s, \dots, \chi_q) \right\} \end{aligned}$$

для всех $\omega \in \Omega^q(\mathcal{M}; \mathcal{K})$, $\chi_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, $\varkappa(\chi_r) = \mathbf{X}_r = (X_r, \chi_r)$, $r = 0, \dots, q$ (здесь и всюду ниже предполагается, что аргумент под “птичкой” пропущен).

Если отображение $\varkappa : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{K})$ есть морфизм алгебр Ли (т.е. $\varkappa([\chi, \eta]) = [\varkappa(\chi), \varkappa(\eta)]$ для всех $\chi, \eta \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$), то композиция $d_{\varkappa} \circ d_{\varkappa} = 0$, так что определен дифференциальный комплекс $\{\Omega^q(\mathcal{M}; \mathcal{K}); d_{\varkappa}^q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ с $\mathbb{F}$ -линейными пространствами когомологий $H^q(\mathcal{M}; \mathcal{K}) = \text{Ker } d_{\varkappa}^q / \text{Im } d_{\varkappa}^{q-1}$, $q \in \mathbb{Z}$.

Например, пусть $\mathcal{K} = \mathcal{A}$, $\Omega(\mathcal{M}) = \Omega(\mathcal{M}; \mathcal{A})$, $\varkappa = \text{id}_{\mathfrak{D}(\mathcal{A})}$ и $d = d_{\varkappa}$. Здесь композиция $d \circ d = 0$, и мы имеем классический комплекс де Рама $\{\Omega^q(\mathcal{M}); d^q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ многообразия $\mathcal{M}$.

Пусть теперь $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\pi)$.

Обозначим через $\Omega(\pi; \mathcal{K}) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \Omega^q(\pi; \mathcal{K})$ $\mathcal{A}$ -модуль всех форм на расслоении $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ с коэффициентами в $\mathcal{A}$ -модуле $\mathcal{K}$, где $\mathcal{A}$ -модуль

$$\Omega^q(\pi; \mathcal{K}) = \begin{cases} 0, & q < 0 \text{ или } q > N, \\ \mathcal{K}, & q = 0, \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\wedge_{\mathcal{A}}^q \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)); \mathcal{K}), & 1 \leq q \leq N, \end{cases}$$

$N = \dim_{\mathcal{A}} \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) = mn^2$, $m = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{M} = \dim_{\mathcal{A}} \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, $n = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{V}$. Опять каждой 1-форме

$$\varkappa \in \Omega^1(\pi; \mathfrak{D}(\mathcal{K})) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)); \mathfrak{D}(\mathcal{K})), \quad \mathbf{X} = (X, \chi) \mapsto \varkappa(\mathbf{X}) = \tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \chi),$$

ставится в соответствие эндоморфизм $d_{\varkappa} \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\pi; \mathcal{K}))$, где

$$d_{\varkappa}^q = d_{\varkappa}|_{\Omega^q(\pi; \mathcal{K})} : \Omega^q(\pi; \mathcal{K}) \rightarrow \Omega^{q+1}(\pi; \mathcal{K}), \quad q \in \mathbb{Z},$$

действующий по формуле Картана

$$d_{\varkappa}\omega(\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_q) = \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq r \leq q} (-1)^r \tilde{X}_r(\omega(\mathbf{X}_0, \dots, \check{\mathbf{X}}_r, \dots, \mathbf{X}_q)) + \right. \\ \left. + \sum_{0 \leq r < s \leq q} (-1)^{r+s} \omega([\mathbf{X}_r, \mathbf{X}_s], \mathbf{X}_0, \dots, \check{\mathbf{X}}_r, \dots, \check{\mathbf{X}}_s, \dots, \mathbf{X}_q) \right\}$$

для всех $\omega \in \Omega^q(\pi; \mathcal{K})$, $\mathbf{X}_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$, $\varkappa(\mathbf{X}_r) = \tilde{\mathbf{X}}_r = (\tilde{X}_r, \chi_r)$, $r = 0, \dots, q$.

Если отображение $\varkappa: \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{K})$ есть морфизм алгебр Ли, то $d_{\varkappa} \circ d_{\varkappa} = 0$, и определен дифференциальный комплекс $\{\Omega^q(\pi; \mathcal{K}); d_{\varkappa}^q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ с $\mathbb{F}$ -линейными пространствами когомологий $H^q(\pi; \mathcal{K}) = \text{Ker } d_{\varkappa}^q / \text{Im } d_{\varkappa}^{q-1}$, $q \in \mathbb{Z}$.

Например, пусть $\mathcal{K} = \mathcal{F}(\pi)$, $\Omega(\pi) = \Omega(\pi; \mathcal{F}(\pi))$, $\varkappa = \text{id}_{\mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))}$ и $d = d_{\varkappa}$. Ясно, что композиция $d \circ d = 0$, и мы имеем комплекс $\{\Omega(\pi); d\}$.

ТЕОРЕМА 1. *Комплекс $\{\Omega^q(\pi), d^q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ точный, т. е. $\text{Im } d^q = \text{Ker } d^{q+1}$ для всех $q \in \mathbb{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем формулу Картана

$$L_{\mathbf{X}} = \iota_{\mathbf{X}} \circ d + d \circ \iota_{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{X} \in \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)),$$

где производная Ли $L_{\mathbf{X}} \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\pi))$ задана правилом

$$L_{\mathbf{X}}\omega(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_q) = X(\omega(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_q)) - \sum_{1 \leq r \leq q} \omega(\mathbf{X}_1, \dots, [\mathbf{X}, \mathbf{X}_r], \dots, \mathbf{X}_q),$$

а свертка $\iota_{\mathbf{X}} \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\Omega(\pi))$ – правилом

$$\iota_{\mathbf{X}}\omega(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{q-1}) = q\omega(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{q-1})$$

для всех $\omega \in \Omega^q(\pi)$ и любых $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_q \in \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$. Положим $\mathbf{X} = \mathbf{E} = (E, 0)$, где $E = \text{id}_{\mathcal{F}(\pi)} \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$, тогда

$$L_{\mathbf{E}}\omega(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_q) = \omega(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_q) - \sum_{1 \leq r \leq q} \omega(\mathbf{X}_1, \dots, [\mathbf{E}, \mathbf{X}_r], \dots, \mathbf{X}_q) = \\ = \omega(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_q),$$

поскольку $[\mathbf{E}, \mathbf{X}] = 0$ для всех $\mathbf{X} \in \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$. Таким образом, получаем гомотопическую формулу

$$\iota_{\mathbf{E}} \circ d + d \circ \iota_{\mathbf{E}} = \text{id}_{\Omega(\mathcal{F}(\pi))},$$

влекущую точность комплекса $\{\Omega^q(\pi), d^q \mid q \in \mathbb{Z}\}$.

3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ МОДУЛЯ $\mathcal{F}(\pi)$

Изучим алгебру Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$ подробнее.

3.1. Тривиальный случай. Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{M} \times \mathbb{V}$, $\pi: \mathcal{M} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathcal{M}$, $p = (x, u) \mapsto x$, $\mathcal{F}(\pi) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{V})$.

