Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, Ренормализационная группа в теории турбулентности: точно решаемая модель Гейзенберга, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 2, 245–262

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf870>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:18:02

© 1998 г.

Л. Ц. Аджемян*, Н. В. Антонов*

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ: ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Точно решаемая модель Гейзенберга для спектрального баланса энергии турбулентной жидкости [1] исследуется в рамках метода ренормализационной группы (РГ). Показано, что модель обладает РГ-симметрией с РГ-функциями (β -функцией и аномальной размерностью γ), которые найдены точно в двух различных ренормировочных схемах. Решение уравнений РГ воспроизводит известное точное решение модели Гейзенберга; оно сравнивается с результатами, полученными в рамках ε -разложения, которое только и доступно для более сложных моделей развитой турбулентности (формальный малый параметр РГ-разложения ε вводится путем замены δ -образной функции накачки в корреляторе случайной силы степенной функцией). Показана возможность экстраполяции результатов, полученных для асимптотически малых ε , к реальному значению $\varepsilon = 2$, причем уже первые члены ε -разложения дают хорошую численную оценку для константы Колмогорова в спектре турбулентной энергии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод ренормализационной группы (РГ), развитый первоначально в связи с потребностями квантовой теории поля [2, 3], был затем успешно применен в теории критического поведения для обоснования критической масштабной инвариантности (скейлинга) и систематического расчета универсальных величин (критических индексов и скейлинговых функций) в форме ε -разложений (см. монографию [4] и цитированную в ней литературу).

Применение аппарата РГ в теории развитой гидродинамической турбулентности, открытое работой [5], позволило получить обоснование инфракрасного (ИК) скейлинга с определенными “колмогоровскими” размерностями, доказать вторую гипотезу Колмогорова (независимость корреляционных функций в инерционном интервале от вязкости), а также вычислить амплитудные множители в скейлинговых законах (типа кон-

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: adjemyan@snoopy.phys.spbu.ru, antonov@snoopy.phys.spbu.ru

станты Колмогорова) в разумном согласии с экспериментом (см. обзор [6] и ссылки на библиографию, приведенные в нем).

В качестве исходной микромодели в РГ-теории турбулентности обычно рассматривается стохастическое уравнение Навье–Стокса с внешней случайной силой. При этом “идеальная” финитная функция накачки $d^f(k) \sim \delta(\mathbf{k})$ в корреляторе случайной силы (где $\mathbf{k}$ – волновой вектор и $k \equiv |\mathbf{k}|$) заменяется степенной функцией $d^f(k) \sim k^{1-2\varepsilon}$ (подробности см. в [6] или в разделе 2 настоящей статьи). Все результаты РГ-теории вполне надежны и самосогласованны в предположении асимптотической малости параметра ε (в этом смысле он аналогичен $\varepsilon = 4 - d$ в теории критического поведения [4]); возможность их экстраполяции к реальному значению $\varepsilon = 2$ иногда подвергается сомнению (см., например, [7–11]). Имеются два основных возражения против такой экстраполяции: 1) возможное возникновение при некотором $\varepsilon \geq 0$ ИК-существенных поправок к уравнению Навье–Стокса (см. [11]); 2) “нелокальные” взаимодействия крупномасштабных мод при $k \sim L^{-1}$, где L – внешний масштаб турбулентности, с модами в инерционном интервале $k \ll L^{-1}$. Они становятся существенными при $\varepsilon \geq 3/2$ и “теряются”, если для корреляционных функций используется ε -разложение (см. [7–9]). В первом порядке теории возмущений такие “нелокальные” взаимодействия проявляются в виде ИК-расходимостей отдельных однопетлевых диаграмм при $\varepsilon \geq 1$ [12, 13]. В старших порядках появляются диаграммы, содержащие ИК-расходимости при сколь угодно малых значениях ε .

