Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Паньженский, О. П. Сурина, Финслерово обобщение метрики Тамма, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 2, 186–197

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8693>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:22:53

© 2016 г. В. И. Паньженский*, О. П. Сурина*

ФИНСЛЕРОВО ОБОБЩЕНИЕ МЕТРИКИ ТАММА

Изучаются многообразия финслерова типа, касательные (псевдо)римановы пространства которых инвариантны относительно (псевдо)ортогональной группы. Строится связность Картана, исследуются геодезические и экстремали, а также движения. Установлено, что если метрический тензор пространства является однородным тензором нулевой степени по координатам касательного вектора, то метрика касательного пространства реализуется на конусе вращения. Описано строение геодезических на конусе как траекторий движения свободной частицы в центральном поле.

Ключевые слова: финслеровы пространства Тамма, связность Картана, движения, геодезические.

DOI: 10.4213/tmf8693

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1965 году на конференции по физике элементарных частиц, проходившей в Киото, академик Тамм сделал доклад [1], посвященный построению квантовой теории поля в кривом импульсном пространстве. Указывая на ограниченность релятивистской теории, в которой постулируется, что пространство импульсов является плоским пространством Минковского, и на ряд непреодолимых в рамках этой теории трудностей (например, проблема расходимостей), Тамм предложил считать пространство импульсов псевдоримановым пространством непостоянной кривизны, метрика которого инвариантна относительно собственных преобразований Лоренца. В таком пространстве всегда можно выбрать систему координат так, что метрический тензор пространства будет иметь вид [1]

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^0 f(p^2) + p_\alpha p_\beta \varphi(p^2),$$

где f и φ – произвольные функции от $p^2 = g_{\alpha\beta}^0 p^\alpha p^\beta$, $p^\alpha = g_0^{\alpha\sigma} p_\sigma$, $p_\alpha = g_{\alpha\sigma}^0 p^\sigma$, $g_{\alpha\beta}^0$ – обычный тензор Минковского. Вид функций f и φ выбирается исходя из физических требований. Таким образом, “... в основу модификации теории поля можно положить чисто геометрический принцип, постулируя определенную геометрию пространства импульсов и приводя в соответствие с этой геометрией все параметры, входящие в выражения для наблюдаемых величин” [2]. Однако при развитии

* Пензенский государственный университет, Пенза, Россия. E-mail: kaf-geom@yandex.ru

данного варианта теории возникают трудности, связанные с отсутствием предельного перехода к плоскому пространству. В работе [2] авторы полагают, что эти трудности, возможно, удастся преодолеть путем выбора метрического тензора и не исключено, что более подходящей является евклидова, а не псевдоевклидова форма обычной теории.

В физике пространства импульсов отождествляются с кокасательными пространствами базисного многообразия точек, которое считается гладким n -мерным многообразием. Наиболее естественная метризация этого многообразия достигается путем введения римановой или псевдоримановой метрики, которая, в свою очередь, согласно ОТО Эйнштейна определяется распределением и движением материи. Касательные пространства этого многообразия являются евклидовыми или псевдоевклидовыми пространствами, в частности пространствами Минковского.

Если мы хотим сформулировать единую геометрическую теорию, включающую в себя гравитацию Эйнштейна и идею Тамма о кривом импульсном пространстве, мы должны метризовать базисное многообразие таким образом, чтобы его касательные пространства естественным образом наделялись метрикой Тамма. Это может быть достигнуто, на наш взгляд, с помощью метрики финслерова типа. Учитывая эти замечания, введем следующее определение [3]. Гладкое n -мерное многообразие называется *финслеровым пространством Тамма*, если в каждом касательном пространстве этого многообразия задана риманова или псевдориманова метрика, инвариантная относительно всех вращений и зависящая гладким образом от точки касания.

Если (x^i) – локальные координаты на многообразии M , а (x^i, v^i) – естественные локальные координаты на касательном расслоении TM , то компоненты метрического тензора g^* финслерова пространства Тамма имеют вид

$$g_{ij}^*(x, v) = f(x, z)g_{ij}(x) + \varphi(x, z)p_i p_j, \quad (1)$$

где f и φ – произвольные функции, зависящие от координат (x^i) точки $x \in M$ и аргумента $z = (1/2)g_{ps}(x)v^p v^s$, $g_{ij}(x)$ – компоненты риманова или псевдориманова метрического тензора g базисного многообразия M , а $p_i = g_{is}(x)v^s$, где $i, j, k, \dots$ принимают значения $1, \dots, n = \dim M$.