Очевидно, каждый базис $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ векторного пространства $\mathbb{V}$ порождает представление $\mathcal{F}(\pi) = \{\Phi = \sum_i \phi^i e_i \mid \phi^i \in \mathcal{A}\}$ $\mathcal{A}$ -модуля $\mathcal{F}(\pi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеется естественное вложение алгебр Ли*

$$0 \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\hat{\cdot}} \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)), \quad \chi \mapsto \hat{\chi} = (\hat{\chi}, \chi),$$

$$\hat{\chi}: \mathcal{F}(\pi) \rightarrow \mathcal{F}(\pi), \quad \Phi = \sum_i \phi^i e_i \mapsto \hat{\chi}(\Phi) = \sum_i \chi(\phi^i) e_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что правило $\chi \mapsto \hat{\chi}$ не зависит от выбора базиса в $\mathbb{V}$, правило Лейбница выполнено и коммутатор $[\chi, \eta]^\wedge = [\hat{\chi}, \hat{\eta}]$ для всех $\chi, \eta \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Имеется разложение в прямую сумму $\mathcal{A}$ -модулей*

$$\mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) = \widehat{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) \bigoplus_{\mathcal{A}} \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)),$$

где $\widehat{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$ есть образ отображения $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\hat{\cdot}} \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$ (см. предложение 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $\mathbf{X} = (X, \chi) \in \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$ положим $\hat{\chi} = (\hat{\chi}, \chi)$ (см. предложение 2), тогда получим разложение $\mathbf{X} = \hat{\chi} + \mathbf{M}$, где $\mathbf{M} = \mathbf{X} - \hat{\chi} = (M, 0)$, $M = X - \hat{\chi} \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$.

3.2. Общий случай. Вернемся к произвольному векторному расслоению

$$\pi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}.$$

Будем предполагать, что база $\mathcal{M}$ есть паракомпактное многообразие, и фиксируем локально конечное открытое покрытие $\{\mathcal{O}_k \subset \mathcal{M} \mid k \in K\}$ и подчиненное ему разбиение единицы $\{\omega_k \in \mathcal{A} \mid k \in K\}$, т.е.

$$\bigcup_k \mathcal{O}_k = \mathcal{M}, \quad \text{supp } \omega_k \subset \mathcal{O}_k, \quad \sum_k \omega_k = 1 \text{ на } \mathcal{M}.$$

Без потери общности будем считать, что для каждого $k \in K$ существует изоморфизм $\varkappa_k: \pi^{-1}(\mathcal{O}_k) \simeq \mathcal{O}_k \times \mathbb{V}$ (локальная карта). Пусть $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ – базис в типичном слое $\mathbb{V}$ и $\pi_k = \pi|_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_k)}: \pi^{-1}(\mathcal{O}_k) \rightarrow \mathcal{O}_k$, тогда множество $\{e_{i,k} \in \mathcal{F}(\pi_k) \mid 1 \leq i \leq n\}$, где $e_{i,k}(x) = \varkappa_k^{-1}(x, e_i)$, $x \in \mathcal{O}_k$, будет базисом в $\mathcal{A}$ -модуле $\mathcal{F}(\pi_k)$.

Итак, для каждого $k \in K$ мы имеем представление

$$\mathcal{F}(\pi_k) = \left\{ \Phi_k = \sum_i \phi_k^i e_{i,k} \mid \phi_k^i \in \mathcal{A}_k \right\}, \quad \mathcal{A}_k = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_k; \mathbb{F}).$$

Пусть сечение $\Phi \in \mathcal{F}(\pi)$. Для каждого $k \in K$ сужение

$$\Phi_k = \Phi|_{\mathcal{O}_k} = \sum_i \phi_k^i e_i \in \mathcal{F}(\pi_k),$$

а произведение $\tilde{\Phi}_k = \omega_k \Phi_k \in \mathcal{F}(\pi)$, поскольку носитель $\text{supp } \tilde{\Phi}_k \subset \mathcal{O}_k$, таким образом, справедливо представление

$$\mathcal{F}(\pi) = \left\{ \Phi = \sum_{i,k} \tilde{\phi}_k^i e_{i,k} \mid \tilde{\phi}_k^i = \omega_k \phi_k^i \in \mathcal{A}, \text{supp } \tilde{\phi}_k^i \subset \mathcal{O}_k \right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Имеется вложение $\mathcal{A}$ -модулей*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\hat{\cdot}} \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)), \quad \chi \mapsto \hat{\chi} = (\hat{\chi}, \chi), \\ \hat{\chi}: \mathcal{F}(\pi) \rightarrow \mathcal{F}(\pi), \quad \Phi = \sum_{i,k} \tilde{\phi}_k^i e_{i,k} \mapsto \hat{\chi}(\Phi) = \sum_{i,k} \chi(\tilde{\phi}_k^i) e_{i,k}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $\phi \in \mathcal{A}$ и $\Phi = \sum_{i,k} \tilde{\phi}_k^i e_{i,k} \in \mathcal{F}(\pi)$ можно проверить, что $\phi\Phi = \sum_{i,k} \phi\tilde{\phi}_k^i e_{i,k}$, следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(\phi\Phi) &= \sum_{i,k} \chi(\phi\tilde{\phi}_k^i) e_{i,k} = \sum_{i,k} (\chi(\phi)\tilde{\phi}_k^i + \phi\chi(\tilde{\phi}_k^i)) e_{i,k} = \\ &= \chi(\phi) \sum_{i,k} \tilde{\phi}_k^i e_{i,k} + \phi \sum_{i,k} \chi(\tilde{\phi}_k^i) e_{i,k} = \chi(\phi)\Phi + \phi\hat{\chi}(\Phi). \end{aligned}$$

В силу предложения 1 определено фактор-пространство

$$\overline{\mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))} = \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) / \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)), \quad \mathbf{X} \mapsto \overline{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)),$$

с индуцированными структурами $\mathcal{A}$ -модуля и алгебры Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Имеется изоморфизм $\mathcal{A}$ -модулей и алгебр Ли*

$$\mathfrak{D}(\mathcal{A}) \simeq \overline{\mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))}, \quad \chi \mapsto \overline{\hat{\chi}} = \hat{\chi} + \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)).$$

Более того, имеется разложение в прямую сумму $\mathcal{A}$ -модулей

$$\mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) = \widehat{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) \bigoplus_{\mathcal{A}} \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)), \quad \mathbf{X} = (X, \chi) = \hat{\chi} + \mathbf{M} = (\hat{\chi}, \chi) + (M, 0),$$

где $\widehat{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$ – образ отображения $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\hat{\cdot}} \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$, $M = X - \hat{\chi} \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с предложением 4 отображение $\chi \mapsto \overline{\hat{\chi}}$ является $\mathcal{A}$ -линейным и инъективным. По построению для каждого дифференцирования $\mathbf{X} = (X, \chi) \in \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$, $\chi \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, разность $\mathbf{M} = \mathbf{X} - \hat{\chi} = (X - \hat{\chi}, 0) \in \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi))$, так что это отображение сюръективно. Более того, для всякого $\chi, \eta \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ имеем

$$\begin{aligned} [\hat{\chi}, \hat{\eta}] - [\hat{\chi}, \hat{\eta}]^{\wedge} &= ([\hat{\chi}, \hat{\eta}], [\chi, \eta]) - ([\chi, \eta]^{\wedge}, [\chi, \eta]) = \\ &= ([\hat{\chi}, \hat{\eta}] - [\chi, \eta]^{\wedge}, 0) \in \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)), \end{aligned}$$

т. е. это отображение есть морфизм алгебр Ли.

