Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Явление буферности в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 2, 254–275

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8692>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:05:45

© 2014 г. С. Д. Глызин*, А. Ю. Колесов*, Н. Х. Розов†

ЯВЛЕНИЕ БУФЕРНОСТИ В КОНТИНУАЛЬНЫХ ЦЕПОЧКАХ ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

Предложена математическая модель континуальной кольцевой цепочки односторонне связанных генераторов, представляющая собой некоторую нелинейную гиперболическую краевую задачу типа переноса. Такого рода задачи получаются предельным переходом из кольцевых цепочек односторонне связанных обыкновенных дифференциальных уравнений при неограниченном увеличении числа звеньев. Установлено, что в рассматриваемой краевой задаче реализуется известный феномен буферности. А именно показано, что в этой задаче может сосуществовать любое наперед заданное конечное число устойчивых периодических движений типа бегущих волн.

Ключевые слова: континуальная цепочка односторонне связанных генераторов, буферность, бегущие волны, асимптотика, устойчивость.

DOI: 10.4213/tmf8692

1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА РАССМАТРИВАЕМОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ

В простейшем случае математической моделью кольцевой цепочки односторонне связанных генераторов служит система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{u}_j = F(u_j) + mD(u_{j+1} - u_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad u_{m+1} = u_1. \quad (1)$$

Здесь $m \geq 2$, точка означает дифференцирование по t , $u \in \mathbb{R}^n$ и $n \geq 2$, вектор-функция $F(u)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, D – квадратная матрица размера $n \times n$. Как правило, предполагается, что соответствующая цепочке (1) парциальная система

$$\dot{u} = F(u) \quad (2)$$

имеет единственный аттрактор – состояние равновесия или цикл.

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия.
E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru

†Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: fpo.mgu@mail.ru

Исследование цепочек вида (1) актуально в связи с различными приложениями к радиофизике [1]–[5] и нейродинамике [6]–[8]. В частности, представляет интерес поведение аттракторов таких цепочек при неограниченном увеличении числа звеньев m . В настоящей статье данный вопрос изучается в случае, когда у парциальной системы (2) устойчиво нулевое положение равновесия, а матрица связи D подходящим образом мала.

При условии $m \gg 1$ вполне уместен переход от дискретной цепочки (1) к соответствующей распределенной модели. Процедура указанного перехода состоит в аппроксимации величины j/m непрерывным индексом $x \in [0, 1] \pmod{1}$ и замене слагаемого $m(u_{j+1} - u_j)$ в (1) на производную $\partial u / \partial x$. В результате получаем краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u) + D \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(t, x+1) \equiv u(t, x), \quad (3)$$

представляющую собой математическую модель континуальной кольцевой цепочки односторонне связанных генераторов.

Будем рассматривать задачу (3) как эволюционное уравнение в банаховом пространстве E , состоящем из периодических с периодом 1 вектор-функций $u(x)$ из класса $W_2^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)$. Норму в E зададим равенством

$$\|u\|_E = \left(\int_0^1 \|u(x)\|^2 dx + \int_0^1 \|u'(x)\|^2 dx \right)^{1/2},$$

где здесь и ниже одним и тем же символом $\|\cdot\|$ обозначаются евклидовы нормы в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, а также соответствующие этим нормам индуцированные матричные нормы. Введем в рассмотрение замкнутый неограниченный оператор $L = D \frac{d}{dx} : E \rightarrow E$ с плотной в E областью определения $E(L)$. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Оператор L является генератором полугруппы $\exp(Lt)$, $t \geq 0$, класса C_0 линейных ограниченных в E операторов в том и только в том случае, когда весь спектр матрицы D лежит на вещественной оси и в пространстве $\mathbb{R}^n$ существует базис из ее собственных векторов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если полугруппа $\exp(Lt)$ существует, то ее действие на любой элемент $u(x) \in E$ с необходимостью задается рядом Фурье:

$$\exp(Lt)u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k D t} u_k e^{2\pi i k x}, \quad (4)$$

где

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k e^{2\pi i k x}, \quad u_k = \int_0^1 u(x) e^{-2\pi i k x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

В свою очередь, правая часть равенства (4) порождает в пространстве E линейный ограниченный оператор в том и только в том случае, когда

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|e^{i\tau D}\| < \infty.$$

Остается добавить, что это условие эквивалентно двум требованиям: вещественности спектра матрицы D и существованию у нее полного набора собственных векторов. Лемма доказана.

Установленная лемма свидетельствует о том, что при $m \rightarrow \infty$ цепочка (1) отнюдь не всегда порождает корректную краевую задачу (3). В связи с этим естественным образом возникает ограничение на матрицу D . А именно всюду ниже мы считаем, что все ее собственные значения вещественные и простые. Тогда мы заведомо находимся в рамках применимости леммы 1, более того, полугруппа (4), (5) существует и при малых возмущениях матрицы D . Тем самым для вектор-функции $v(t) = u(t, \cdot) \in E$ получается корректное абстрактное полулинейное дифференциальное уравнение

$$\dot{v} = Lv + \mathcal{F}(v), \quad \mathcal{F}(v(t)) \stackrel{\text{def}}{=} F(u(t, \cdot)). \quad (6)$$

Добавим также, что фигурирующий в (6) оператор суперпозиции $\mathcal{F}: E \rightarrow E$ в силу известной теоремы о регулярности [9] бесконечно дифференцируем по Фреше и ограничен на любом ограниченном подмножестве $\Omega \subset E$ вместе с любым конечным числом своих производных.

Наличие полугруппы (4) позволяет определить для уравнения (6) понятие обобщенного решения из E с произвольным начальным условием

$$v(0) = v_0. \quad (7)$$

Будем называть *обобщенным решением* непрерывную вектор-функцию $v(t)$ со значениями в E , удовлетворяющую на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ интегральному уравнению

$$v(t) = \exp(Lt)v_0 + \int_0^t \exp(L(t-s))\mathcal{F}(v(s))ds. \quad (8)$$

Пусть теперь $v_0 \in E(L)$. Тогда *классическим решением* задачи Коши (6), (7) назовем такую непрерывно дифференцируемую (в метрике пространства E) на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ вектор-функцию $v = v(t)$, что, во-первых, $v(t) \in E(L)$ и $Lv(t)$ непрерывна при каждом $t \in [0, \bar{t}]$; во-вторых, функция $v(t)$ на рассматриваемом отрезке удовлетворяет уравнению (6), а при $t = 0$ – начальному условию (7). Ясно, что любое классическое решение является одновременно решением интегрального уравнения (8).

Общая теория абстрактных полулинейных дифференциальных уравнений содержится, например, в монографиях [10], [11]. Приведенные в них факты свидетельствуют о том, что свойства этих уравнений во многом аналогичны свойствам обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, справедлива следующая серия лемм.

ЛЕММА 2. *По любому ограниченному множеству $\Omega \subset E$ можно указать такое $t_0 = t_0(\Omega) > 0$, что каждое обобщенное решение $v = v(t, v_0)$, $v(0, v_0) = v_0$, уравнения (6) с начальным условием $v_0 \in \Omega$ однозначно определено на отрезке $0 \leq t \leq t_0$ и непрерывно по совокупности переменных $(t, v_0) \in [0, t_0] \times \Omega$. В случае $v_0 \in \Omega \cap E(L)$ данное решение при всех $t \in [0, t_0]$ будет классическим.*

ЛЕММА 3. Пусть задано произвольное (вообще говоря, обобщенное) решение $v = v_*(t)$ уравнения (6) на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$. Тогда найдется такое достаточно малое $r_0 > 0$, что любое обобщенное решение $v = v(t, v_0)$ этого уравнения с начальным условием $v(0, v_0) = v_0 \in B$, где $B = \{v \in E: \|v - v_*(0)\|_E \leq r_0\}$, существует на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ и непрерывно по совокупности переменных $(t, v_0) \in [0, \bar{t}] \times B$. Если же дополнительно $v_0 \in E(L)$, то соответствующее решение $v(t, v_0)$ при всех значениях $t \in [0, \bar{t}]$ оказывается классическим.

ЛЕММА 4. Для любого обобщенного решения $v = v_*(t)$, определенного на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$, найдется такая последовательность классических решений $v = v_k(t)$, $t \in [0, \bar{t}]$, $k = 1, 2, \dots$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|v_*(t) - v_k(t)\|_E = 0.$$

Перед формулировкой заключительной леммы для каждого обобщенного решения $v(t)$ уравнения (6) с начальным условием (7) определим так называемый максимальный полуинтервал существования $[0, t_{\max})$, где

$$t_{\max} = \sup \{t_0: v(t) \text{ существует на отрезке } t \in [0, t_0]\}. \quad (9)$$

Согласно лемме 2 множество значений t_0 , по которым берется точная верхняя грань в (9), заведомо не пусто. Ясно также, что любое решение $v(t)$ однозначно продолжается на свой максимальный полуинтервал $[0, t_{\max})$, причем не исключен случай $t_{\max} = +\infty$. Если же оказалось, что $t_{\max} < +\infty$, то справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Предположим, что для некоторого обобщенного решения $v(t)$ уравнения (6) конечна величина (9). Тогда выполняется предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max} - 0} \|v(t)\|_E = +\infty.$$

По поводу обоснования приведенных лемм отсылаем к статье [12], где изложены доказательства аналогичных результатов.