Напомним, что финслерова структура на гладком многообразии M определяется заданием на касательном расслоении TM метрической функции $L(x, v)$, которая является однородной функцией первой степени по координатам касательного вектора v . Расстояние между бесконечно близкими точками x и $x + dx$ определяется формулой $ds = L(x, dx)$. Функция L порождает метрический тензор g^* следующим образом:

$$g_{ij}^*(x, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial v^i \partial v^j}.$$

Если, в частности, компоненты метрического тензора g_{ij}^* не зависят от v , то метрика является римановой. Если метрическая структура задается тензором g^* и не существует функции L , порождающей тензор g^* , то говорят о метрической структуре (метрике) финслерова типа. Метрический тензор g^* является тензором финслерова типа, так как его компоненты суть функции координат точки и касательного вектора, а при замене координат они преобразуются так же, как и компоненты тензора, заданного на базисном многообразии [4], [5]. Заметим, что (1) является метрикой

финслерова типа, т. е. не существует функции $L(x, v)$, порождающей ее метрический тензор [3]. Если $g_{ij}^*(x, v)$ – финслерова метрика (или метрика финслерова типа), то касательное пространство $T_{x_0}M$ в фиксированной точке $x_0 \in M$ наделяется римановой метрикой $h_{ij}(v) = g_{ij}^*(x_0, v)$ (при этом $ds^2 = h_{ij}(v) dv^i dv^j$), превращая $T_{x_0}M$ в риманово пространство, которое и называется касательным римановым пространством.

В работе [3] исследовались финслеровы пространства Тамма в случае, когда функции f и φ , входящие в метрический тензор g^* , не зависят от $x \in M$, т. е. метрика касательного пространства не зависит от точки касания.

В настоящей работе мы изучаем финслеровы пространства Тамма с метрикой

$$g_{ij}^*(x, v) = g_{ij}(x) + \alpha(x)h(z)p_i p_j. \quad (2)$$

Выбор такой метрики обусловлен рядом причин. В работе [1] Тамм постулирует несколько физических требований, конкретизирующих метрику. Первое требование – выполнение принципа соответствия, согласно которому при малых импульсах геометрия кривого импульсного пространства должна совпадать с обычной геометрией плоского пространства, т. е. если $p^2 \ll 1$, то $h(z) \rightarrow 0$, либо $h(z) = c = \text{const}$, а $f \rightarrow 1$. Поэтому в (1) мы полагаем $f = 1$ и $\varphi(x, z) = \alpha(x)h(z)$.

Более детально мы исследуем два класса метрики (2). В первом классе мы полагаем $h = c/p_0$, где $c = \text{const}$, $p_0 = g_{rs}(x)v^r v^s$, т. е.

$$g_{ij}^*(x, v) = g_{ij}(x) + \alpha(x)\frac{c}{p_0}p_i p_j, \quad (3)$$

во втором мы полагаем $h = c$, т. е.

$$g_{ij}^*(x, v) = g_{ij}(x) + \alpha(x)cp_i p_j. \quad (4)$$

В первом случае функция h определяется требованием инвариантности длины кривой на базисном многообразии M (метрический тензор $g_{ij}^*(x, v)$ должен быть однородным тензором нулевой степени по координатам касательного вектора). Второй случай определяется принципом соответствия.

Для метрики (2) и ее частных случаев (3) и (4) мы строим связность Картана – аналог связности Леви-Чивиты римановой метрики, приводим к каноническому виду уравнения экстремалей, которые для метрики (3) совпадают с уравнениями геодезических связности Картана, а в случае $\alpha(x) = \text{const}$ и произвольной функции $h(z)$ совпадают с геодезическими связности Леви-Чивиты базисного многообразия (M, g) . Мы доказываем, что при $\alpha(x) = \text{const}$ векторное поле является инфинитезимальным движением финслерова пространства Тамма с метрикой (2) тогда и только тогда, когда оно является инфинитезимальным движением базисного многообразия (M, g) . Далее мы исследуем касательные римановы пространства финслеровых пространств Тамма. Мы показываем, что метрика касательного риманова пространства финслеровых пространств Тамма с метрикой (3) реализуется на n -мерном конусе вращения, вложенном в $(n+1)$ -мерное евклидово пространство, а для пространств с метрикой (4) – на n -мерном параболоиде вращения. Мы исследуем строение геодезических касательного риманова пространства для метрики (3) как траекторий движения свободной частицы в центральном поле.