При корректном использовании стандартной квантово-полевой формулировки РГ, по-видимому, ИК-существенных поправок к уравнению Навье–Стокса не возникает [14]. Заметим, кстати, что наличие таких поправок означало бы не неприменимость метода РГ, а недостаточность самого уравнения Навье–Стокса без учета высших нелинейностей для описания развитой турбулентности.

Корректный учет “нелокальных” взаимодействий – более сложная, но в настоящее время также решенная проблема (см. [13] и последующие работы [6, 15]). Она требует выхода за рамки ε -разложений и совместного использования метода РГ с операторным разложением, а также информации о точных критических размерностях “опасных” составных операторов (т.е. операторов с отрицательными размерностями). Суммирование их вкладов в операторных разложениях приводит к явным выражениям, описывающим перенос турбулентных вихрей в инерционном интервале как целого крупномасштабными движениями с $k \sim L^{-1}$ в согласии с известными феноменологическими представлениями; для галилеево-инвариантных величин (одновременных корреляционных функций с подходящими вычитаниями) эффекты переноса исчезают и потому не препятствуют экстраполяции результатов ε -разложения для таких объектов, а также величин типа критических размерностей, положения неподвижной точки РГ и т.п. в область $\varepsilon \geq 3/2$ [6, 13, 15].

Тем не менее возможность замены δ -образной функции накачки степенной функци-

ей, существование конечного предела при $\varepsilon \rightarrow 2$ и корректный переход к такому пределу – сложные и принципиальные вопросы РГ-теории турбулентности, решение которых невозможно в рамках самого ε -разложения и которые остаются в значительной степени постулатами, принимаемыми на веру по аналогии с теорией критического поведения (см. обсуждение в [6]). По-видимому, полное решение этой задачи потребует нахождения всех галилеево-инвариантных составных операторов, становящихся “опасными” при $\varepsilon = 2$ (пока известен лишь один – оператор скорости локальной диссипации [16]), и суммирования их вкладов в операторных разложениях для одновременных корреляционных функций (см. [6, 17, 18]).

Таким образом, особый интерес представляют упрощенные модели развитой турбулентности, допускающие, с одной стороны, точное решение, а с другой, – доступные РГ-анализу. Интересная задача такого типа рассматривалась в [19], где были найдены асимптотические степенные режимы, не описываемые ε -разложением. Однако как по постановке задачи (турбулентная конвекция в случайном внешнем поле с заданной статистикой), так и по использованной технике статья [19] достаточно далека от обычных работ по РГ-теории турбулентности.

Здесь же мы рассмотрим в рамках метода РГ известную точно решаемую модель Гейзенберга для спектрального баланса энергии турбулентной жидкости [1, 20]. С одной стороны, эта модель обладает точной РГ-симметрией, что позволяет получить для нее точные уравнения РГ и воспроизвести на их основе точное решение. С другой стороны, она во многих отношениях очень близка к исходной задаче (стохастическому уравнению Навье–Стокса), в частности, параметр РГ-разложения ε для них может быть введен одинаково путем замены $d^f(k) \sim \delta(\mathbf{k}) \rightarrow d^f(k) \sim k^{1-2\varepsilon}$ для функции накачки, а некоторые формулы РГ-теории для них буквально совпадают. Поэтому модель Гейзенберга хорошо иллюстрирует как проблемы, возникающие в теории возмущений для точной модели (ИК- и ультрафиолетовые (УФ) сингулярности членов ряда теории возмущений, необходимость его суммирования для нахождения ИК-асимптотик), так и “работу” аппарата РГ, решающего эти проблемы.