В дальнейшем при некоторых дополнительных ограничениях на матрицу D и характер нелинейности функции $F(u)$ мы рассмотрим проблему аттракторов нелинейного полупотока, порожденного обобщенными решениями уравнения (6) в фазовом пространстве E . Точнее говоря, речь пойдет о специальных его аттракторах – периодических решениях типа бегущих волн. Бегущей волной назовем периодическое решение краевой задачи (3) вида

$$u = u(\theta), \quad \theta = \sigma t + px, \quad (10)$$

где $\sigma = \text{const} \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$. Что касается фигурирующей в (10) вектор-функции $u(\theta) \in \mathbb{R}^n$, $u(\theta+1) \equiv u(\theta)$, то она удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(\sigma I - pD) \frac{du}{d\theta} = F(u), \quad (11)$$

где I – единичная матрица.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ БЕГУЩИХ ВОЛН

Конкретизируем постановку проблемы. В связи с этим обратимся к аналогичной (3) краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, \varepsilon) + \mu(D_0 + \varepsilon D_1) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(t, x+1) \equiv u(t, x), \quad (12)$$

где $u \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. В уравнении (12) величины $\varepsilon, \mu > 0$ – независимые малые параметры; вектор-функция $F(u, \varepsilon)$ бесконечно дифференцируема по совокупности переменных $(u, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$, и удовлетворяет условию $F(0, \varepsilon) \equiv 0$.

Формулировку дальнейших ограничений начнем со свойств фигурирующих в (12) матриц связи D_0, D_1 . В силу леммы 1 и комментариев к ней уместно следующее требование.

УСЛОВИЕ 1. Будем считать, что матрица D_1 произвольна, а матрица D_0 имеет простые собственные значения $\lambda_k \in \mathbb{R}$, которым отвечают собственные векторы e_k , $k = 1, \dots, n$. Предположим, что эти собственные векторы нормированы условиями $(e_k, g_k) = 1$, где $D_0^* g_k = \lambda_k g_k$, $k = 1, \dots, n$, а через $(\cdot, \cdot)$ здесь и далее обозначается евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$.

Для формулировки очередных условий нам потребуется тейлоровское разложение вектор-функции $F(u, \varepsilon)$ в точке $(u, \varepsilon) = (0, 0)$:

$$F(u, \varepsilon) = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + O(\varepsilon^2 \|u\| + \varepsilon \|u\|^2 + \|u\|^4), \quad (13)$$

где A_0, A_1 – квадратные матрицы размера $n \times n$, а F_2, F_3 – квадратичная и кубическая симметричные формы со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Опираясь на разложение (13), линеаризуем краевую задачу (12) на нулевом состоянии равновесия и применим к получившейся линейной краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + \mu(D_0 + \varepsilon D_1) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(t, x+1) \equiv u(t, x)$$

метод Фурье по системе функций $e^{2\pi k i x}$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. подставим в нее соотношения (5). В результате для переменных u_k приходим к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_k = (A_0 + \varepsilon A_1 + iz(D_0 + \varepsilon D_1))u_k, \quad z = 2\pi k \mu.$$

Устойчивость этих уравнений очевидным образом связана со спектральными свойствами матрицы

$$\mathcal{D}(z) = A_0 + izD_0, \quad (14)$$

где параметр z , принимающий дискретные значения $2\pi k \mu$, для удобства будем считать непрерывно меняющимся на полуоси $z \geq 0$; случай $z < 0$ не нуждается в отдельном рассмотрении, так как $\mathcal{D}(-z) \equiv \overline{\mathcal{D}}(z)$ (чертой здесь и далее обозначается операция комплексного сопряжения).

УСЛОВИЕ 2. Пусть найдется такое $z = z_0 > 0$, что при всех $z \geq 0$, $z \neq z_0$ матрица (14) является гурвицевой. В случае $z = z_0$ она имеет простое собственное значение $\lambda = i\omega_0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$, а остальной ее спектр по-прежнему лежит в левой комплексной полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Предположим также, что

$$\det(\omega_0 I - z_0 D_0) \neq 0. \quad (15)$$

Остановимся на некоторых свойствах матрицы (14), которые вытекают из условий 1, 2.

Заметим, во-первых, что в силу условия 1 при $z \gg 1$ собственные значения $\lambda_k(z)$ этой матрицы допускают асимптотику

$$\lambda_k(z) = iz\lambda_k + (A_0 e_k, g_k) + O(1/z), \quad k = 1, \dots, n, \quad (16)$$

где, напомним, λ_k – собственные значения матрицы D_0 .

Во-вторых, при всех z , близких к z_0 , матрица (14) имеет простое собственное значение $\lambda = \lambda(z)$, $\lambda(z_0) = i\omega_0$, допускающее в точке $z = z_0$ тейлоровское разложение

$$\lambda(z) = i\omega_0 + \lambda_1(z - z_0) + \lambda_2(z - z_0)^2 + \dots, \quad \lambda_1 = i(D_0 a, b), \quad \lambda_2 = i(D_0 a_1, b). \quad (17)$$

Здесь a – собственный вектор матрицы $A_0 + iz_0 D_0$, отвечающий собственному значению $\lambda = i\omega_0$ и нормированный условием $(a, b) = 1$, где $(A_0^* - iz_0 D_0^*)b = -i\omega_0 b$, а вектор a_1 – решение линейной системы

$$(A_0 + iz_0 D_0 - i\omega_0 I)a_1 = i(D_0 a, b)a - iD_0 a, \quad (18)$$

удовлетворяющее условию $(a_1, b) = 0$.

Из всей совокупности требований, наложенных нами на матрицу $\mathcal{D}(z)$, автоматически следует, что

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_2 \leq 0, \quad (A_0 e_k, g_k) \leq 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Тем самым естественным образом возникает очередное ограничение, характеризующее некоторую общность положения.

УСЛОВИЕ 3. Предположим, что

$$\operatorname{Re} \lambda_2 < 0, \quad (A_0 e_k, g_k) < 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (20)$$

Обращаем внимание, что фигурирующее в (19) равенство $\operatorname{Re} \lambda_1 = 0$ описывает некоторую особенность. А именно при выполнении условий (19), (20) кривая $\lambda = \lambda(z)$, $|z - z_0| \ll 1$, на комплексной плоскости переменной λ касается мнимой оси в точке $z = z_0$. Забегая вперед, отметим, что указанная особенность может реализоваться только для матриц размера $n \times n$ при $n \geq 3$ (соответствующий анализ проводится в разделе 4). Кроме того, теперь становится понятной роль параметра ε : он характеризует “отход” от рассматриваемой особенности. Точнее говоря, возмущения порядка ε в (12) должны удовлетворять следующему требованию.

УСЛОВИЕ 4. Имеет место неравенство $\operatorname{Re}((A_1 + iz_0 D_1)a, b) > 0$.

Заключительное ограничение касается фигурирующих в (13) нелинейных слагаемых $F_2(u, u)$ и $F_3(u, u, u)$.

УСЛОВИЕ 5. Пусть выполняется неравенство $\operatorname{Re} d < 0$, где

$$d = 2(F_2(c_0, a), b) + 2(F_2(c_2, \bar{a}), b) + 3(F_3(a, a, \bar{a}), b), \quad (21)$$

$$c_0 = -2A_0^{-1}F_2(a, \bar{a}), \quad c_2 = (2i\omega_0 I - A_0 - 2iz_0 D_0)^{-1}F_2(a, a). \quad (22)$$

Поставим вопрос о существовании и устойчивости у краевой задачи (12) при условиях 1–5 периодических решений типа бегущих волн (см. формулы (10)). В связи с этим обратимся к аналогичному (11) обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\sigma \frac{du}{d\theta} = F(u, \varepsilon) + \frac{z_0}{2\pi}(1 + \delta\sqrt{\varepsilon})(D_0 + \varepsilon D_1) \frac{du}{d\theta}, \quad (23)$$

где параметр δ принимает дискретные значения:

$$\delta = \delta_p(\varepsilon, \mu), \quad \delta_p(\varepsilon, \mu) = \frac{2\pi\mu p - z_0}{z_0\sqrt{\varepsilon}}. \quad (24)$$

Однако при исследовании проблемы существования бегущих волн (10) удобно считать, что δ в (23) непрерывно меняется на некотором отрезке $[\delta_1, \delta_2]$. Действительно, предположим, что при $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$ существует пара функций

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \delta), \quad u = u(\theta, \varepsilon, \delta), \quad u(\theta + 1, \varepsilon, \delta) \equiv u(\theta, \varepsilon, \delta), \quad (25)$$

обращающих уравнение (23) в тождество. Тогда, как нетрудно заметить, исходная краевая задача (12) допускает серию бегущих волн

$$u = u(\theta, \varepsilon, \delta) \Big|_{\theta=\sigma_p(\varepsilon, \mu)t+px, \delta=\delta_p(\varepsilon, \mu)}, \quad \sigma_p(\varepsilon, \mu) = \sigma(\varepsilon, \delta) \Big|_{\delta=\delta_p(\varepsilon, \mu)}, \quad (26)$$

где $\delta_p(\varepsilon, \mu)$ – значения (24), а номера p удовлетворяют неравенствам

$$\frac{z_0}{2\pi\mu}(1 + \delta_1\sqrt{\varepsilon}) \leq p \leq \frac{z_0}{2\pi\mu}(1 + \delta_2\sqrt{\varepsilon}). \quad (27)$$

Отметим также, что в случае $\mu/\sqrt{\varepsilon} \ll 1$ количество указанных значений p асимптотически велико (имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}/\mu$).