2. СВЯЗНОСТЬ КАРТАНА

2.1. Наиболее естественной связностью в метрическом пространстве финслерова типа является связность Картана [4], которая представляет собой аналог связности Леви-Чивиты в римановом пространстве. Параллельное перенесение касательных векторов в этой связности осуществляется вдоль кривых $x = x(t)$, $v = v(t)$ в касательном расслоении TM . В этом случае слой $T_x M$ с фиксированным вектором v_x наделяется евклидовой метрикой $g_{ij}^*(x, v_x)$ – значением метрического тензора в точке $(x, v_x) \in TM$. Связность Картана определяет изометрию слоев, т.е. при параллельном переносе в этой связности сохраняются длины векторов и углы между ними. Естественным образом вводится ковариантное дифференцирование ∇^* векторных, а затем и тензорных финслеровых полей вдоль векторных полей, заданных на касательном расслоении. Таким образом, каждому векторному полю X на TM и финслеру векторному полю Y на M ставится в соответствие финслеро векторное поле $Z = \nabla_X^* Y$ – ковариантная производная от Y вдоль X .

Пусть теперь на TM задана инфинитезимальная связность, т.е. распределение горизонтальных площадок, и $\delta_i = \partial_i - H_i^k \dot{\partial}_k$ есть локальный базис векторных полей этого распределения ($\partial_i = \partial/\partial x^i$, $\dot{\partial}_k = \partial/\partial v^k$). Если $(\Gamma_{ij}^{*k}, C_{ij}^{*k})$ – коэффициенты связности ∇^* , определенные разложениями

$$\nabla_{\delta_i}^* \partial_j = \Gamma_{ij}^{*k} \partial_k, \quad \nabla_{\dot{\partial}_i}^* \partial_j = C_{ij}^{*k} \partial_k,$$

то, потребовав, чтобы $\Gamma_{ij}^{*k} = \Gamma_{ji}^{*k}$, $C_{ij}^{*k} = C_{ji}^{*k}$ и $\nabla_X^* g^* = 0$ для любого X , находим

$$\Gamma_{ij}^{*k} = \frac{1}{2} g_*^{sk} (\delta_i g_{sj}^* + \delta_j g_{is}^* - \delta_s g_{ij}^*), \quad (5)$$

$$C_{ij}^{*k} = \frac{1}{2} g_*^{sk} (\dot{\partial}_i g_{sj}^* + \dot{\partial}_j g_{is}^* - \dot{\partial}_s g_{ij}^*). \quad (6)$$

Построенная таким образом связность называется *метрической финслеровой связностью*. Если распределение горизонтальных площадок, которое определяется связностью ∇^* , совпадает с начальным распределением H , т.е. $\Gamma_{ij}^{*k} v^j = H_i^k$, то связность ∇^* называется *связностью Картана*. Коэффициенты Γ_{ij}^{*k} связности Картана преобразуются по закону линейной связности, а C_{ij}^{*k} – по тензорному (тензорная часть связности). С помощью коэффициентов Γ_{ij}^{*k} обычным образом определяется базисное (горизонтальное) ковариантное дифференцирование тензорных полей финслерова типа, путем замены оператора ∂_i на $\delta_i = \partial_i^h$ – горизонтальный лифт (подъем) ∂_i , а тензорная часть C_{ij}^{*k} определяет слоевое (вертикальное) дифференцирование (оператор ∂_i заменяется на $\dot{\partial}_i = \partial_i^v$ – вертикальный лифт ∂_i) и является связностью Леви-Чивиты касательного риманова пространства. Формула (6) дает явное выражение тензорной части связности Картана через метрический тензор, а чтобы найти Γ_{ij}^{*k} , необходимо решить систему уравнений (5), что значительно усложняет задачу.

2.2. Найдем связность Картана финслерова пространства Тамма с метрикой (3). Так как метрический тензор в этой связности ковариантно постоянен, базисная ковариантная производная от метрического тензора обращается в нуль:

$$\partial_k g_{ij}^* - \Gamma_{k0}^{*s} \dot{\partial}_s g_{ij}^* - g_{sj}^* \Gamma_{ki}^{*s} - g_{is}^* \Gamma_{kj}^{*s} = 0. \quad (7)$$

Здесь и далее индекс 0 означает свертку соответствующего индекса с координатами касательного вектора v , например, $\Gamma_{i0}^{*k} = \Gamma_{ij}^{*k} v^j$.

Предварительно найдем производную $\dot{\partial}_s g_{ij}^*$:

$$\dot{\partial}_k g_{ij}^* = \frac{c\alpha}{p_0^2} [p_0(g_{ik}p_j + g_{jk}p_i) - 2p_i p_j p_k].$$

Свернув с v^i , получим

$$\dot{\partial}_k g_{0j}^* = c\alpha \left(g_{kj} - \frac{p_j p_k}{p_0} \right), \quad (8)$$

откуда

$$\dot{\partial}_k g_{00}^* = 0. \quad (9)$$

Умножая (7) на $v^i v^j$ и суммируя, с учетом (9) получаем

$$g_{s0}^* \Gamma_{k0}^{*s} = \frac{1}{2} \partial_k g_{00}^*.$$

Подставляя в это выражение $g_{s0}^* = (1 + c\alpha)p_s$ и $g_{00}^* = (1 + c\alpha)p_0$, находим

$$p_s \Gamma_{k0}^{*s} = \frac{1}{2} \partial_k p_0 + \frac{c p_0 \partial_k \alpha}{2(1 + c\alpha)}. \quad (10)$$