3.3. Главное расслоение. Существует альтернативный подход к дифференцированиям $\mathcal{A}$ -модуля $\mathcal{F}(\pi)$. Рассмотрим расслоение

$$\Pi: \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \quad \mathbf{X} = (X, \chi) \mapsto \chi.$$

Согласно предложению 3 расслоение Π локально тривиальное, а в силу предложения 5 для каждого $\chi \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ слой $\Pi^{-1}(\chi) = \hat{\chi} + \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)) \simeq \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi))$, следовательно, Π – расслоение с типичным слоем $\mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi))$. Далее, $\mathcal{A}$ -модуль $\mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi))$ имеет структуру абелевой аддитивной группы и действует свободно на множестве $\mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$ по правилу $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{X} + \mathbf{M}$ для всех $\mathbf{X} \in \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$ и $\mathbf{M} \in \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi))$. Более того, опять-таки согласно предложению 5 база $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) \simeq \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))/\mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi))$, таким образом, Π – главное расслоение со структурной группой $\text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$. Наконец, отображение $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$, $\chi \mapsto \hat{\chi}$ (см. предложение 4), есть глобальное сечение главного расслоения Π , следовательно, это расслоение глобально тривиальное (см., например, монографию [6]),

$$\begin{aligned} \Pi: \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) &\simeq \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \times \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi)) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \\ \mathbf{X} = (X, \chi) &\mapsto (\chi, M) \mapsto \chi, \quad M = X - \hat{\chi}. \end{aligned}$$

4. КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В п. 3.3 мы ввели главное расслоение

$$\Pi: \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \quad \mathbf{X} = (X, \chi) \mapsto \chi,$$

где проекция Π – морфизм $\mathcal{A}$ -модулей и алгебр Ли. Ядро этого морфизма есть

$$\text{Ker } \Pi = \{\mathbf{X} = (X, \chi) \in \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) \mid \chi = 0\} = \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)).$$

Рассмотрим теперь множество

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi) = \{\nabla \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}); \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))) \mid \Pi \circ \nabla = \text{id}_{\mathfrak{D}(\mathcal{A})}\} = \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))) \cap \mathcal{F}(\Pi)$$

всех $\mathcal{A}$ -линейных сечений главного расслоения Π (см. п. 2.2, здесь $\mathcal{K} = \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$). Элементы этого множества называются *ковариантными производными*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для каждой ковариантной производной $\nabla \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$ имеет место представление

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) &= \nabla(\mathfrak{D}(\mathcal{A})) \oplus_{\mathcal{A}} \text{Ker } \Pi, \\ \mathbf{X} &= \nabla_{\chi} + \mathbf{M}_{\chi}, \quad \mathbf{X} = (X, \chi), \quad \nabla_{\chi} = (\nabla_{\chi}, \chi), \quad \mathbf{M}_{\chi} = (X - \nabla_{\chi}, 0), \end{aligned}$$

где $\nabla(\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$ – образ отображения $\nabla: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться предложением 5.

В этой ситуации ковариантная производная ∇ называется *калибровкой*, а морфизм $\mathbf{M}$ – *полем Янга–Миллса*.

Действие $\Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi))) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi))$ задается правилом

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &\mapsto \mathbf{M}: \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi), \\ \nabla &\mapsto \nabla + \mathbf{M}, \quad (\nabla + \mathbf{M})_{\chi} = \nabla_{\chi} + \mathbf{M}_{\chi} \end{aligned}$$

для всех $\nabla \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$, $\mathbf{M} \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)))$, $\chi \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, где $\nabla_{\chi} = (\nabla_{\chi}, \chi)$, $\mathbf{M}_{\chi} = (M_{\chi}, 0)$. Абелева группа $\Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)))$ расслаивает множество $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$ на орбиты: ковариантные производные $\nabla, \nabla' \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$ принадлежат одной и той же орбите, если $\nabla' = \nabla + \mathbf{M}$ для некоторой формы $\mathbf{M} \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)))$, в этом случае $\nabla'_{\chi} = \nabla_{\chi} + M_{\chi}$ для всех $\chi \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Для каждой ковариантной производной $\nabla \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$ 2-форма

$$\mathbf{F}(\nabla) = (F(\nabla), 0) \in \Omega^2(\mathcal{M}; \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)))$$

задается правилом

$$F(\nabla)_{\chi, \eta} = [\nabla_{\chi}, \nabla_{\eta}] - \nabla_{[\chi, \eta]} \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi)), \quad \chi, \eta \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}).$$

По построению для данной ковариантной производной $\nabla \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$ невязка $\mathbf{F}(\nabla) = 0$, тогда и только тогда, когда отображение $\nabla: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$ есть морфизм алгебр Ли.

Рассмотрим $\mathcal{A}$ -модуль $\Omega(\mathcal{M}; \mathcal{F}(\pi))$ всех форм на многообразии $\mathcal{M}$ с коэффициентами в $\mathcal{F}(\pi)$ (см. п. 2.2). Фиксируем $\nabla \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$. Пусть морфизм $\varkappa = \nabla: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$. Композиция $d_{\nabla} \circ d_{\nabla} = 0$ тогда и только тогда, когда форма $\mathbf{F}(\nabla) = 0$.

Также рассмотрим $\mathcal{A}$ -модуль $\Omega(\mathcal{M}; \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)))$ всех форм на многообразии $\mathcal{M}$ с коэффициентами в $\mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$. Пусть $\nabla \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$ и

$$\begin{aligned} \varkappa = \text{ad } \nabla: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))), \quad \chi \mapsto \text{ad } \nabla_{\chi}: \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)), \\ \mathbf{X} &\mapsto [\nabla_{\chi}, \mathbf{X}]. \end{aligned}$$

Здесь $d_{\text{ad } \nabla} \circ d_{\text{ad } \nabla} = 0$ тогда и только тогда, когда форма $\mathbf{F}(\nabla) \in \text{cen } \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))$, где

$$\text{cen } \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) = \{\mathbf{X} \in \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) \mid [\mathbf{X}, \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))] = 0\} = \{\lambda \mathbf{E} \mid \lambda \in \mathbb{F}\},$$

$$\mathbf{E} = (\text{id}_{\mathcal{F}(\pi)}, 0) \in \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)) \subset \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 (Тождество Бианки). *Для каждой ковариантной производной $\nabla \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$ справедливо равенство $d_{\text{ad } \nabla} \mathbf{F}(\nabla) = 0$ или, подробнее,*

$$[\nabla_{\chi}, F(\nabla)_{\eta, \rho}] - F(\nabla)_{[\chi, \eta], \rho} + \text{с. р.} = 0 \quad \text{для всех } \chi, \eta, \rho \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}),$$