Итак, вопрос о существовании бегущих волн (26), (27) сводится к отысканию функций (25). Для формулировки соответствующего строгого результата введем в рассмотрение квадратичный полином

$$R(\delta) = \operatorname{Re}((A_1 + iz_0 D_1)a, b) + z_0^2 \delta^2 \operatorname{Re}[i(D_0 a_1, b)] \quad (28)$$

и заметим, что в силу неравенств $\operatorname{Re}((A_1 + iz_0 D_1)a, b) > 0$, $\operatorname{Re}[i(D_0 a_1, b)] < 0$ (см. условия 3, 4) он имеет два корня $\delta = \pm \delta_*$, где

$$\delta_* = \sqrt{-\frac{\operatorname{Re}((A_1 + iz_0 D_1)a, b)}{z_0^2 \operatorname{Re}[i(D_0 a_1, b)]}}.$$

ТЕОРЕМА 1. *По любому отрезку $[\delta_1, \delta_2] \subset (-\delta_*, \delta_*)$ можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta_1, \delta_2) > 0$, что при всех $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_2$ существует пара функций (25), достаточно гладко зависящих от переменных $\sqrt{\varepsilon}$, δ , θ и удовлетворяющих системе (23). Для этих функций справедливы разложения в ряд Тейлора*

$$u(\theta, \varepsilon, \delta) = \sqrt{\varepsilon} \xi_0 (a e^{2\pi i \theta} + \bar{a} e^{-2\pi i \theta}) + O(\varepsilon), \quad \sigma(\varepsilon, \delta) = \frac{\omega_0}{2\pi} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (29)$$

где $\xi_0 = \sqrt{-R(\delta)/\operatorname{Re} d}$, $R(\delta)$ – полином (28), d – величина (21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сформулируем сначала алгоритм построения асимптотики функций (25). В связи с этим подставим в систему (23) ряды по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\sigma = \sigma_0 + \sqrt{\varepsilon} \sigma_1 + \varepsilon \sigma_2 + \dots, \quad u = \sqrt{\varepsilon} u_0(\theta) + \varepsilon u_1(\theta) + \varepsilon^{3/2} u_2(\theta) + \dots, \quad (30)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad u_0(\theta) = \xi_0 (a e^{2\pi i \theta} + \bar{a} e^{-2\pi i \theta}), \quad (31)$$

а амплитуда $\xi_0 \in \mathbb{R}$ пока произвольна. Привлекая далее тейлоровское разложение (13) и приравнявая в левой и правой частях получившегося выражения коэффициенты при одинаковых степенях ε , приходим к рекуррентной последовательности линейных неоднородных систем вида

$$\mathcal{L}(u_k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} (\omega_0 I - z_0 D_0) \frac{du_k}{d\theta} - A_0 u_k = f_k(\theta), \quad k = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Неизвестные постоянные σ_1 , σ_2 , ξ_0 и т. д. определяем из условий разрешимости этих уравнений в классе тригонометрических многочленов от переменной $2\pi\theta$.

При $k = 1$ в силу равенства

$$f_1(\theta) = F_2(u_0, u_0) + \frac{z_0 \delta}{2\pi} D_0 \frac{du_0}{d\theta} - \sigma_1 \frac{du_0}{d\theta}$$

и соотношений (31) неоднородность в (32) задается формулой

$$f_1(\theta) = \gamma_{1,0} + \gamma_{1,1} e^{2\pi i \theta} + \bar{\gamma}_{1,1} e^{-2\pi i \theta} + \gamma_{1,2} e^{4\pi i \theta} + \bar{\gamma}_{1,2} e^{-4\pi i \theta}, \quad (33)$$

где

$$\gamma_{1,0} = 2\xi_0^2 F_2(a, \bar{a}), \quad \gamma_{1,1} = \delta z_0 \xi_0 i D_0 a - 2\pi i \xi_0 \sigma_1 a, \quad \gamma_{1,2} = \xi_0^2 F_2(a, a). \quad (34)$$

Что касается функции $u_1(\theta)$, то ее ищем в виде аналогичной (33) суммы нулевой, первых и вторых гармоник с коэффициентами $\beta_{1,r}$, $r = 0, 1, 2$. На этом пути для указанных коэффициентов получаются линейные неоднородные системы

$$(ir\omega_0 I - A_0 - irz_0 D_0)\beta_{1,r} = \gamma_{1,r}, \quad r = 0, 1, 2. \quad (35)$$

Отметим сразу, что в силу условия 2 на спектр матрицы (14) в случае $r = 0, 2$ эти системы однозначно разрешимы.

Новые черты возникают при $r = 1$. Действительно, поскольку матрица $\mathcal{D}(z_0)$ имеет простое собственное значение $\lambda = i\omega_0$, соответствующая система (35) оказывается вырожденной. Условие ее разрешимости записывается в виде

$$(\gamma_{1,1}, b) = 0. \quad (36)$$

Учитывая далее в (36) явное выражение для $\gamma_{1,1}$ (см. формулы (34)) и тот факт, что в силу (17), (19) величина $(D_0 a, b)$ является вещественной, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{z_0 \delta}{2\pi} (D_0 a, b) \in \mathbb{R}, \\ u_1 &= \delta z_0 \xi_0 (a_1 e^{2\pi i \theta} + \bar{a}_1 e^{-2\pi i \theta}) + \xi_0^2 (c_0 + c_2 e^{4\pi i \theta} + \bar{c}_2 e^{-4\pi i \theta}) + \\ &\quad + \xi_1 (a e^{2\pi i \theta} + \bar{a} e^{-2\pi i \theta}), \end{aligned} \quad (37)$$

где, напомним, a_1 – решение системы (18), c_0, c_2 – векторы (22). Что касается амплитуды $\xi_1 \in \mathbb{R}$, то, как и ξ_0 , она пока произвольна.

При $k = 2$ в силу формулы

$$\begin{aligned} f_2(\theta) &= A_1 u_0 + 2F_2(u_0, u_1) + F_3(u_0, u_0, u_0) + \\ &\quad + \frac{z_0 \delta}{2\pi} D_0 \frac{du_1}{d\theta} + \frac{z_0}{2\pi} D_1 \frac{du_0}{d\theta} - \sigma_1 \frac{du_1}{d\theta} - \sigma_2 \frac{du_0}{d\theta} \end{aligned} \quad (38)$$

и уже известных соотношений (31), (37) неоднородность f_2 представляет собой линейную комбинацию гармоник $e^{\pm 2\pi i r \theta}$, $r = 0, 1, 2, 3$. В том же виде ищем и функцию u_2 . На этом пути для ее коэффициентов при гармониках с номерами $r = 0, 2, 3$ получаются невырожденные линейные неоднородные системы вида (35). В случае $r = 1$ возникает аналогичное (36) условие разрешимости, которое будем рассматривать как уравнение для отыскания имеющихся в запасе постоянных $\xi_0, \sigma_2 \in \mathbb{R}$.