Циклически переставляя в (7) индексы i, j, k , получаем основные уравнения для нахождения Γ_{ij}^{*l} :

$$\Gamma_{ij}^{*l} = \frac{1}{2} g_*^{kl} (\partial_i g_{kj}^* + \partial_j g_{ik}^* - \partial_k g_{ij}^*) - \frac{1}{2} g_*^{kl} (\Gamma_{i0}^{*s} \dot{\partial}_s g_{kj}^* + \Gamma_{j0}^{*s} \dot{\partial}_s g_{ik}^* - \Gamma_{k0}^{*s} \dot{\partial}_s g_{ij}^*), \quad (11)$$

где

$$g_*^{kl} = g^{kl} - \frac{c\alpha}{(1 + c\alpha)p_0} v^i v^j \quad (12)$$

есть матрица, обратная к g_{ij}^* . Свернув (11) с v^j , получим следующие уравнения:

$$\Gamma_{i0}^{*l} = \frac{1}{2} g_*^{kl} (\partial_i g_{k0}^* + \partial_0 g_{ik}^* - \partial_k g_{i0}^*) - \frac{1}{2} g_*^{kl} (\Gamma_{i0}^{*s} \dot{\partial}_s g_{k0}^* + \Gamma_{00}^{*s} \dot{\partial}_s g_{ik}^* - \Gamma_{k0}^{*s} \dot{\partial}_s g_{i0}^*). \quad (13)$$

Свернем (13) с v^i и, вычисляя необходимые производные и учитывая (8) и (9), находим

$$\Gamma_{00}^{*l} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_0 g_{k0} + \partial_0 g_{0k} - \partial_k g_{00}) + \frac{c}{2(1 + c\alpha)} (v^l \partial_0 \alpha + v^l \partial_0 \alpha - g_{00} g^{kl} \partial_k \alpha). \quad (14)$$

Эти уравнения запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_{k0}^{*s} \left\{ \delta_s^l \delta_i^k + \frac{1}{2} g_*^{lr} \dot{\partial}_s g_{r0}^* \delta_i^k - \frac{1}{2} g_*^{lk} \dot{\partial}_s g_{oi}^* \right\} = \\ = \frac{1}{2} g_*^{lk} (\partial_0 g_{ik}^* + \partial_i g_{0k}^* - \partial_k g_{i0}^*) - \frac{1}{2} g_*^{lk} \dot{\partial}_s g_{ik}^* \Gamma_{00}^{*s}, \end{aligned} \quad (15)$$

где δ_i^j – символ Кронекера (единичная матрица). Матрицу в фигурных скобках обозначим через H_{is}^{lk} . Подставляя известные величины для метрики (3), находим

$$H_{is}^{lk} = \frac{1 + c\alpha}{2} \delta_s^l \delta_i^k - \frac{c\alpha}{2} g^{lk} g_{is}. \quad (16)$$

Эта матрица является невырожденной, а обратная к ней имеет вид

$$\tilde{H}_{lh}^{im} = \frac{2 + c\alpha}{2(1 + c\alpha)} \delta_h^i \delta_l^m + \frac{c\alpha}{2(1 + c\alpha)} g_{lh} g^{im}. \quad (17)$$

Умножая уравнения (15) на матрицу (17), учитывая равенство (10) и меняя индексы, получаем

$$\Gamma_{i0}^{*k} = \frac{1}{2} g^{sk} (\partial_i g_{s0} + \partial_0 g_{is} - \partial_s g_{i0}) + \frac{c}{2(1 + c\alpha)} \left(v^k \partial_i \alpha + v^k \frac{p_i}{p_0} \partial_0 \alpha - p_i g^{ks} \partial_s \alpha \right). \quad (18)$$

Подставляя это соотношение в (11), выводим явное выражение для коэффициентов связности Картана:

$$\Gamma_{ij}^{*k} = \Gamma_{ij}^k + \frac{cg^{sk}}{2(1 + c\alpha)p_0} (p_s p_i \partial_j \alpha + p_s p_j \partial_i \alpha - p_i p_j \partial_s \alpha), \quad (19)$$

где Γ_{ij}^k – коэффициенты связности Леви-Чивиты (псевдо)римановой метрики g .