где символ с. р. обозначает циклическую перестановку аргументов χ, η, ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что для всякой ковариантной производной $\nabla \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$ сужение

$$d_{\text{ad } \nabla}|_{\Omega(\mathcal{M}; \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)))}: \Omega(\mathcal{M}; \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi))) \rightarrow \Omega(\mathcal{M}; \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi))).$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 (d_{\text{ad}} \nabla F(\nabla))_{\chi, \eta, \rho} &= \frac{1}{3} \{ [\nabla_{\chi}, F(\nabla)_{\eta, \rho}] + \text{c. p.} - F(\nabla)_{[\chi, \eta], \rho} - \text{c. p.} \} = \\
 &= \frac{1}{3} \{ ([\nabla_{\chi}, [\nabla_{\eta}, \nabla_{\rho}]] + \text{c. p.}) - ([\nabla_{\chi}, \nabla_{[\eta, \rho]}] + \text{c. p.}) - \\
 &\quad - ([\nabla_{[\chi, \eta]}, \nabla_{\rho}] + \text{c. p.}) + (\nabla_{[[\chi, \eta], \rho]} + \text{c. p.}) \} = \\
 &= \frac{1}{3} \{ 0 - ([\nabla_{\chi}, \nabla_{[\eta, \rho]}] + [\nabla_{\eta}, \nabla_{[\rho, \chi]}] + [\nabla_{\rho}, \nabla_{[\chi, \eta]}] + \\
 &\quad + [\nabla_{[\chi, \eta]}, \nabla_{\rho}] + [\nabla_{[\eta, \rho]}, \nabla_{\chi}] + [\nabla_{[\rho, \chi]}, \nabla_{\eta}]) + \\
 &\quad + \nabla_{[[\chi, \eta], \rho]} + \text{c. p.} \} = \frac{1}{3} \{ 0 - 0 + 0 \} = 0
 \end{aligned}$$

для всех $\chi, \eta, \rho \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, причем мы воспользовались тождеством Якоби и кососимметричностью коммутатора.

5. ДЕЙСТВИЕ ЯНГА–МИЛЛСА

Ниже мы полагаем, что база $\mathcal{M}$ – ориентируемое многообразие, снабженное (римановой или псевдоримановой) метрикой $g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\odot_{\mathcal{A}}^2 \mathfrak{D}(\mathcal{A}); \mathcal{A})$ (символ $\odot$ означает симметризованное тензорное произведение). Пусть dv – индуцированная форма объема. Метрика g задает изоморфизм $\mathcal{A}$ -модулей

$$\begin{aligned}
 g: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathfrak{D}^*(\mathcal{A}), & \chi &\mapsto g(\chi, \cdot): \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}, \\
 & & \eta &\mapsto g(\chi, \eta), & \chi, \eta &\in \mathfrak{D}(\mathcal{A}),
 \end{aligned}$$

тогда как кометрика $g^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\odot_{\mathcal{A}}^2 \mathfrak{D}^*(\mathcal{A}); \mathcal{A})$ задает обратное отображение

$$g^{-1}: \mathfrak{D}^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \quad g^{-1} \circ g = \text{id}_{\mathfrak{D}(\mathcal{A})}, \quad g \circ g^{-1} = \text{id}_{\mathfrak{D}^*(\mathcal{A})}$$

(дуальный $\mathcal{A}$ -модуль $\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}); \mathcal{A})$ и $\mathfrak{D}^{**}(\mathcal{A}) = \mathfrak{D}(\mathcal{A})$).

Для всякого $\mathcal{A}$ -модуля $\mathcal{K}$ мы полагаем

$$\tilde{\Omega}^q(\mathcal{M}; \mathcal{K}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\wedge_{\mathcal{A}}^q \mathfrak{D}^*(\mathcal{A}); \mathcal{K}), \quad 0 \leq q \leq m.$$

Для упрощения обозначений положим

$$\mathcal{DF} = \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}(\pi), \quad \mathcal{D}^* \mathcal{F} = \mathfrak{D}^*(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}(\pi)$$

и

$$g^{-1} = g^{-1} \otimes_{\mathcal{A}} \text{id}_{\mathcal{F}(\pi)}: \mathcal{D}^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{DF}.$$

Для каждой ковариантной производной $\nabla \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$ 2-форма

$$\mathbf{F}(\nabla) \in \Omega^2(\mathcal{M}; \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)))$$

задает морфизм $\mathcal{A}$ -модулей

$$F(\nabla): \mathcal{DF} \rightarrow \mathcal{D}^* \mathcal{F}, \quad \chi \otimes \Phi \mapsto (F(\nabla)(\chi \otimes \Phi))_{\eta} = F(\nabla)_{\chi, \eta}(\Phi)$$

для всех $\chi, \eta \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, $\Phi \in \mathcal{F}(\pi)$, а дуальная форма

$$\tilde{F}(\nabla) = g^{-1} \circ F(\nabla) \circ g^{-1} \in \tilde{\Omega}^2(\mathcal{M}; \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi)))$$

задает морфизм $\tilde{F}(\nabla): \mathcal{D}^*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{DF}$, так что композиция $\tilde{F}(\nabla) \circ F(\nabla) \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{DF})$.

Действие Янга–Миллса есть функционал $\mathcal{S}_{\text{YM}}$ на множестве $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$ вида

$$\mathcal{S}_{\text{YM}}(\nabla) = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_{\text{YM}}(\nabla) dv, \quad \nabla \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi),$$

где лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\text{YM}}(\nabla) = \frac{1}{4} \text{Tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}(\nabla) \circ F(\nabla)).$$

Здесь *след* $\text{Tr}_{\mathcal{A}} \in \text{End}_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{DF}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{DF}); \mathcal{A})$ характеризуется условиями $\text{Tr}_{\mathcal{A}}(\text{id}_{\mathcal{DF}}) = \dim_{\mathcal{A}} \mathcal{DF}$ и $\text{Tr}_{\mathcal{A}}([A, B]) = 0$ для всех $A, B \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{DF})$. В нашем случае

$$\dim_{\mathcal{A}} \mathcal{DF} = \dim_{\mathcal{A}} \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \times \dim_{\mathcal{A}} \mathcal{F}(\pi) = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{M} \times \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{V} = mn < \infty,$$

так что $\text{Tr}_{\mathcal{A}}(A) \in \mathcal{A}$ корректно определен для всех $A \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{DF})$.

Вариация действия $\mathcal{S}_{\text{YM}}(\nabla)$ на элементе $\nabla \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$ определяется равенством

$$\delta \mathcal{S}_{\text{YM}}(\nabla) = \int_{\mathcal{M}} ((\mathcal{L}_{\text{YM}}(\nabla + \delta \nabla) - \mathcal{L}_{\text{YM}}(\nabla)) \bmod (\delta \nabla)^2) dv$$

для всех $\delta \nabla \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)))$.