Опираясь на формулы (31), (37), (38), нетрудно заметить, что данное уравнение преобразуется к виду

$$[(A_1 a, b) + iz_0 (D_1 a, b) + iz_0^2 \delta^2 (D_0 a_1, b) - 2\pi i \sigma_2] \xi_0 + d \xi_0^3 = 0, \quad (39)$$

где d – величина (21). Отсюда, принимая во внимание неравенство $R(\delta) > 0$, справедливое при всех $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$, и неравенство $\operatorname{Re} d < 0$, находим

$$\xi_0 = \sqrt{-\frac{R(\delta)}{\operatorname{Re} d}}, \quad 2\pi \sigma_2 = \operatorname{Im} [(A_1 a, b) + iz_0 (D_1 a, b) + iz_0^2 \delta^2 (D_0 a_1, b)] + \xi_0^2 \operatorname{Im} d. \quad (40)$$

Необходимо отметить, что описанный алгоритм отыскания коэффициентов рядов (30) может быть продолжен неограниченно. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся индукцией по k . А именно предположим, что уже пройдены первые $k_0 - 1$ шагов, т.е. найдены $\sigma_k, u_k(\theta)$ при $k \leq k_0 - 1$, где $k_0 \geq 3$. Подчеркнем, что каждая из вектор-функций $u_k(\theta)$, $k \leq k_0 - 1$, содержит слагаемое вида

$$\xi_k(ae^{2\pi i\theta} + \bar{a}e^{-2\pi i\theta}), \quad \xi_k \in \mathbb{R}, \quad (41)$$

причем все постоянные ξ_k при $k \leq k_0 - 3$ уже известны, а значения ξ_{k_0-2} и ξ_{k_0-1} пока произвольны. Кроме того, функции u_{k_0-2}, u_{k_0-1} имеют структуру

$$\begin{aligned} u_{k_0-2} &= \xi_{k_0-2}(ae^{2\pi i\theta} + \bar{a}e^{-2\pi i\theta}) + u_{k_0-2}^0(\theta), \\ u_{k_0-1} &= \delta z_0 \xi_{k_0-2}(a_1 e^{2\pi i\theta} + \bar{a}_1 e^{-2\pi i\theta}) + 2\xi_0 \xi_{k_0-2}(c_0 + c_2 e^{4\pi i\theta} + \bar{c}_2 e^{-4\pi i\theta}) + \\ &\quad + \xi_{k_0-1}(ae^{2\pi i\theta} + \bar{a}e^{-2\pi i\theta}) + u_{k_0-1}^0(\theta), \end{aligned} \quad (42)$$

где остатки $u_{k_0-2}^0(\theta)$ и $u_{k_0-1}^0(\theta)$ не зависят от ξ_{k_0-2}, ξ_{k_0-1} . Из сделанных выше построений вытекает, что именно такая ситуация реализуется при $k_0 = 3$. Тем самым заложена база индукции.

Перейдем теперь к шагу с номером k_0 . В этом случае рассмотрению подлежит система (32) с неоднородностью

$$\begin{aligned} f_{k_0}(\theta) &= A_1 u_{k_0-2} + 2F_2(u_{k_0-1}, u_0) + 2F_2(u_{k_0-2}, u_1) + 3F_3(u_{k_0-2}, u_0, u_0) + \\ &\quad + \frac{z_0 \delta}{2\pi} D_0 \frac{du_{k_0-1}}{d\theta} + \frac{z_0}{2\pi} D_1 \frac{du_{k_0-2}}{d\theta} - \\ &\quad - \sigma_1 \frac{du_{k_0-1}}{d\theta} - \sigma_2 \frac{du_{k_0-2}}{d\theta} - \sigma_{k_0} \frac{du_0}{d\theta} + \Delta_{k_0}(\theta), \end{aligned} \quad (43)$$

где добавка $\Delta_{k_0}(\theta)$ не зависит от $u_{k_0-2}, u_{k_0-1}, \sigma_{k_0}$, а значит, полностью известна. Далее, пусть $\gamma_{k_0,1}$ – коэффициент функции (43) при гармонике $e^{2\pi i\theta}$. Опираясь на формулы (42), (43), нетрудно увидеть, что условие разрешимости соответствующей системы (32) в классе тригонометрических полиномов, т.е. равенство $(\gamma_{k_0,1}, b) = 0$, преобразуется к виду

$$[(A_1 a, b) + iz_0(D_1 a, b) + iz_0^2 \delta^2(D_0 a_1, b) - 2\pi i \sigma_2 + 3d\xi_0^2] \xi_{k_0-2} - 2\pi i \xi_0 \sigma_{k_0} = \Phi_{k_0}, \quad (44)$$

где постоянная $\Phi_{k_0} \in \mathbb{C}$ не зависит от ξ_{k_0-2}, ξ_{k_0-1} и σ_{k_0} .

Будем рассматривать получившееся соотношение (44) как уравнение для нахождения очередных констант $\xi_{k_0-2}, \sigma_{k_0}$. Как это обычно бывает в теории ветвления, в отличие от (39) оно линейно по $\xi_{k_0-2}, \sigma_{k_0}$. Несложный его анализ приводит к аналогичным (40) формулам

$$\xi_{k_0-2} = \frac{\operatorname{Re} \Phi_{k_0}}{2\xi_0^2 \operatorname{Re} d}, \quad 2\pi \xi_0 \sigma_{k_0} = -\operatorname{Im} \Phi_{k_0} + 2\xi_0^2 \xi_{k_0-2} \operatorname{Im} d. \quad (45)$$

После определения постоянных ξ_{k_0-2} , σ_{k_0} система (32) с номером $k = k_0$ становится разрешимой в классе тригонометрических полиномов от аргумента $2\pi\theta$, а для ее решения u_{k_0} получается аналогичное (42) представление

$$u_{k_0} = \delta z_0 \xi_{k_0-1} (a_1 e^{2\pi i \theta} + \bar{a}_1 e^{-2\pi i \theta}) + 2 \xi_0 \xi_{k_0-1} (c_0 + c_2 e^{4\pi i \theta} + \bar{c}_2 e^{-4\pi i \theta}) + \xi_{k_0} (a e^{2\pi i \theta} + \bar{a} e^{-2\pi i \theta}) + u_{k_0}^0(\theta)$$

с не зависящей от ξ_{k_0-1} , ξ_{k_0} добавкой $u_{k_0}^0(\theta)$. Таким образом, сделан шаг индукции и, следовательно, алгоритм отыскания коэффициентов рядов (30) можно неограниченно продолжать.

Приступим к обоснованию изложенного алгоритма. С этой целью подставим в уравнение (23) соотношения

$$\sigma = \sum_{k=0}^{k_0-1} \varepsilon^{k/2} \sigma_k + \varepsilon^{k_0/2} \tilde{\sigma}, \quad u = \sum_{k=0}^{k_0-1} \varepsilon^{(k+1)/2} u_k(\theta) + \varepsilon^{(k_0+1)/2} h,$$

где $k_0 \geq 3$, а σ_k и $u_k(\theta)$ при $k \leq k_0 - 1$ — уже найденные члены рядов (30). Считаем также, что в аналогичных (42) формулах слагаемое (41) при $k = k_0 - 1$ отсутствует, т. е. $\xi_{k_0-1} = 0$, а постоянная ξ_{k_0-2} заменена на $\xi \in \mathbb{R}$. В результате мы приходим к краевой задаче относительно h :

$$\mathcal{L}(h) = G(\theta, h, \tilde{\sigma}, \tilde{\xi}, \varepsilon), \quad h(\theta + 1) = h(\theta), \quad (46)$$

где $\mathcal{L}$ — дифференциальный оператор из (32), а неоднородность G задается равенством

$$G = - \left(\sum_{k=1}^{k_0-1} \varepsilon^{k/2} \sigma_k + \varepsilon^{k_0/2} \tilde{\sigma} \right) \frac{dh}{d\theta} + \frac{z_0}{2\pi} (\varepsilon D_1 + \delta \sqrt{\varepsilon} D_0 + \delta \varepsilon^{3/2} D_1) \frac{dh}{d\theta} + f_{k_0}(\theta, \tilde{\sigma}, \tilde{\xi}) + \sqrt{\varepsilon} \Delta(\theta, h, \tilde{\sigma}, \tilde{\xi}, \varepsilon). \quad (47)$$

Подчеркнем, что в формуле (47) вектор-функция $f_{k_0}(\theta, \tilde{\sigma}, \tilde{\xi})$ определяется соотношением (43), в котором следует положить $\xi_{k_0-1} = 0$ и заменить ξ_{k_0-2} на ξ и σ_{k_0} на $\tilde{\sigma}$. Что касается периодической по θ с периодом 1 добавки $\Delta(\theta, h, \tilde{\sigma}, \tilde{\xi}, \varepsilon)$, то ее вид несуществен. Важно лишь, что она является достаточно гладкой по совокупности переменных $\theta, h, \tilde{\sigma}, \tilde{\xi}, \sqrt{\varepsilon}$.

Для анализа краевой задачи (46) необходимо знать некоторые свойства оператора $\mathcal{L}$. Для их описания обратимся к введенному в разделе 1 пространству E и обозначим через E_0 его подпространство, задающееся равенством

$$E_0 = \{h(\theta) \in E: \operatorname{Re} l(h) = \operatorname{Im} l(h) = 0\}, \quad (48)$$

где

$$l(h) = \int_0^1 (h(\theta), b) e^{-2\pi i \theta} d\theta. \quad (49)$$

Убедимся, что при любой функции $\varphi(\theta)$ из подпространства E_0 уравнение

$$\mathcal{L}(h) = \varphi \quad (50)$$

имеет единственное решение h такое, что $h \in E_0$, $dh/d\theta \in E_0$ и выполняется оценка

$$\|h\|_E + \left\| \frac{dh}{d\theta} \right\|_E \leq M \|\varphi\|_E \quad (51)$$

с некоторой универсальной (не зависящей от φ) постоянной $M > 0$.