Тензорная часть C_{ij}^k связности Картана вычисляется по формуле (6) и для метрики (3) записывается как

$$C_{ij}^k = \frac{c\alpha v^k}{(1 + c\alpha)p_0^2} (p_0 g_{ij} - p_i p_j). \quad (20)$$

Для метрики (4) связность Картана вычисляется аналогично. Ее коэффициенты и тензорная часть имеют следующий вид:

$$\Gamma_{ij}^{*k} = \Gamma_{ij}^k + \frac{cg^{sk}}{2(1 + 2c\alpha p_0)} (p_s p_i \partial_j \alpha + p_s p_j \partial_i \alpha - p_i p_j \partial_s \alpha), \quad (21)$$

$$C_{ij}^k = \frac{c\alpha}{1 + c\alpha p_0} g_{ij} v^k. \quad (22)$$

Аналогично вычисляется связность Картана и для общей метрики (2). Ее коэффициенты и тензорная часть таковы:

$$\Gamma_{ij}^{*k} = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2} \frac{hg^{sk}}{(1 + 2h\alpha p_0 + (\alpha/2)h'p_0^2)} (p_s p_i \partial_j \alpha + p_s p_j \partial_i \alpha - p_i p_j \partial_s \alpha), \quad (23)$$

$$C_{ij}^k = \frac{\alpha v^k}{1 + \alpha h p_0} \left(h g_{ij} + \frac{1}{2} h' p_i p_j \right). \quad (24)$$

Если $\alpha = \text{const}$, то коэффициенты Γ_{ij}^{*k} связности Картана совпадают с коэффициентами Γ_{ij}^k связности Леви-Чивиты метрики g . Обратно, если $\Gamma_{ij}^{*k} = \Gamma_{ij}^k$, то

$$p_s p_i \partial_j \alpha + p_s p_j \partial_i \alpha - p_i p_j \partial_s \alpha = 0.$$

Свернув это равенство с $v^s v^j$, находим, что $p_0^2 \partial_i \alpha = 0$, т.е. $\alpha = \text{const}$. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 1. Для финслеровых метрик Тамма (3), (4) и в более общем случае (2) связность Картана определяется однозначно метрическим тензором и вычисляется по формулам (19)–(22) и (23), (24) соответственно, а коэффициенты Γ_{ij}^{*k} связности Картана совпадают с коэффициентами Γ_{ij}^k связности Леви-Чивиты базисного многообразия (M, g) тогда и только тогда, когда $\alpha(x) = \text{const}$.

3. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И ЭКСТРЕМАЛИ. ДВИЖЕНИЯ

3.1. Исследуемая метрика g^* финслерова типа включает в себя (псевдо)риманову метрику g . Поэтому на многообразии M можно рассматривать геодезические в трех вариантах:

- геодезические как экстремали лагранжиана $L = (1/2)g_{ij}^*(x, v)v^i v^j$ (кривые наименьшей длины);
- геодезические как автопараллельные кривые в связности Картана (касательное векторное поле вдоль такой кривой является параллельным);
- геодезические как автопараллельные кривые базисного многообразия (M, g) в связности Леви-Чивиты.

Скалярный квадрат вектора v определяет метрический лагранжиан, который для метрики (4) имеет вид

$$L = z + 2\alpha h z^2, \quad z = \frac{1}{2}p_0 = \frac{1}{2}g_{ij}v^i v^j. \quad (25)$$

Уравнения экстремалей $x^i = x^i(t)$, $v^i = \dot{x}^i(t)$ этого лагранжиана суть уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

или, в развернутом виде,

$$\ddot{x}^j \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} + \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \quad (26)$$

Для лагранжиана (25) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\partial}_i L &= L' p_i, & L' &= 1 + 4\alpha h z + 2\alpha h' z^2, & \ddot{\partial}_{ij}^2 L &= L' g_{ij} + L'' p_i p_j, \\ \partial_j (\dot{\partial}_i L) &= L' \partial_j p_i + p_i \partial_j L' = L' \partial_j p_i + p_i L'' \frac{1}{2} \partial_j p_0 + p_i \left(2h p_0 + \frac{1}{2} h' p_0^2 \right) \partial_j \alpha, \\ \partial_i L &= \frac{1}{2} L' \partial_i p_0 + \frac{1}{2} h p_0^2 \partial_i \alpha, & L' &= \frac{\partial L}{\partial z}. \end{aligned}$$

Подставляя вычисленные производные в (26), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (L' g_{ij} + L'' p_i p_j) \ddot{x}^j + \left(L' \partial_j p_i + \frac{1}{2} L'' p_i \partial_j p_0 \right) \dot{x}^j - \\ - \frac{1}{2} L' \partial_i p_0 + \left(2h p_0 + \frac{1}{2} h' p_0^2 \right) p_i \partial_j \alpha \dot{x}^j - \frac{1}{2} h p_0^2 \partial_i \alpha = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Прямым вычислением можно убедиться, что матрица $A_{ij} = L' g_{ij} + L'' p_i p_j$ невырожденная, а обратная к ней имеет вид

$$B^{ik} = \frac{1}{L'} \left(g^{ik} - \frac{L'' \dot{x}^i \dot{x}^k}{L'' p_0 + L'} \right).$$