ТЕОРЕМА 2. Вариация задается формулой

$$\delta \mathcal{S}_{\text{YM}}(\nabla) = \int_{\mathcal{M}} \text{Tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}(\nabla) \circ d_{\text{ad } \nabla}(\delta \nabla)) dv = \int_{\mathcal{M}} \text{Tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{d}_{\text{ad } \nabla}(\tilde{F}(\nabla)) \circ \delta \nabla) dv,$$

где $\mathbb{F}$ -линейное отображение

$$\tilde{d}_{\text{ad } \nabla}: \tilde{\Omega}^2(\mathcal{M}; \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))) \rightarrow \tilde{\Omega}^1(\mathcal{M}; \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))),$$

является двойственным по Лагранжу к $\mathbb{F}$ -линейному отображению

$$d_{\text{ad } \nabla}: \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))) \rightarrow \Omega^2(\mathcal{M}; \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{YM}}(\nabla + \delta \nabla) - \mathcal{L}_{\text{YM}}(\nabla) &= \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}(\nabla + \delta \nabla) \circ F(\nabla + \delta \nabla)) - \frac{1}{4} \text{Tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}(\nabla) \circ F(\nabla)) = \\ &= \bmod(\delta \nabla)^2 = \frac{1}{4} \text{Tr}_{\mathcal{A}}(\delta \tilde{F}(\nabla) \circ F(\nabla)) + \frac{1}{4} \text{Tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}(\nabla) \circ \delta F(\nabla)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\delta F(\nabla)_{\chi,\eta} &= (F(\nabla + \delta\nabla)_{\chi,\eta} - F(\nabla)_{\chi,\eta}) \bmod (\delta\nabla)^2 = \\ &= ([\nabla_\chi, \nabla_\eta] + [\nabla_\chi, \delta\nabla_\eta] + [\delta\nabla_\chi, \nabla_\eta] + [\delta\nabla_\chi, \delta\nabla_\eta] - \\ &\quad - \nabla_{[\chi,\eta]} - \delta\nabla_{[\chi,\eta]} - [\nabla_\chi, \nabla_\eta] + \nabla_{[\chi,\eta]}) \bmod (\delta\nabla)^2 = \\ &= [\nabla_\chi, \delta\nabla_\eta] - [\nabla_\eta, \delta\nabla_\chi] - \delta\nabla_{[\chi,\eta]} = 2d_{\text{ad } \nabla}(\delta\nabla)_{\chi,\eta},\end{aligned}$$

так что $\delta F(\nabla) = 2d_{\text{ad } \nabla}(\delta\nabla)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\text{Tr}_{\mathcal{A}}(\delta\tilde{F}(\nabla) \circ F(\nabla)) &= \text{Tr}_{\mathcal{A}}(g^{-1} \circ \delta F(\nabla) \circ g^{-1} \circ F(\nabla)) = \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{A}}(g^{-1} \circ F(\nabla) \circ g^{-1} \circ \delta F(\nabla)) = \text{Tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}(\nabla) \circ \delta F(\nabla)).\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Множество всех экстремалей действия $\mathcal{S}_{YM}(\nabla)$ есть

$$\mathcal{E}(\mathcal{S}_{YM}) = \{\nabla \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi) \mid \tilde{d}_{\text{ad } \nabla}(\tilde{F}(\nabla)) = 0\}.$$

6. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть $G \in \text{Aut}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$, т. е. $G: \mathcal{F}(\pi) \rightarrow \mathcal{F}(\pi)$, $\Phi \mapsto G(\Phi)$. Автоморфизм G индуцирует одноименный автоморфизм $G \in \text{Aut}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)))$, действующий по правилу

$$\mathbf{X} = (X, \chi) \mapsto G(\mathbf{X}) = (G(X), \chi), \quad \text{где} \quad G(X) = G \circ X \circ G^{-1}.$$

Более того, определен автоморфизм $G \in \text{Aut}(\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\pi))$ правилом $\nabla \mapsto G(\nabla)$, где

$$\begin{aligned}\nabla: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)), & G(\nabla): \mathfrak{D}(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)), \\ \chi &\mapsto \nabla_\chi, & \chi &\mapsto G(\nabla)_\chi = G(\nabla_\chi).\end{aligned}$$

Легко проверяются следующие равенства:

$$F(G(\nabla)) = G \circ F(\nabla) \circ G^{-1}, \quad \mathcal{L}_{YM}(G(\nabla)) = \mathcal{L}_{YM}(\nabla)$$

для всех $\nabla \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$ и $G \in \text{Aut}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$. В частности, группа $\text{Aut}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\pi))$ расщепляет множество экстремалей $\mathcal{E}(\mathcal{S}_{YM})$ на орбиты, т. е. определено отношение эквивалентности, согласно которому экстремали $\nabla, \nabla' \in \mathcal{E}(\mathcal{S}_{YM})$ эквивалентны, $\nabla \simeq \nabla'$, если $\nabla' = G(\nabla)$ для некоторого $G \in \text{Aut}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$. Фактор-множество $\mathcal{E}(\mathcal{S}_{YM}) / \text{Aut}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$ называется *пространством модулей* решений системы уравнений Эйлера–Лагранжа $\tilde{d}_{\text{ad } \nabla}(\tilde{F}(\nabla)) = 0$ (т. е. экстремалей действия $\mathcal{S}_{YM}$).

7. ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

В данном разделе будем считать, что

- $\mathcal{M} = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{V} = \mathbb{F}^n$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{F}^n$, $\pi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$;
- $(x, u) \mapsto x$, $x = (x^\mu \mid 1 \leq \mu \leq m)$, $u = (u^i \mid 1 \leq i \leq n)$;
- $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{F}^m; \mathbb{F})$, $x \mapsto \phi(x)$;
- $\mathcal{F}(\pi) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}^n)$, $x \mapsto u = \Phi(x)$, $\Phi(x) = (\Phi^i(x) \mid 1 \leq i \leq n)$

(см. п. 3.1).

Пусть

- $\{\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu \mid 1 \leq \mu \leq m\} \subset \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ – базис в $\mathcal{A}$ -модуле $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$;
- $\{dx^\mu \mid 1 \leq \mu \leq m\} \subset \mathfrak{D}^*(\mathcal{A})$ – дуальный базис в $\mathcal{A}$ -модуле $\mathfrak{D}^*(\mathcal{A})$;
- метрика $g = (g_{\mu\nu})$, кометрика $g^{-1} = (g^{\mu\nu})$, где $g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu} \in \mathcal{A}$, так что мы имеем $\sum_\lambda g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$;
- форма объема $dv = \sqrt{|\det g|} d^m x$, $d^m x = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$.