Модель Гейзенберга, сводящаяся к некоторому интегродифференциальному уравнению для спектральной плотности энергии $E(k)$, является интересным примером задачи, не имеющей квантово-полевой формулировки, но тем не менее допускающей в полном объеме применение аппарата РГ. На существование таких моделей было впервые указано в [21], общие методы отыскания РГ-симметрий дифференциальных уравнений обсуждались в [22]. Еще один интересный пример такой модели – некоторое нелинейное уравнение диффузии – рассматривался в [23]. При этом модель Гейзенберга ближе к обычным квантово-полевым моделям, т.к. содержит нетривиальную проблему УФ-расходимостей и оказывается “мультипликативно ренормируемой” моделью с РГ-функциями, точно вычисляемыми в различных ренормировочных схемах.

Основной вывод работы оптимистичен и состоит в том, что аппарат РГ позволяет

получить точное решение модели Гейзенберга, являющейся вполне реалистической моделью развитой турбулентности, при этом получаемое по теории возмущений приближенное решение уравнений РГ (только и доступное для стохастического уравнения Навье–Стокса) уже в низших порядках ε -разложения дает качественно верный и количественно приемлемый результат для ИК-асимптотики спектральной плотности энергии.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ. ПАРАМЕТР ε . ПРОБЛЕМА ИК- И УФ-СИНГУЛЯРНОСТЕЙ

В стохастической формулировке теории изотропной развитой турбулентности несжимаемой вязкой жидкости рассматривается уравнение Навье–Стокса с внешней случайной силой (см. [6, 20, 24])

$$\mathcal{D}_t \varphi_i = \nu_0 \Delta \varphi_i - \partial_i p + f_i, \quad \mathcal{D}_t \equiv \partial_t + (\varphi \cdot \partial). \quad (1)$$

Здесь φ – поперечное (в силу условия несжимаемости $\partial_i \varphi_i = 0$) векторное поле скорости, p и f – давление и поперечная случайная сила в расчете на единицу массы (все эти величины зависят от $x \equiv t, \mathbf{x}$), ν_0 – коэффициент вязкости, Δ – лапласиан. Сила f считается гауссово-распределенной с нулевым средним и заданным коррелятором (для трехмерного случая):

$$\langle f_i(x) f_j(x') \rangle = \frac{\delta(t - t')}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} P_{ij}(\mathbf{k}) d^f(k) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}, \quad (2)$$

в котором $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – поперечный проектор, $d^f(k)$ – некоторая функция $k \equiv |\mathbf{k}|$ и параметров модели. Случайная сила моделирует компенсирующую диссипацию накачку энергии в систему от взаимодействия с крупномасштабными движениями. Средняя мощность накачки W связана с функцией $d^f(k)$ в корреляторе (2) точным соотношением (см., например, [6, 24])

$$W = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} d^f(k). \quad (3)$$

В реалистической модели накачка должна быть инфракрасной, т.е. основной вклад в интеграл (3) должен даваться областью малых $k \leq L^{-1}$, где L – внешний масштаб турбулентности.

Если интересоваться лишь областью больших импульсов (волновых чисел) $k \gg L^{-1}$, включающей инерционный интервал и диссипативную область, функцию $d^f(k)$ можно выбрать в виде

$$d^f(k) = (2\pi)^3 W \delta(\mathbf{k}), \quad (4)$$

что соответствует идеализированной накачке бесконечно большими вихрями; нормировка функции (4) вытекает из соотношения (3).

Удобно с помощью известного предельного представления трехмерной δ -функции

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi k^3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 2} \left[(4 - 2\varepsilon) \left(\frac{k}{\Lambda} \right)^{4-2\varepsilon} \right] \quad (5)$$

перейти от (4) к степенной функции (см. [6])

$$d^f(k) = D_0 k^{1-2\varepsilon}, \quad D_0 = 4\pi^2(2 - \varepsilon) \Lambda^{2\varepsilon-4} W. \quad (6)$$

Здесь Λ – параметр с размерностью импульса, $\Lambda \simeq 1/l_d$, где $l_d \equiv (\nu_0^3/W)^{1/4}$ – диссипационная длина. Представление (6) регуляризует неопределенности типа $\delta(\mathbf{k})/k^2$, возникающие в теории возмущений для исходной модели (4). Функция (6) имеет при больших k степенную асимптотику, что позволяет применить к задаче (1), (2) квантово-полевую теорию УФ-ренормировки и аппарат РГ. Формальным малым параметром РГ-разложений, аналогичным $\varepsilon = 4 - d$ в теории критического поведения, является теперь параметр ε в показателе функции (6), его логарифмическое значение равно нулю, физическое значение равно двум, когда функция (6) переходит в (4).