Умножая уравнения (27) на B^{ik} , после несложных преобразований находим канонические уравнения экстремалей:

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{1}{L'} \left(g^{ik} - \frac{L'' \dot{x}^i \dot{x}^k}{L'' p_0 + L'} \right) \left[\left(2h p_0 + \frac{1}{2} h' p_0^2 \right) p_i \partial_j \alpha \dot{x}^j - \frac{1}{2} h p_0^2 \partial_i \alpha \right] = 0. \quad (28)$$

Из этих уравнений следует, что если $\alpha(x) = \text{const}$, т. е. лагранжиан L зависит только от z , то уравнения экстремалей совпадают с уравнениями геодезических базисного многообразия (M, g) . Как следует из (27) и (28), указанный факт имеет место для любого лагранжиана $L(z)$.

Пусть $h = c/p_0$, т. е. мы имеем метрику (3). Тогда

$$\begin{aligned} L &= (1 + c\alpha)z, & L' &= 1 + c\alpha, & L'' &= 0, \\ A_{ij} &= (1 + c\alpha)g_{ij}, & B^{ik} &= \frac{g^{ik}}{1 + c\alpha}, \end{aligned}$$

и уравнения экстремалей (28) имеют вид

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{cg^{sk}}{2(1 + c\alpha)} (2p_s \partial_j \alpha \dot{x}^j - p_0 \partial_s \alpha) = 0. \quad (29)$$

Дифференциальные уравнения геодезических финслерова пространства Тамма в связности Картана ∇^* записываются как

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^{*k} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \quad (30)$$

таким образом, подставляя найденные нами коэффициенты Γ_{ij}^{*k} для метрики (3) (подставляя выражения (19) в (30)), убеждаемся, что уравнения геодезических совпадают с уравнениями экстремалей. Следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 2. *В финслеровых пространствах Тамма с метрикой (3) геодезические совпадают с экстремальными, а в случае $\alpha(x) = \text{const}$ являются также геодезическими базисного многообразия (M, g) .*

3.2. Векторное поле $X = \xi^k(x)\partial_k$ на многообразии M называется *инфинитезимальным движением* финслерова пространства Тамма, если каждый локальный диффеоморфизм однопараметрической группы $\varphi_t = \exp(tX)$, порожденный полем X , сохраняет метрический тензор. Это означает, что производная Ли вдоль X от метрического тензора g^* равна нулю: $L_X g^* = 0$. В локальных координатах эти уравнения имеют вид

$$\xi^k \partial_k g_{ij}^* + v^s \partial_s \xi^k \dot{\partial}_k g_{ij}^* + \partial_i \xi^k g_{kj}^* + \partial_j \xi^k g_{ik}^* = 0. \quad (31)$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. *При $\alpha(x) = \text{const}$ векторное поле X является инфинитезимальным движением финслерова пространства Тамма с метрикой (2) тогда и только тогда, когда оно является инфинитезимальным движением базисного многообразия (M, g) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в (31) метрический тензор (2), после несложных преобразований получаем

$$\left(1 + 2\alpha h p_0 + \frac{1}{2}\alpha h' p_0^2\right) (\xi^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \xi^k g_{kj} + \partial_j \xi^k g_{ik}) + h p_i p_j \xi^k \partial_k \alpha = 0. \quad (32)$$

Так как $\alpha(x) = \text{const}$, то $\partial_k \alpha = 0$, и из (32) при условии

$$1 + 2\alpha h p_0 + \frac{1}{2}\alpha h' p_0^2 \neq 0$$

следует, что уравнения (31) эквивалентны уравнениям

$$\xi^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \xi^k g_{kj} + \partial_j \xi^k g_{ik} = 0, \quad (33)$$

которые представляют собой уравнения Киллинга движений базисного многообразия (M, g) [6], что и доказывает теорему.

Таким образом, в случае $\alpha(x) = \text{const}$ множество всех инфинитезимальных движений финслерова пространства Тамма есть алгебра Ли размерности $r \leq n(n+1)/2$. Из уравнений (32) также следует, что если g и α инвариантны относительно векторного поля X , то X является инфинитезимальным движением финслерова пространства Тамма с метрикой (2).

4. КАСАТЕЛЬНЫЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА

4.1. Рассмотрим финслеровы пространства Тамма, касательные пространства которых являются римановыми.