При анализе уравнения (50) воспользуемся методом Фурье по системе функций $e^{2\pi i k \theta}$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. подставим в него аналогичные (5) соотношения

$$\begin{aligned} h &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{2\pi i k \theta}, & \varphi &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k e^{2\pi i k \theta}, \\ & & & k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (52)$$

$$h_k = \int_0^1 h(\theta) e^{-2\pi i k \theta} d\theta, \quad \varphi_k = \int_0^1 \varphi(\theta) e^{-2\pi i k \theta} d\theta,$$

В результате приходим к серии линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$(ik(\omega_0 I - z_0 D_0) - A_0) h_k = \varphi_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (53)$$

Заметим далее, что при $k \neq \pm 1$ в силу условия 2 на спектр матрицы (14) имеем $\det(ik(\omega_0 I - z_0 D_0) - A_0) \neq 0$. В случае $k = \pm 1$ соответствующие системы (53) являются вырожденными. Но, поскольку $\varphi_{-1} = \bar{\varphi}_1$ и $(\varphi_1, b) = 0$ (см. (48), (49)), данные системы разрешимы. В качестве их решений возьмем векторы h_1 , $h_{-1} = \bar{h}_1$, удовлетворяющие условиям нормировки $(h_1, b) = 0$, $(h_{-1}, \bar{b}) = 0$ и вследствие этого определяющиеся однозначно.

Итак, мы установили, что при любой функции $\varphi(\theta) \in E_0$ уравнение (50) имеет единственное решение, которое можно записать в виде вытекающих из (52), (53) формальных рядов

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}, \\ k \neq \pm 1}} (ik(\omega_0 I - z_0 D_0) - A_0)^{-1} \varphi_k e^{2\pi i k \theta} + h_1 e^{2\pi i \theta} + \bar{h}_1 e^{-2\pi i \theta}, \\ \frac{dh}{d\theta} &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}, \\ k \neq \pm 1}} 2\pi i k (ik(\omega_0 I - z_0 D_0) - A_0)^{-1} \varphi_k e^{2\pi i k \theta} + 2\pi i (h_1 e^{2\pi i \theta} - \bar{h}_1 e^{-2\pi i \theta}). \end{aligned}$$

Для придания этим построениям необходимой строгости обратим внимание, что в силу условия (15) справедлива серия оценок

$$\|(ik(\omega_0 I - z_0 D_0) - A_0)^{-1}\| \leq \frac{M}{1 + |k|}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq \pm 1, \quad (54)$$

с не зависящей от k постоянной $M > 0$. Учитывая далее оценки (54) в приведенных выше разложениях, убеждаемся в справедливости включений $h \in E_0$, $dh/d\theta \in E_0$ и неравенства (51).

На следующем этапе обоснования алгоритма подправим неоднородность G из (46) так, чтобы при всех h , удовлетворяющих условиям $h \in E_0$, $dh/d\theta \in E_0$, функция G принадлежала подпространству E_0 , а затем обратим оператор $\mathcal{L}$. В результате приходим к следующему уравнению в пространстве E_0 :

$$h = \mathcal{L}^{-1}(G - l(G)ae^{2\pi i\theta} - \overline{l(G)}\bar{a}e^{-2\pi i\theta}), \quad (55)$$

где l – функционал (49). Далее, опираясь на явный вид функции G (см. равенство (47)), оценку (51) и свойство $\mathcal{L}^{-1}d/d\theta = d/d\theta \mathcal{L}^{-1}$, приходим к выводу, что по переменной h правая часть равенства (55) естественным образом расширяется до ограниченного нелинейного оператора $S: E_0 \rightarrow E_0$, гладко (в смысле Фреше) зависящего от h и от вспомогательных переменных $\tilde{\sigma}, \tilde{\xi} \in \mathbb{R}$. Нетрудно увидеть, что в случае, когда $\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}$ пробегают произвольно фиксированные ограниченные множества Σ_1, Σ_2 , найдутся такие $r_0 = r_0(\Sigma_1, \Sigma_2) > 0$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Sigma_1, \Sigma_2) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ оператор S переводит в себя шар в пространстве E_0 с центром в нуле радиуса r_0 и является в этом шаре сжимающим (с константой сжатия порядка $\sqrt{\varepsilon}$). Тем самым в силу принципа сжимающих отображений оператор S допускает в упомянутом шаре единственную неподвижную точку

$$h = h_*(\theta, \tilde{\sigma}, \tilde{\xi}, \varepsilon) \in E_0, \quad (56)$$

гладко зависящую от переменных $\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}$ (в метрике пространства E). Нетрудно также показать, что ограниченными равномерно по ε являются все частные производные

$$\frac{\partial^s h_*(\theta, \tilde{\sigma}, \tilde{\xi}, \varepsilon)}{\partial \theta^s}, \quad s = 1, \dots, m,$$

при любом фиксированном m . Для доказательства этого факта наряду с (55) следует рассмотреть уравнения для $h_s = \partial^s h / \partial \theta^s$, получающиеся из уравнения (55) при дифференцировании по θ нужное число раз, и применить к системе уравнений для $h, h_s, s = 1, \dots, m$, принцип сжимающих отображений в некотором шаре пространства $E_0^{m+1} = E_0 \times \dots \times E_0$ с центром в нуле и радиусом, который не зависит от величины ε .

На завершающем этапе обоснования алгоритма найдем имеющиеся в запасе произвольные постоянные $\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}$ из уравнения

$$l(G)|_{h=h_*(\theta, \tilde{\sigma}, \tilde{\xi}, \varepsilon)} = 0.$$

Опираясь в очередной раз на соотношения (47), (49), мы убеждаемся, что в точке $\tilde{\sigma} = \sigma_{k_0}, \tilde{\xi} = \xi_{k_0-2}, \varepsilon = 0$, где $\xi_{k_0-2}, \sigma_{k_0}$ – значения (45), к этому уравнению применима теорема о неявной функции по переменным $\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}$ (более того, при $\tilde{\sigma} = \sigma_{k_0}, \tilde{\xi} = \xi_{k_0-2}, \varepsilon = 0$ оно переходит в равенство (44)). Таким образом, решая упомянутое уравнение, находим пару функций $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\varepsilon), \tilde{\xi} = \tilde{\xi}(\varepsilon)$, удовлетворяющих условиям $\tilde{\sigma}(0) = \sigma_{k_0}, \tilde{\xi}(0) = \xi_{k_0-2}$.

Подведем итог. Из проделанных построений следует, что при подстановке в уравнение (46) соотношений

$$\bar{\sigma} = \tilde{\sigma}(\varepsilon), \quad \tilde{\xi} = \tilde{\xi}(\varepsilon), \quad h = h_*(\theta, \bar{\sigma}, \tilde{\xi}, \varepsilon)|_{\bar{\sigma}=\tilde{\sigma}(\varepsilon), \tilde{\xi}=\tilde{\xi}(\varepsilon)},$$

где h_* – функция (56), получаются верные равенства. А это означает, что мы установили как существование функций (29), так и справедливость для них асимптотических представлений (30). Теорема доказана.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ БЕГУЩИХ ВОЛН

Для исследования устойчивости бегущих волн (26), (27) линеаризуем краевую задачу (12) на любой из волн и в соответствующей линейной краевой задаче выполним замену $\theta = \sigma_p(\varepsilon, \mu)t + px$, т. е. перейдем к “бегущей” пространственной переменной θ . В результате приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma(\varepsilon, \delta) \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{z_0}{2\pi} (1 + \delta\sqrt{\varepsilon})(D_0 + \varepsilon D_1) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathcal{A}(\theta, \varepsilon, \delta)u, \quad u(t, \theta + p) \equiv u(t, \theta), \quad (57)$$

где $\mathcal{A}(\theta, \varepsilon, \delta) = F'_u(u, \varepsilon)|_{u=u(\theta, \varepsilon, \delta)}$. Параметр δ , принимающий дискретные значения $\delta_p(\varepsilon, \mu)$ (см. формулу (24)), для удобства дальнейшего анализа будем считать непрерывно меняющимся на отрезке $[\delta_1, \delta_2] \subset (-\delta_*, \delta_*)$ (см. условия теоремы 1). Полагая затем в (57) $u = e^{\lambda t}h$, $\lambda \in \mathbb{C}$, приходим к спектральной задаче

$$\lambda h + \sigma(\varepsilon, \delta) \frac{dh}{d\theta} = \frac{z_0}{2\pi} (1 + \delta\sqrt{\varepsilon})(D_0 + \varepsilon D_1) \frac{dh}{d\theta} + \mathcal{A}(\theta, \varepsilon, \delta)h, \quad h(\theta + p) \equiv h(\theta). \quad (58)$$

Общее представление о характере расположения собственных значений задачи (58) можно получить (учитывая, что $\mathcal{A}(\theta, 0, \delta) = A_0$) из упрощенного ее варианта

$$\lambda h + \sigma(\varepsilon, \delta) \frac{dh}{d\theta} = \frac{z_0}{2\pi} (1 + \delta\sqrt{\varepsilon})(D_0 + \varepsilon D_1) \frac{dh}{d\theta} + A_0 h, \quad h(\theta + p) \equiv h(\theta). \quad (59)$$

Действительно, применяя к (59) метод Фурье по системе функций $e^{2\pi i k \theta / p}$, $k \in \mathbb{Z}$, убеждаемся, что спектр данной задачи состоит из собственных значений матриц

$$A_0 + iz_0\gamma(1 + \delta\sqrt{\varepsilon})(D_0 + \varepsilon D_1) - 2\pi i\gamma\sigma(\varepsilon, \delta)I, \quad \gamma = \frac{k}{p}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (60)$$

Далее, из условий, наложенных нами на матрицы D_0 и $\mathcal{D}(z)$, вытекает, что матрицы (60) заведомо являются гурвицевыми при $\gamma \neq \pm 1$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Но в то же время у них имеются так называемые критические собственные значения, которые при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow \pm 1$ стремятся к нулю.