В этой ситуации справедливо разложение

$$\mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) = \widehat{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) \oplus_{\mathcal{A}} \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)), \quad \mathbf{X} = (X, \chi) = \hat{\chi} + \mathbf{M},$$

где

- $\chi = \chi^\mu \partial_\mu$, $\chi^\mu \in \mathcal{A}$; здесь и всюду ниже, следуя стандартной физической практике, мы подразумеваем суммирование по повторяющимся верхним и нижним греческим индексам;
- $\hat{\chi} = (\hat{\chi}, \chi)$, $\hat{\chi} = \chi^\mu \hat{\partial}_\mu$, $(\hat{\partial}_\mu \Phi(x))^i = \partial_\mu \Phi^i(x)$;
- $\mathbf{M} = (M, 0)$, $M = X - \hat{\chi} \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$;
- $M = (M_k^i)$, $M_k^i \in \mathcal{A}$, $(M\Phi)^i = \sum_k M_k^i \Phi^k$.

Далее,

- $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi) = \{\chi = \chi^\mu \partial_\mu \mapsto \nabla_\chi = \chi^\mu \nabla_\mu\}$;
- $\nabla_\mu = (\nabla_\mu, \partial_\mu)$, $\nabla_\mu = \hat{\partial}_\mu + M_\mu$, $M_\mu = (M_{\mu k}^i) \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$.

Таким образом, для любого $\chi = \chi^\mu \partial_\mu$, $\eta = \eta^\nu \partial_\nu \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ имеем

$$F(\nabla)_{\chi, \eta} = \chi^\mu \eta^\nu F_{\mu\nu}(\nabla), \quad F_{\mu\nu}(\nabla) = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \hat{\partial}_\mu M_\nu - \hat{\partial}_\nu M_\mu - [M_\mu, M_\nu].$$

Здесь $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, так что $\nabla_{[\partial_\mu, \partial_\nu]} = 0$, а $(\hat{\partial}_\mu M_\nu)_k^i = \partial_\mu M_{\nu k}^i$, $M_k^i \in \mathcal{A}$.

Аналогичным образом для любых $a = a_\mu dx^\mu$, $b = b_\nu dx^\nu \in \mathfrak{D}^*(\mathcal{A})$ имеем

$$\tilde{F}(\nabla)_{a, b} = a_\mu b_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}(\nabla), \quad \tilde{F}^{\mu\nu}(\nabla) = g^{\mu\mu'} F_{\mu'\nu'}(\nabla) g^{\nu'\nu}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Экстремали действия $\mathcal{S}_{YM}$ суть решения системы уравнений Эйлера–Лагранжа*

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{\text{ad } \nabla}(\tilde{F}(\nabla))^\nu &= \tilde{\partial}_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}(\nabla) + [M_\mu, \tilde{F}^{\mu\nu}(\nabla)] = \\ &= \tilde{\nabla}_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}(\nabla) = 0, \quad 1 \leq \nu \leq m, \end{aligned}$$

где

$$(\tilde{\partial}_\mu N)_k^i = (\sqrt{|\det g|})^{-1} \partial_\mu (\sqrt{|\det g|} N_k^i), \quad N = (N_k^i) \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\text{Tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}(\nabla) \circ d_{\text{ad } \nabla}(\delta \nabla)) = \text{tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}^{\nu\mu}(\nabla) \circ d_{\text{ad } \nabla}(\delta \nabla)_{\mu\nu})$$

(след $\text{tr}_{\mathcal{A}} \in \text{End}_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{F}(\pi))$), тогда как след $\text{Tr}_{\mathcal{A}} \in \text{End}_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{DF})$). Здесь

$$\begin{aligned} d_{\text{ad } \nabla}(\delta \nabla)_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}([\nabla_\mu, \delta \nabla_\nu] - [\nabla_\nu, \delta \nabla_\mu]) = \\ &= \frac{1}{2}([\hat{\partial}_\mu, \delta \nabla_\nu] + [M_\mu, \delta \nabla_\nu] - [\hat{\partial}_\nu, \delta \nabla_\mu] - [M_\nu, \delta \nabla_\mu]) = \\ &= \frac{1}{2}((\hat{\partial}_\mu \delta \nabla_\nu - \hat{\partial}_\nu \delta \nabla_\mu) + ([M_\mu, \delta \nabla_\nu] - [M_\nu, \delta \nabla_\mu])). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}^{\nu\mu}(\nabla)([M_\mu, \delta\nabla_\nu] - [M_\nu, \delta\nabla_\mu])) &= \operatorname{tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}^{\nu\mu}(\nabla)[M_\mu, \delta\nabla_\nu]) = \\ &= \operatorname{tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}^{\nu\mu}(\nabla)M_\mu\delta\nabla_\nu - \tilde{F}^{\nu\mu}(\nabla)\delta\nabla_\nu M_\mu) = \operatorname{tr}_{\mathcal{A}}([M_\mu, \tilde{F}^{\mu\nu}(\nabla)]\delta\nabla_\nu), \end{aligned}$$

тогда как

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}^{\nu\mu}(\nabla)(\hat{\partial}_\mu\delta\nabla_\nu - \hat{\partial}_\nu\delta\nabla_\mu)) = \operatorname{tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}^{\nu\mu}(\nabla)\hat{\partial}_\mu\delta\nabla_\nu)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}^{\nu\mu}(\nabla)\hat{\partial}_\mu\delta\nabla_\nu)\sqrt{|\det g|} d^m x &= (\text{интегрирование по частям}) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \partial_\mu(\operatorname{tr}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}^{\nu\mu}(\nabla)\delta\nabla_\nu)\sqrt{|\det g|}) d^m x - \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \operatorname{tr}_{\mathcal{A}}(\hat{\partial}_\mu(\sqrt{|\det g|}\tilde{F}^{\nu\mu}(\nabla))\delta\nabla_\nu)\sqrt{|\det g|} d^m x = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{tr}_{\mathcal{A}}((\sqrt{|\det g|}^{-1}\hat{\partial}_\mu\sqrt{|\det g|}\tilde{F}^{\mu\nu})\delta\nabla_\nu)\sqrt{|\det g|} d^m x. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства достаточно объединить полученные результаты.

8. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Предположим, что на $\mathcal{A}$ -модуле $\mathcal{F}(\pi)$ определено левое действие (морфизм групп) Λ группы $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \Lambda: \mathcal{G} &\rightarrow \operatorname{Aut}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi)), & G &\mapsto \Lambda_G: \mathcal{F}(\pi) \rightarrow \mathcal{F}(\pi), \\ & & \Phi &\mapsto \Lambda_G(\Phi). \end{aligned}$$

Тогда также определены следующие индуцированные левые действия:

- морфизм групп

$$\begin{aligned} \Lambda: \mathcal{G} &\rightarrow \operatorname{Aut}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi))), & G &\mapsto \Lambda_G: \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\pi)), \\ & & \mathbf{X} &= (X, \chi) \mapsto \Lambda_G(\mathbf{X}), \end{aligned}$$

где $\Lambda_G(\mathbf{X}) = \Lambda_G \circ \mathbf{X} \circ \Lambda_{G^{-1}} = (\Lambda_G \circ X \circ \Lambda_{G^{-1}}, \chi)$;

- морфизм групп

$$\begin{aligned} \Lambda: \mathcal{G} &\rightarrow \operatorname{Aut}(\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)), & G &\mapsto \Lambda_G: \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi), \\ & & \nabla &\mapsto \Lambda_G(\nabla), \end{aligned}$$

где $\Lambda_G(\nabla)_\chi = \Lambda_G(\nabla_\chi)$ для всех $\chi \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Пусть $\mathcal{I}$ – Λ_G -инвариантное подмножество множества $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$, т.е. $\Lambda_G(\nabla) \in \mathcal{I}$ для всех $G \in \mathcal{G}$, $\nabla \in \mathcal{I}$. Обозначим через $\mathcal{S}_{\mathcal{I}} = \mathcal{S}_{\text{YM}}|_{\mathcal{I}}$ сужение функционала $\mathcal{S}_{\text{YM}}$ на подмножество $\mathcal{I}$, тогда множество экстремалей $\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\mathcal{I}}) = \mathcal{E}(\mathcal{S}_{\text{YM}}) \cap \mathcal{I}$ также будет Λ_G -инвариантным и расслоенным на орбиты группы $\mathcal{G}$. Фактор-множество $\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\mathcal{I}})/\Lambda_G$ называется *пространством модулей экстремалей действия $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ относительно действия Λ группы $\mathcal{G}$* .

8.1. Ситуация, популярная в приложениях. Пусть Γ – группа Ли. В этом случае определены следующие индуцированные действия:

- левое действие (т.е. морфизм групп)

$$l: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\Gamma), \quad \gamma \mapsto l_\gamma: \Gamma \rightarrow \Gamma, \quad \alpha \mapsto l_\gamma(\alpha) = \gamma\alpha;$$

- правое действие (т.е. антиморфизм групп)

$$r: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\Gamma), \quad \gamma \mapsto r_\gamma: \Gamma \rightarrow \Gamma, \quad \alpha \mapsto r_\gamma(\alpha) = \alpha\gamma;$$

- левое действие

$$\text{ad}: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\Gamma), \quad \gamma \mapsto \text{ad}_\gamma: \Gamma \rightarrow \Gamma, \quad \alpha \mapsto \text{ad}_\gamma(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}.$$

Здесь $l_\alpha \circ r_\beta = r_\beta \circ l_\alpha$, $\text{ad}_\gamma = l_\gamma \circ r_{\gamma^{-1}}$, $\text{ad}_\gamma(\alpha\beta) = \text{ad}_\gamma(\alpha)\text{ad}_\gamma(\beta)$ для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$.

Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{C}^\infty(\Gamma; \mathbb{F})$ – алгебра всех гладких функций на многообразии Γ и $\mathfrak{D}(\mathcal{B})$ – алгебра Ли всех дифференцирований алгебры $\mathcal{B}$. Действия l, r и ad индуцируют следующие действия группы Γ на $\mathcal{B}$ и $\mathfrak{D}(\mathcal{B})$:

- правое действие

$$l^*: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{B}), \quad \gamma \mapsto l_\gamma^*: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}, \quad f \mapsto l_\gamma^*(f) = f \circ l_\gamma;$$

- левое действие

$$r^*: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{B}), \quad \gamma \mapsto r_\gamma^*: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}, \quad f \mapsto r_\gamma^*(f) = f \circ r_\gamma;$$

- правое действие

$$\text{ad}^*: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{B}), \quad \gamma \mapsto \text{ad}_\gamma^*: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}, \quad f \mapsto \text{ad}_\gamma^*(f) = f \circ \text{ad}_\gamma;$$

- правое действие

$$l^*: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{D}(\mathcal{B})), \quad \gamma \mapsto l_\gamma^*: \mathfrak{D}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{B}),$$

$$u \mapsto l_\gamma^*(u) = l_\gamma^* \circ u \circ l_{\gamma^{-1}}^*;$$

- левое действие

$$r^*: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{D}(\mathcal{B})), \quad \gamma \mapsto r_\gamma^*: \mathfrak{D}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{B}),$$

$$u \mapsto r_\gamma^*(u) = r_\gamma^* \circ u \circ r_{\gamma^{-1}}^*;$$

- правое действие

$$\text{ad}^*: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{D}(\mathcal{B})), \quad \gamma \mapsto \text{ad}_\gamma^*: \mathfrak{D}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{B}),$$

$$u \mapsto \text{ad}_\gamma^*(u) = \text{ad}_\gamma^* \circ u \circ \text{ad}_{\gamma^{-1}}^*.$$

Ясно, что

$$\rho_\gamma^*(u(f)) = \rho_\gamma^*(u)(\rho_\gamma^*(f)), \quad \rho = l, r, \text{ad}, \quad \gamma \in \Gamma, \quad u \in \mathfrak{D}(\mathcal{B}), \quad f \in \mathcal{B},$$

$$\rho_\gamma^*([u, v]) = [\rho_\gamma^*(u), \rho_\gamma^*(v)], \quad \rho = l, r, \text{ad}, \quad \gamma \in \Gamma, \quad u, v \in \mathfrak{D}(\mathcal{B}).$$

По определению алгебра Ли группы Γ есть

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{D}_l(\mathcal{B}) = \{u \in \mathfrak{D}(\mathcal{B}) \mid l_\gamma^*(u) = u \text{ для всех } \gamma \in \Gamma\} \simeq T_e\Gamma,$$

т.е. алгебра Ли всех левоинвариантных дифференцирований алгебры $\mathcal{B}$ (где e – единичный элемент группы Ли Γ , $T_e\Gamma$ – касательное пространство гладкого многообразия Γ в точке e). Легко понять, что $l_\gamma^*|_{\mathfrak{a}} = \text{id}_{\mathfrak{a}}$ и $\text{ad}_\gamma^*|_{\mathfrak{a}} = r_{\gamma^{-1}}^*|_{\mathfrak{a}}$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Ассоциированное действие (морфизм алгебр Ли) as алгебры Ли $\mathfrak{a}$ на линейном пространстве $\mathfrak{a}$ задается правилом

$$\begin{aligned} \text{as}: \mathfrak{a} &\rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{a}), & u &\mapsto \text{as}_u: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}, \\ & & v &\mapsto \text{as}_u(v) = [u, v], \end{aligned}$$

где $\mathfrak{gl}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{a})$ – алгебра Ли, ассоциированная с алгеброй $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{a})$.