Пространства импульсов $T_x^* M$ (и, следовательно, пространство скоростей $T_x M$) допускают группу всех вращений вокруг начала координат, которая является интранзитивной группой движений размерности $n(n-1)/2$. Известно, что такие римановы пространства являются *субпроективными*, т. е. их геодезические – плоские кривые [7]. Метрика касательного риманова пространства финслерова пространства Тамма с метрическим тензором (2) имеет вид

$$ds^2 = (dv^1)^2 + \dots + (dv^n)^2 + \alpha(x)h(z)(v^1 dv^1 + \dots + v^n dv^n)^2, \quad (34)$$

где $z = p_0/2 = ((v^1)^2 + \dots + (v^n)^2)/2$.

Группа движений расслаивает все пространство на гиперповерхности $z = \text{const}$, на которых она действует транзитивно. Нетрудно убедиться, что метрика (34) реализуется на гиперповерхности вращения $v_0 = \int \sqrt{\alpha h} dz$ вокруг оси v_0 в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве с метрикой $d\sigma^2 = (dv^0)^2 + (dv^1)^2 + \dots + (dv^n)^2$, т. е. евклидова метрика $d\sigma^2$ индуцирует на гиперповерхности вращения метрику (34). Если, в частности, $h = c/p_0$, то метрика (34) реализуется на n -мерном конусе вращения

$$c\alpha((v^1)^2 + \dots + (v^n)^2) - (v^0)^2 = 0,$$

где $c\alpha(x)$ определяет “угол раствора” касательного конуса, который, вообще говоря, меняется от точки к точке. Если $h(z) = c = \text{const}$, то метрика касательного риманова пространства реализуется на n -мерном параболоиде вращения

$$v^0 = \frac{1}{2}\sqrt{c\alpha}((v^1)^2 + \dots + (v^n)^2).$$

В первом случае секционная кривизна k в точке v и в направлении двумерных площадок, содержащих вектор $v = v^i \frac{\partial}{\partial v^i}$, равна нулю, а во втором случае

$$k = \frac{c\alpha}{1 + c\alpha p_0}.$$

4.2. Рассмотрим подробнее первый случай $h = c/p_0$, т. е.

$$ds^2 = (dv^1)^2 + \dots + (dv^n)^2 + c\alpha \frac{(v^1 dv^1 + \dots + v^n dv^n)^2}{(v^1)^2 + \dots + (v^n)^2}. \quad (35)$$

Геодезические риманова пространства с такой метрикой мы можем интерпретировать как траектории движения свободной частицы в центральном поле. Данное поле может создаваться, например, гравитирующим телом.

Пусть O – центр поля. В плоскости геодезических введем полярную систему координат (r, φ) с полюсом в точке O . В полярных координатах уравнения геодезических примут вид

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0, \quad \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{c\alpha}{1+c\alpha}r\dot{\varphi}^2. \quad (36)$$

Будем считать, что параметр t на геодезической является длиной дуги, т. е.

$$(1+c\alpha)r^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = 1, \quad 1+c\alpha > 0. \quad (37)$$

Интегрируя уравнения (36) и (37), находим (если $\dot{\varphi} \neq 0$)

$$r = \sqrt{\frac{(t+t_0)^2}{1+c\alpha} + m^2}, \quad \varphi = \sqrt{1+c\alpha} \operatorname{arctg} \frac{(t+t_0)}{m\sqrt{1+c\alpha}} + \varphi_0. \quad (38)$$

Таким образом, мы имеем параметрические уравнения геодезических в полярных координатах (r, φ) . Здесь m , t_0 , φ_0 – постоянные и $-\infty < t < +\infty$. Заметим, что t_0 соответствует выбору начала отсчета длины дуги, φ_0 фиксирует начальное положение полярного угла, а $m = r^2\dot{\varphi}$ – момент импульса частицы. Если угловая скорость частицы равна нулю, $\dot{\varphi} = 0$, то получаем особое решение

$$r = \frac{t}{\sqrt{1+c\alpha}}, \quad \varphi = \varphi_0, \quad (39)$$

представляющее собой совокупность всех прямых, проходящих через центр O .

Чтобы описать строение геодезических, выразим $t+t_0$ из второй формулы (38) и подставим в первую. После несложных преобразований получим

$$r = \frac{|m|}{\cos((\varphi - \varphi_0)/\sqrt{1+c\alpha})}, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{\varphi - \varphi_0}{\sqrt{1+c\alpha}} < \frac{\pi}{2}. \quad (40)$$

Функция (40) определяет семейство геодезических в полярных координатах. Если $c\alpha = 0$, то (40) задает совокупность всех прямых, не проходящих через центр; вместе с решениями (39) они исчерпывают все геодезические евклидовой плоскости.