Суммируя все вышесказанное, приходим к выводу, что проблема устойчивости бегущих волн (26), (27) сводится к анализу расположения критических собственных значений задачи (58), стремящихся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для построения их асимптотики заметим, что если λ – произвольное собственное значение данной задачи, то фигурирующее в (58) обыкновенное дифференциальное уравнение с 1-периодическими

коэффициентами имеет мультипликатор, p -я степень которого равна единице. Тем самым собственному значению λ отвечает хотя бы одна собственная функция, которая допускает представление $h = e^{2\pi i k \theta / p} v(\theta)$, где k – некоторое целое число, а $v(\theta + 1) \equiv v(\theta)$. Учитывая это обстоятельство, мы вправе выполнить в (58) замены

$$h = e^{2\pi i k \theta / p} v(\theta), \quad \lambda + i\sigma(\varepsilon, \delta)2\pi k/p \mapsto \lambda \quad (61)$$

и перейти к рассмотрению спектральной задачи

$$\begin{aligned} \Pi v \stackrel{\text{def}}{=} -\sigma(\varepsilon, \delta) \frac{dv}{d\theta} + z_0(1 + \delta\sqrt{\varepsilon})(D_0 + \varepsilon D_1) \left(i\nu v + \frac{1}{2\pi} \frac{dv}{d\theta} \right) + \mathcal{A}(\theta, \varepsilon, \delta)v = \lambda v, \\ v(\theta + 1) \equiv v(\theta), \end{aligned} \quad (62)$$

где параметр $\nu = k/p$ удобно считать меняющимся непрерывно.

Фигурирующий в (62) оператор Π будем рассматривать в пространстве H , представляющем собой комплексификацию введенного в разделе 1 пространства E . В силу соотношений (60), (61) нас интересуют собственные значения оператора Π , стремящиеся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow 0$. В связи с этим обратим внимание, что при $\varepsilon = \nu = 0$ данный оператор имеет двукратное нулевое собственное значение, которому отвечают собственные функции $e_1(\theta) = ae^{2\pi i \theta}$ и $e_2(\theta) = \bar{a}e^{-2\pi i \theta}$. Отсюда, опираясь на стандартную теорию возмущений (см., например, монографию [13]), заключаем, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$, $|\nu| \leq \nu_0$, где $\varepsilon_0 > 0$, $\nu_0 > 0$ и достаточно малы, оператор Π имеет двумерное инвариантное подпространство

$$H_0 = \text{span}\{v_1(\theta, \varepsilon, \delta, \nu), v_2(\theta, \varepsilon, \delta, \nu)\} \subset H, \quad v_j(\theta, 0, \delta, 0) \equiv e_j(\theta), \quad j = 1, 2. \quad (63)$$

Инвариантность подпространства (63) означает существование такой матрицы второго порядка $\Lambda(\varepsilon, \delta, \nu)$, $\Lambda(0, \delta, 0) = 0$, что

$$\Pi V = V \Lambda, \quad (64)$$

где в столбцах матрицы $V = V(\theta, \varepsilon, \delta, \nu)$ размера $n \times 2$ стоят базисные функции из (63).

Отметим также следующие факты. Во-первых, матрицы V и Λ можно выбрать гладко зависящими от $\sqrt{\varepsilon}$, δ , ν , так как от этих параметров гладко зависят коэффициенты оператора Π . Во-вторых, $\det \Lambda(\varepsilon, \delta, 0) \equiv 0$, поскольку при $\nu = 0$ задача (62) имеет нулевое собственное значение с собственной функцией $v = \partial u(\theta, \varepsilon, \delta) / \partial \theta$, где $u(\theta, \varepsilon, \delta)$ – функция из (25). В-третьих, справедливы тождества

$$\text{tr } \bar{\Lambda}(\varepsilon, \delta, -\nu) \equiv \text{tr } \Lambda(\varepsilon, \delta, \nu), \quad \det \bar{\Lambda}(\varepsilon, \delta, -\nu) \equiv \det \Lambda(\varepsilon, \delta, \nu).$$

Для их проверки достаточно применить к (64) операцию комплексного сопряжения и заменить ν на $-\nu$. При указанных действиях оператор Π не изменится, а вместо соотношения (64) будет выполняться аналогичное равенство с матрицами $\tilde{V} = \bar{V}(\theta, \varepsilon, \delta, -\nu)$, $\tilde{\Lambda} = \bar{\Lambda}(\varepsilon, \delta, -\nu)$. Остается заметить, что в силу единственности подпространства (63) отсюда с необходимостью следует, что матрицы Λ и $\tilde{\Lambda}$ имеют одинаковые собственные значения.

Чтобы исследовать спектр матрицы $\Lambda(\varepsilon, \delta, \nu)$, необходимо знать нескольких членов ее тейлоровского разложения по $\sqrt{\varepsilon}$, ν . Для их нахождения подставим в равенство (64) ряды

$$\begin{aligned}\Lambda &= \nu\Lambda_1 + \nu^2\Lambda_2 + \sqrt{\varepsilon}\nu\Lambda_3 + \varepsilon\Lambda_4 + \dots, \\ V &= V_0 + \nu V_1 + \sqrt{\varepsilon}V_2 + \nu^2V_3 + \sqrt{\varepsilon}\nu V_4 + \varepsilon V_5 + \dots,\end{aligned}\quad (65)$$

где $V_0 = [e_1(\theta), e_2(\theta)]$, $V_j = [v_{j,1}, v_{j,2}]$ при $j \geq 1$ и

$$\Lambda_1 = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad \Lambda_2 = \text{diag}\{\lambda_3, \lambda_4\}, \quad \Lambda_3 = \text{diag}\{\lambda_5, \lambda_6\}, \quad \Lambda_4 = \begin{pmatrix} \lambda_7 & \lambda_8 \\ \bar{\lambda}_8 & \bar{\lambda}_7 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Далее, опираясь на асимптотические представления (30) и вытекающие из них формулы

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\theta, \varepsilon, \delta) &= A_0 + \sqrt{\varepsilon}\mathcal{A}_1(\theta, \delta) + \varepsilon\mathcal{A}_2(\theta, \delta, \varepsilon), \\ \mathcal{A}_1(\theta, \delta)h &= 2F_2(u_0, h), \\ \mathcal{A}_2(\theta, \delta, 0)h &= A_1h + 2F_2(u_1, h) + 3F_3(u_0, u_0, h), \quad h \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}\quad (67)$$

будем приравнивать в получившемся выражении коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ и ν . В результате для функций $v_{j,1}$, $v_{j,2}$, $j = 1, \dots, 5$, приходим к рекуррентной последовательности линейных неоднородных уравнений вида (32), а из условий разрешимости этих уравнений в классе тригонометрических полиномов от переменной $2\pi\theta$ определяем постоянные λ_j , $j = 1, \dots, 8$.

Действуя указанным выше способом, для $v_{j,1}$, $v_{j,2}$, $j = 1, 2$, получаем уравнения

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}(v_{1,1}) &= (\lambda_1 a - iz_0 D_0 a) e^{2\pi i \theta}, \\ -\mathcal{L}(v_{1,2}) &= (\lambda_2 \bar{a} - iz_0 D_0 \bar{a}) e^{-2\pi i \theta}, \\ -\mathcal{L}(v_{2,1}) &= (2\pi i \sigma_1 a - iz_0 \delta D_0 a) e^{2\pi i \theta} - \mathcal{A}_1(\theta, \delta) a e^{2\pi i \theta}, \\ -\mathcal{L}(v_{2,2}) &= (-2\pi i \sigma_1 \bar{a} + iz_0 \delta D_0 \bar{a}) e^{-2\pi i \theta} - \mathcal{A}_1(\theta, \delta) \bar{a} e^{-2\pi i \theta},\end{aligned}$$

где $\mathcal{L}$ – оператор (32). Несложный анализ этих уравнений приводит к равенствам

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = iz_0(D_0 a, b), \\ v_{1,1} &= z_0 a_1 e^{2\pi i \theta}, & v_{1,2} &= -z_0 \bar{a}_1 e^{-2\pi i \theta}, \\ v_{2,1} &= \delta z_0 a_1 e^{2\pi i \theta} + \xi_0 c_0 + 2\xi_0 c_2 e^{4\pi i \theta}, & v_{2,2} &= \bar{v}_{2,1},\end{aligned}\quad (68)$$

где, напомним, a_1 – решение системы (18), c_0 , c_2 – векторы (22), а величина $(D_0 a, b)$ вещественна.