Положим $\mathcal{G} = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}; \Gamma)$ и $\mathfrak{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}; \mathfrak{a})$. Множество $\mathcal{G}$ имеет поточечную групповую структуру,

$$(FG)(x) = F(x)G(x) \quad \text{для всех } F, G \in \mathcal{G}, \quad x \in \mathcal{M},$$

а множество $\mathfrak{A}$ – поточечную структуру алгебры Ли,

$$[A, B](x) = [A(x), B(x)] \quad \text{для всех } A, B \in \mathfrak{A}, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Пусть теперь $\mathbb{V} = \mathfrak{a}$, $\mathcal{E} = \mathcal{M} \times \mathfrak{a}$, $\pi: \mathcal{M} \times \mathfrak{a} \rightarrow \mathcal{M}$, $(x, u) \mapsto x$. В этом случае $\mathcal{F}(\pi) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}; \mathfrak{a}) = \mathfrak{A}$. Определим левое действие (морфизм групп)

$$\begin{aligned} \Lambda: \mathcal{G} &\rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi)), & G &\mapsto \Lambda_G: \mathcal{F}(\pi) \rightarrow \mathcal{F}(\pi), \\ & & \Phi &\mapsto \Lambda_G(\Phi) = G(\Phi), \end{aligned}$$

правилом $G(\Phi)(x) = r_{G(x)}^*(\Phi(x))$ (заметим, что $l_{G(x)}^*(\Phi(x)) = \Phi(x)$) для всех $G \in \mathcal{G}$, $\Phi \in \mathcal{F}(\pi)$ и $x \in \mathcal{M}$.

Определим также действие (морфизм алгебр Ли):

$$\begin{aligned} \Sigma: \mathfrak{A} &\rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi)), & A &\mapsto \Sigma_A: \mathcal{F}(\pi) \rightarrow \mathcal{F}(\pi), \\ & & \Phi &\mapsto \Sigma_A(\Phi) = A(\Phi) = [A, \Phi], \end{aligned}$$

где $\mathfrak{gl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$ – алгебра Ли, ассоциированная с алгеброй $\text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$. В свою очередь это действие индуцирует действие

$$\begin{aligned} \Sigma: \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{A}) &\rightarrow \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi))), & A &\mapsto \Sigma_A = \mathbf{A}: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}_0(\mathcal{F}(\pi)), \\ & & \chi &\mapsto (\Sigma_A)_\chi = \mathbf{A}_\chi, \end{aligned}$$

где $\mathbf{A}_\chi = (A_\chi, 0)$, $A_\chi \in \Sigma(\mathfrak{A}) \subset \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$. Образ последнего действия мы обозначим через $\Sigma(\Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{A}))$.

Наконец, определено еще одно действие (см. раздел 4)

$$\begin{aligned} \Sigma: \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{A}) &\rightarrow \text{Aut}(\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)), & A &\mapsto \Sigma_A: \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi), \\ & & \nabla &\mapsto \Sigma_A(\nabla) = \nabla + \mathbf{A}, \end{aligned}$$

где $(\nabla + \mathbf{A})_\chi = \nabla_\chi + \mathbf{A}_\chi = (\nabla_\chi + A_\chi, \chi)$ для всех $\chi \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Теперь фиксируем калибровку $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$ и положим

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} + \Sigma(\Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{A})) \subset \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi).$$

Можно проверить, что множество $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$ является $\Lambda_{\mathcal{G}}$ -инвариантным, так что определены сужение $\mathcal{S}_{\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})}$ и пространство модулей $\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})})/\Lambda_{\mathcal{G}}$.

В более общей ситуации имеется векторное расслоение $\pi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ с типичным слоем $\mathbb{V} = \mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ – алгебра Ли группы Ли Γ , причем задано левое действие

$$\begin{aligned} \lambda: \Gamma &\rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{F}}(\pi), & \gamma &\mapsto \lambda_{\gamma}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \\ & & p &\mapsto \lambda_{\gamma}(p), \quad \pi(p) = \pi(\lambda_{\gamma}(p)), \end{aligned}$$

где $\text{Aut}_{\mathbb{F}}(\pi)$ – группа всех послойно $\mathbb{F}$ -линейных автоморфизмов расслоения π . Более того, предполагается, что для каждой локальной карты

$$\varkappa: \pi^{-1}(\mathcal{O}) \simeq \mathcal{O} \times \mathfrak{a}, \quad p \mapsto \varkappa(p) = (x, u), \quad \mathcal{O} \subset \mathcal{M},$$

имеет место представление

$$p = \varkappa^{-1}(x, u) \mapsto \lambda_{\gamma}(p) = \varkappa^{-1}(x, r_{\gamma}^*(u))$$

для всех $p \in \pi^{-1}(\mathcal{O})$, $\gamma \in \Gamma$. В этом случае также определено действие

$$\begin{aligned} \sigma: \mathfrak{a} &\rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{F}}(\pi), & v &\mapsto \sigma_v: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \\ & & p &\mapsto \sigma_v(p), \quad \pi(p) = \pi(\sigma_v(p)), \end{aligned}$$

причем для каждой локальной карты $\varkappa: \pi^{-1}(\mathcal{O})$ имеет место представление

$$p = \varkappa^{-1}(x, u) \mapsto \sigma_v(p) = \varkappa^{-1}(x, [v, u])$$

для всех $p \in \pi^{-1}(\mathcal{O})$, $v \in \mathfrak{a}$.

Во введенных выше обозначениях $\mathcal{G} = C^{\infty}(\mathcal{M}; \mathcal{G})$, $\mathfrak{A} = C^{\infty}(\mathcal{M}; \mathfrak{a})$, а действия $\Lambda: \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$ и $\Sigma: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\pi))$ определены поточечными правилами

$$\Lambda_G(\Phi)(x) = \lambda_{G(x)}(\Phi(x)), \quad \Sigma_A(\Phi) = \sigma_{A(x)}(\Phi(x))$$

для всех $G \in \mathcal{G}$, $A \in \mathfrak{A}$, $\Phi \in \mathcal{F}(\pi)$ и $x \in \mathcal{M}$. Как и выше, определено действие $\Sigma: \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{A}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi))$, таким образом, для всякой калибровки $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$ можно рассмотреть $\Lambda_{\mathcal{G}}$ -инвариантное множество $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} + \Sigma(\Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{A})) \subset \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\Pi)$, сужение $\mathcal{S}_{\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})}$ и пространство модулей $\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})})/\Lambda_{\mathcal{G}}$.

Благодарности. Работа была выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00065).

Список литературы

- [1] C. N. Yang, R. L. Mills, *Phys. Rev.*, **96**:1 (1954), 191–195.
- [2] C. Ehresmann, “Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable”, *Colloque de Topologie* (Bruxelles, June 5–8, 1950), Paris, Masson, 1951, 29–55.
- [3] V. F. Atiyah, “Geometrical aspects of gauge theory”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Helsinki, August 15–23, 1978), ed. O. Letho, University of Helsinki, Helsinki, 1980, 881–885.

- [4] D. Bleecker, *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.
- [5] K. B. Marathe, G. Martucci, *The Mathematical Foundations of Gauge Theories*, Studies in Mathematical Physics, **5**, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [6] C. J. Isham, *Modern Differential Geometry for Physicists*, World Sci., Singapore, 1999.
- [7] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, М., 1978.
- [8] С. Маклейн, *Гомология*, Мир, М., 1966.
- [9] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **174**:2 (2013), 256–271.

Поступила в редакцию 2.02.2014