Рассмотрим случай $c\alpha > 0$. Если $\varphi = \varphi_0$, то $r = |m|$ – минимальный полярный радиус частицы (перицентр). Если $\varphi - \varphi_0 \rightarrow \pm(\pi/2)\sqrt{1+c\alpha}$, то $r \rightarrow \infty$. При малых $c\alpha$ геодезические мало отличаются от прямых. С увеличением $c\alpha$ область изменения полярного угла увеличивается. Геодезические все более искривляются, появляются кратные точки (см. рис. 1).

Чем меньше момент импульса, тем ближе частица подлетает к центру, а при $m = 0$, т. е. если $\dot{\varphi} = 0$, происходит падение частицы на центр по одной из прямых (39). Легко видеть, что метрика в плоскости геодезических при $c\alpha > 0$ реализуется на

Рис. 1

двумерном конусе трехмерного евклидова пространства с декартовыми координатами (x, y, z) , полученного вращением прямой $z = \sqrt{c\alpha} \cdot y$ плоскости ZOY вокруг оси OZ . Следовательно, описанные нами траектории движения частицы являются геодезическими конуса вращения.

Пусть $-1 < c\alpha < 0$. Здесь также при $c\alpha$, близких к нулю, геодезические мало отличаются от прямых, но, в отличие от предыдущего случая, они обращены вогнутостью от центра. Если $c\alpha \rightarrow -1$, то область изменения полярного угла $\varphi - \varphi_0$ уменьшается до нуля. Во всех случаях движение частицы инфинитное. Заметим, что в этом случае метрика также реализуется на конусе. Однако теперь конус вкладывается в псевдоевклидово пространство, а вращение происходит вокруг мнимой оси. При $c\alpha = -1$ метрика вырождается. В этом случае конус вращения совпадает с изотропным конусом псевдоевклидова пространства.

Пусть $1 + c\alpha < -1$. Тогда метрика

$$ds^2(t) = [(1 + c\alpha)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2] dt^2$$

в плоскости геодезических является знакопеременной. В этом случае длина касательного вектора геодезической может быть равна единице, мнимой единице или нулю. Поэтому вместо уравнений (37) мы будем иметь

$$(1 + c\alpha^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \varepsilon, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (41)$$

или

$$(1 + c\alpha)^2\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = 0. \quad (42)$$

Интегрируя уравнения (36) и (41), находим

$$r = \frac{2|m| \exp\{(\varphi - \varphi_0)/\sqrt{|1 + c\alpha|}\}}{|1 + \varepsilon \exp\{2(\varphi - \varphi_0)/\sqrt{|1 + c\alpha|}\}|}.$$

При $\varepsilon = 1$ захват частицы полем происходит с конечного расстояния от центра, равного абсолютной величине момента импульса m , мы имеем $r_{\max} = |m|$, $\varphi = \varphi_0$, движение частицы финитное (см. рис. 2а).

Рис. 2

При $\varepsilon = -1$ захват частицы полем происходит с бесконечности, мы имеем $r \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow \varphi_0$. Если $\varphi - \varphi_0 \rightarrow \infty$, то $r \rightarrow 0$ (см. рис. 2б).

При $\varepsilon = 0$ геодезические являются изотропными. Интегрируя уравнения (36) и (42), находим

$$r = \sqrt{2} \exp \frac{\varphi - \varphi_0}{\sqrt{|1 + c\alpha|}}.$$

Если $\varphi - \varphi_0 \rightarrow +\infty$, то $r \rightarrow +\infty$. Если $\varphi - \varphi_0 \rightarrow -\infty$, то $r \rightarrow 0$. В этом случае движение частицы происходит по логарифмической спирали (см. рис. 2в).

Список литературы

- [1] И. Е. Тамм, “О кривом импульсном пространстве”, *Собрание научных трудов*, т. 2, Наука, М., 1975, 218–225.
- [2] И. Е. Тамм, В. Г. Вологодский, “Об использовании кривого импульсного пространства при построении нелокальной евклидовой теории поля”, *Собрание научных трудов*, т. 2, Наука, М., 1975, 226–253.
- [3] В. И. Паньженский, О. В. Сухова, “К геометрии пространств с метрикой Тамма”, *Сборник трудов Международного геометрического семинара им. Г. Ф. Лаптева* (Пенза, 26–31 января 2004 г.), ПГПУ, Пенза, 2004, 95–101.
- [4] Х. Рунд, *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, Наука, М., 1981.
- [5] В. И. Паньженский, “Инфинитезимальные автоморфизмы метрических структур финслерова типа”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. матем. и ее прил. Темат. обз.*, **123** (2009), 81–109.
- [6] Л. П. Эйзенхард, *Непрерывные группы преобразований*, ИЛ, М., 1947.
- [7] В. Ф. Каган, *Субпроективные пространства*, Физматлит, М., 1961.

Поступила в редакцию 4.04.2014,
после доработки 3.12.2015