Приравнивая в (64) коэффициенты при ν^2 , $\sqrt{\varepsilon}\nu$, ε , для $v_{j,1}$, $v_{j,2}$, $j = 3, 4, 5$, приходим к уравнениям

$$-\mathcal{L}(v_{3,1}) = (\lambda_3 a - iz_0^2 D_0 a_1) e^{2\pi i \theta} + \lambda_1 v_{1,1},$$

$$-\mathcal{L}(v_{3,2}) = (\lambda_4 \bar{a} + iz_0^2 D_0 \bar{a}_1) e^{-2\pi i \theta} + \lambda_2 v_{1,2},$$

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}(v_{4,1}) - \sigma_1 \frac{dv_{1,1}}{d\theta} + iz_0 D_0 v_{2,1} + \frac{z_0 \delta}{2\pi} D_0 \frac{dv_{1,1}}{d\theta} + iz_0 \delta D_0 a e^{2\pi i \theta} + \mathcal{A}_1(\theta, \delta) v_{1,1} = \\ = \lambda_5 a e^{2\pi i \theta} + \lambda_1 v_{2,1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}(v_{4,2}) - \sigma_1 \frac{dv_{1,2}}{d\theta} + iz_0 D_0 v_{2,2} + \frac{z_0 \delta}{2\pi} D_0 \frac{dv_{1,2}}{d\theta} + iz_0 \delta D_0 \bar{a} e^{-2\pi i \theta} + \mathcal{A}_1(\theta, \delta) v_{1,2} = \\ = \lambda_6 \bar{a} e^{-2\pi i \theta} + \lambda_2 v_{2,2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}(v_{5,1}) - \sigma_1 \frac{dv_{2,1}}{d\theta} - 2\pi i \sigma_2 a e^{2\pi i \theta} + \frac{z_0 \delta}{2\pi} D_0 \frac{dv_{2,1}}{d\theta} + iz_0 D_1 a e^{2\pi i \theta} + \\ + \mathcal{A}_1(\theta, \delta) v_{2,1} + \mathcal{A}_2(\theta, \delta, 0) a e^{2\pi i \theta} = \\ = \lambda_7 a e^{2\pi i \theta} + \bar{\lambda}_8 \bar{a} e^{-2\pi i \theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}(v_{5,2}) - \sigma_1 \frac{dv_{2,2}}{d\theta} + 2\pi i \sigma_2 \bar{a} e^{-2\pi i \theta} + \frac{z_0 \delta}{2\pi} D_0 \frac{dv_{2,2}}{d\theta} - iz_0 D_1 \bar{a} e^{-2\pi i \theta} + \\ + \mathcal{A}_1(\theta, \delta) v_{2,2} + \mathcal{A}_2(\theta, \delta, 0) \bar{a} e^{-2\pi i \theta} = \\ = \bar{\lambda}_7 \bar{a} e^{-2\pi i \theta} + \lambda_8 a e^{2\pi i \theta}. \end{aligned}$$

Учитывая в этих уравнениях уже известные соотношения (67), (68), убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= iz_0^2 (D_0 a_1, b), & \lambda_4 &= -iz_0^2 (D_0 \bar{a}_1, \bar{b}), \\ \lambda_5 &= 2iz_0^2 \delta (D_0 a_1, b) + iz_0 \delta (D_0 a, b), & \lambda_6 &= 2iz_0^2 \delta (D_0 \bar{a}_1, \bar{b}) + iz_0 \delta (D_0 \bar{a}, \bar{b}), \\ \lambda_7 &= \lambda_8 = d \xi_0^2, \end{aligned} \quad (69)$$

где d – величина (21), ξ_0 – амплитуда из (29).

Для формулировки строгого результата об устойчивости бегущих волн (26), (27) введем в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned} Q(\delta, \nu) &= (\xi_0^2 \operatorname{Re} d + \nu^2 z_0^2 \operatorname{Re}[i(D_0 a_1, b)])^2 \times \\ &\times \{2\xi_0^2 \operatorname{Re}[i(D_0 a_1, b)\bar{d}] + \nu^2 z_0^2 |(D_0 a_1, b)|^2 - 4z_0^2 \delta^2 \operatorname{Re}^2[i(D_0 a_1, b)]\} - \\ &- 4z_0^2 \delta^2 \operatorname{Re}^2[i(D_0 a_1, b)] (\xi_0^2 \operatorname{Im} d + \nu^2 z_0^2 \operatorname{Im}[i(D_0 a_1, b)])^2. \end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что при всех $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$ и $\nu \geq 0$ выполнено условие*

$$Q(\delta, \nu) > 0. \quad (70)$$

Тогда бегущие волны (26), (27), существование которых обеспечивается теоремой 1, экспоненциально орбитально устойчивы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из способа получения и установленных выше свойств краевой задачи (62) следует, что за устойчивость бегущей волны (26) с любым номером p из семейства (27) отвечает в конечном итоге расположение спектра матриц

$$\Lambda_{p,k} = \Lambda(\varepsilon, \delta, \nu)|_{\delta=\delta_p(\varepsilon, \mu), \nu=k/p}, \quad (71)$$

где $k \in \mathbb{Z}$ таково, что $|k|/p \leq \nu_0$, а $\nu_0 > 0$ достаточно мало.

Далее, из формул (65), (66), (68), (69) и отмеченных выше общих свойств матрицы $\Lambda(\varepsilon, \delta, \nu)$ вытекают следующие факты. Во-первых, при $k = 0$ одно собственное значение матрицы (71) равно нулю, а второе отрицательно (существование нулевого собственного значения вполне естественно, так как краевая задача (57) есть линеаризация на цикле); во-вторых, при $k \neq 0$ гурвицевость матриц $\Lambda_{p,k}$ вытекает из неравенства

$$Q\left(\delta, \frac{\nu}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\Big|_{\delta=\delta_p(\varepsilon, \mu), \nu=k/p} > 0,$$

справедливость которого, в свою очередь, гарантирована условием (70). Теорема доказана.

Отдельного упоминания заслуживает вопрос о реализуемости условия (70). Как нетрудно заметить, в случае

$$\operatorname{Re}[i(D_0 a_1, b)\bar{d}] > 0 \quad (72)$$

оно заведомо справедливо при $\delta = 0$, $\nu \geq 0$. Таким образом, выбирая в теореме 1 значения δ_1 и δ_2 достаточно близкими к нулю, мы добиваемся одновременного выполнения неравенств $R(\delta) > 0$ и $Q(\delta, \nu) > 0$ при $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$, $\nu \geq 0$. А это, в свою очередь, означает, что при условиях 1–5, при дополнительном ограничении (72) и при $\mu/\sqrt{\varepsilon} \ll 1$ в краевой задаче (12) наблюдается явление буферности: сосуществуют асимптотически много (порядка $\sqrt{\varepsilon}/\mu$) устойчивых бегущих волн (26), (27).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обратимся к вопросу о реализуемости требований, наложенных нами на матрицу $\mathcal{D}(z)$. Убедимся, что они заведомо не выполняются при $u \in \mathbb{R}^n$ для $n = 2$. Действительно, в двумерном случае без ограничения общности можно считать, что упомянутая матрица имеет вид

$$\mathcal{D}(z) = A_0 + izD_0, \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad d_1 \neq d_2. \quad (73)$$

Условия $(A_0 e_k, g_k) < 0$, $k = 1, 2$, в данной ситуации эквивалентны неравенствам

$$a_{11} < 0, \quad a_{22} < 0, \quad (74)$$

а условие гурвицевости матрицы (73) при $z \geq 0$ приводит к оценкам

$$a_{11} + a_{22} < 0, \quad \det A_0 > 0, \quad (a_{11} + a_{22})^2 \det A_0 + z^2 a_{11} a_{22} (d_1 - d_2)^2 > 0. \quad (75)$$

Остается заметить, что требования (74), (75) исключают возможность того, что они не выполнены при некотором $z = z_0 > 0$ и справедливы при остальных $z \geq 0$.

Пусть теперь $n \geq 3$. В этом случае сначала рассмотрим пару матриц $A_{0,0}$, $D_{0,0}$, для которых интересующая нас особенность имеет место при $z_0 = 0$. Указанные матрицы должны удовлетворять следующей серии ограничений.

УСЛОВИЕ 1'. Предположим, что матрица $A_{0,0}$ имеет простую пару чисто мнимых собственных значений $\lambda = \pm i\omega_{0,0}$, $\omega_{0,0} > 0$, которой отвечают собственные векторы a_0 и $\bar{a}_0$, нормированные условиями $(a_0, b_0) = 1$, $(\bar{a}_0, b_0) = 0$, где $A_{0,0}^* b_0 = -i\omega_{0,0} b_0$. При этом мы считаем, что остальные собственные значения матрицы $A_{0,0}$ лежат в левой комплексной полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0\}$.

УСЛОВИЕ 2'. Будем считать, что матрица $D_{0,0}$ имеет простые собственные значения $\lambda_k \in \mathbb{R}$, которым отвечают собственные векторы e_k , $k = 1, \dots, n$. Как и в условии 1, предположим, что эти собственные векторы нормированы равенствами $(e_k, g_k) = 1$, где $D_{0,0}^* g_k = \lambda_k g_k$, $k = 1, \dots, n$. Считаем также, что $(A_{0,0} e_k, g_k) < 0$ для всех $k = 1, \dots, n$.

Для формулировки следующего ограничения введем в рассмотрение аналогичную (14) матрицу

$$\mathcal{D}_0(z) = A_{0,0} + izD_{0,0}, \quad z \geq 0, \quad (76)$$

и остановимся на некоторых ее свойствах, вытекающих из условий 1', 2'.

Заметим, во-первых, что в силу условия 1' при любых достаточно малых значениях параметра z эта матрица имеет собственные значения $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$ такие, что $\lambda_1(z) = \lambda_2(-z)$, $\lambda_1(0) = i\omega_{0,0}$. Несложные выкладки показывают, что для собственного значения $\lambda_1(z)$ в точке $z = 0$ справедливо тейлоровское разложение

$$\begin{aligned} \lambda_1(z) &= i\omega_{0,0} + \lambda_{1,1}z + \lambda_{1,2}z^2 + \dots, \\ \lambda_{1,1} &= i(D_{0,0}a_0, b_0), \quad \lambda_{1,2} = i(D_{0,0}a_1, b_0), \end{aligned} \quad (77)$$

где теперь a_1 – решение линейной системы

$$(A_{0,0} - i\omega_{0,0}I)a_1 = i(D_{0,0}a_0, b_0)a_0 - iD_{0,0}a_0,$$

нормированное условием $(a_1, b_0) = 0$.

Во-вторых, согласно условию 2' при $z \gg 1$ собственные значения $\lambda_k(z)$ матрицы (76) допускают аналогичную (16) асимптотику

$$\lambda_k(z) = iz\lambda_k + (A_{0,0}e_k, g_k) + O(1/z), \quad k = 1, \dots, n,$$

и вследствие этого имеют отрицательные действительные части.

УСЛОВИЕ 3'. Предположим, что $\operatorname{Re} \lambda_{1,1} = 0$, $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$, а также будем считать, что при любом $z > 0$ матрица (76) является гурвицевой.

Интересно отметить, что перечисленные ограничения не могут выполняться при $n = 2$. Действительно, в двумерном случае $\operatorname{Re}[\operatorname{tr} \mathcal{D}_0(z)] = 0$, поэтому матрица $\mathcal{D}_0(z)$ не может быть гурвицевой. Однако уже при $n = 3$ ситуация иная. Чтобы убедиться в этом, возьмем

$$A_{0,0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_{0,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Нетрудно проверить, что собственные значения матрицы $A_{0,0}$ из (78) задаются равенствами $\lambda = -3$, $\lambda = \pm i\sqrt{3}$, и все ограничения, касающиеся матрицы $D_{0,0}$, здесь выполняются автоматически. Далее, обратимся к характеристическому уравнению для матрицы (76), имеющему в рассматриваемой ситуации вид

$$(\lambda + 1)^3 + z^2(\lambda + 1) + 8 = 0. \quad (79)$$

Заметим, что в этом уравнении для коэффициентов разложения (77) справедливы равенства $\lambda_{1,1} = 0$, $\lambda_{1,2} = -(1 - i\sqrt{3})/12$. Что касается самого полинома (79), то при всех $z > 0$ он очевидным образом является гурвицевым.

Как уже было сказано выше, при условиях 1' – 3' для матрицы (76) интересующая нас особенность возникает при $z = 0$. Чтобы “сдвинуть” эту особенность в ненулевое значение $z = z_0$, воспользуемся следующей конструкцией.

Во-первых, рассмотрим возмущенную матрицу

$$A_{0,0} + iz(D_{0,0} + \alpha D_{0,1}), \quad 0 < \alpha \ll 1,$$

где матрица $D_{0,1}$ такова, что $\operatorname{Re}[i(D_{0,1}a_0, b_0)] > 0$. Заметим, что при малых z эта матрица по-прежнему имеет пару собственных значений $\lambda_1(z, \alpha)$ и $\lambda_2(z, \alpha)$ таких, что $\lambda_1(z, \alpha) = \bar{\lambda}_2(-z, \alpha)$, с асимптотикой

$$\lambda_1(z, \alpha) = i\omega_{0,0} + \lambda_{1,1}z + \lambda_{1,2}z^2 + \lambda_{1,3}\alpha z + O(z^2\alpha + \alpha^2z + z^3), \quad z \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad (80)$$

где постоянные $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$ те же, что и в (77), а $\lambda_{1,3} = i(D_{0,1}a_0, b_0)$, $\operatorname{Re} \lambda_{1,3} > 0$.

Во-вторых, введем в рассмотрение функцию

$$\psi(\varkappa, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha^2} \operatorname{Re} \lambda_1(z, \alpha) \Big|_{z=\varkappa\alpha}, \quad \varkappa = \text{const} \geq 0, \quad (81)$$

которая в силу формулы (80) достаточно гладко зависит от $\varkappa$, α и при $\alpha \rightarrow 0$ допускает тейлоровское разложение

$$\psi(\varkappa, \alpha) = \operatorname{Re}[i(D_{0,1}a_0, b_0)]\varkappa + \operatorname{Re}[i(D_{0,0}a_1, b_0)]\varkappa^2 + O(\alpha). \quad (82)$$

Опираясь на это разложение, нетрудно вывести, что уравнение $\psi'_{\varkappa}(\varkappa, \alpha) = 0$ имеет единственное решение

$$\varkappa = \varkappa_*(\alpha), \quad \varkappa_*(\alpha) = \varkappa_* + O(\alpha), \quad \varkappa_* = -\frac{\operatorname{Re}[i(D_{0,1}a_0, b_0)]}{2 \operatorname{Re}[i(D_{0,0}a_1, b_0)]} > 0, \quad (83)$$

причем

$$\begin{aligned} \psi_{\max}(\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \psi(\varkappa, \alpha)|_{\varkappa=\varkappa_*(\alpha)} = \psi_{\max}^* + O(\alpha), \quad \psi_{\max}^* = \frac{1}{2}\varkappa_* \operatorname{Re}[i(D_{0,1}a_0, b_0)] > 0, \\ \psi''_{\varkappa\varkappa}(\varkappa, \alpha)|_{\varkappa=\varkappa_*(\alpha)} &= 2 \operatorname{Re}[i(D_{0,0}a_1, b_0)] + O(\alpha) < 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Остается добавить, что матрица

$$\mathcal{D}(z) = A_{0,0} - \alpha^2 \psi_{\max}(\alpha)I + iz(D_{0,0} + \alpha D_{0,1}) \quad (85)$$

является искомой, т. е. удовлетворяет условиям 1–3. Действительно, из проделанных выше построений (см. соотношения (81)–(85)) вытекают следующие факты. Во-первых, при $z = z_0(\alpha)$, где $z_0(\alpha) = \alpha \varkappa_*(\alpha) > 0$, матрица (85) имеет простое собственное значение $\lambda = i\omega_0$, причем

$$\omega_0 = \operatorname{Im} \lambda_1(z, \alpha)|_{z=z_0(\alpha)} = \omega_{0,0} + O(\alpha) > 0. \quad (86)$$

Все остальные собственные значения этой матрицы находятся в левой комплексной полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Во-вторых, при $z \geq 0$, $z \neq z_0$ эта матрица оказывается гурвицевой и выполняются условия (20) (в нашем случае данные свойства являются следствиями условий 2', 3', наложенных на матрицу (76)). И наконец, в-третьих, неравенство (15) здесь также имеет место (оно справедливо в силу формулы (86) и малости величины $z_0(\alpha)$). Таким образом, проблема реализуемости условий 1–3 при $u \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ решена в полном объеме.

Благодарности. Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (проект № 2014/258-1875).

Список литературы

- [1] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*, **46:10** (2006), 1809–1821.
- [2] Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Многоликий хаос*, Физматлит, М., 2012.
- [3] T. Kapitaniak, L. O. Chua, *Internat. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **4:2** (1994), 477–482.
- [4] I. P. Mariño, V. Pérez-Muñuzuri, V. Pérez-Villar, E. Sánchez, M. A. Matías, *Physica D*, **128:2–4** (1999), 224–235.

- [5] P. Perlikowski, S. Yanchuk, M. Wolfrum, A. Stefanski, P. Mosiolek, T. Kapitaniak, *Chaos*, **20**:1 (2010), 013111, 10 pp.
- [6] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *ТМФ*, **175**:1 (2013), 62–83.
- [7] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:2 (2013), 53–96.
- [8] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Дифференц. уравнения*, **49**:10 (2013), 1227–1244.
- [9] Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн, *Теория и приложения бифуркации рождения цикла*, Мир, М., 1985.
- [10] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений*, Физматлит, М., 2004.
- [11] Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.
- [12] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *ТМФ*, **158**:2 (2009), 292–311.
- [13] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

Поступила в редакцию 3.04.2014