Домножив уравнение (1) на $\varphi_i(t, \mathbf{x}')$, выполнив свертку по индексу i и преобразование Фурье по $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, получим уравнение спектрального баланса энергии для модели (1), (2) (см., например, [6, 20])

$$\partial_t E(k) = -2\nu_0 k^2 E(k) + T(k) + d^f(k), \quad (7)$$

где $d^f(k)$ – функция в корреляторе (2), а спектральная плотность энергии $E(k)$ и функция переноса $T(k)$ связаны с корреляционными функциями задачи (1), (2) точными соотношениями

$$E(k) = \frac{k^2}{2\pi^2} \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \langle \varphi_i(\mathbf{x}') \varphi_i(\mathbf{x}) \rangle, \quad (8)$$

$$T(k) = \frac{k^2}{2\pi^2} \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \langle \varphi_i(\mathbf{x}') \varphi_j(\mathbf{x}) \partial_j \varphi_i(\mathbf{x}) \rangle. \quad (9)$$

Интегрируя (7) в некотором интервале $[0, k]$, получаем уравнение баланса энергии для шарового слоя радиуса k в $\mathbf{k}$ -пространстве:

$$-2\nu_0 \int_0^k dy y^2 E(y) + \int_0^k dy T(y) + \left(\frac{k}{\Lambda} \right)^{4-2\varepsilon} W = 0, \quad (10)$$

где мы учли явный вид функции накачки (6) и положили $\partial_t E(k) = 0$ в предположении стационарности задачи.

Существуют феноменологические модели, в которых точное соотношение (9) для функции переноса $T(k)$ заменяют некоторым явным выражением от спектральной плотности $E(k)$, с тем чтобы получить для последней замкнутое уравнение (см. [20, гл. 17]). Такие модели, опирающиеся на соображения простоты, размерности и некоторые дополнительные феноменологические представления (типа идеи “эффективной вихревой вязкости”), довольно многочисленны и приводят к близким результатам. В дальнейшем мы будем для определенности рассматривать конкретную модель Гейзенберга [1, 20], в которой полагается

$$I(k) \equiv \int_0^k dy T(y) = -2\nu(k) \int_0^k dy y^2 E(y), \quad (11)$$

где “вихревая вязкость” $\nu(k)$ имеет вид

$$\nu(k) \equiv \alpha \int_k^\infty dy \sqrt{E(y)/y^3} \quad (12)$$

с некоторой безразмерной константой α ($\alpha \equiv \gamma_H$ в обозначениях [20]).

Определим функцию $H(k)$ соотношением

$$H(k) \equiv \left(\frac{2\nu_0}{W} \right) \Lambda^{4-2\varepsilon} \int_0^k dy y^2 E(y), \quad (13)$$

так что

$$E(k) = \left(\frac{W}{2\nu_0} \right) \Lambda^{2\varepsilon-4} H'(k) \cdot k^{-2} \quad (14)$$

(отметим отличие в нормировке функции $H(k)$ для $\varepsilon = 2$ от принятого в [20]). С учетом (11)–(13) уравнение (10) записывается в виде

$$H(k) + g_0 H(k) \int_k^\infty dy \sqrt{H'(y)/y^5} = k^{4-2\varepsilon}, \quad (15)$$

где параметр

$$g_0 \equiv \alpha \Lambda^{\varepsilon-2} \left(\frac{W}{2\nu_0^3} \right)^{1/2} \quad (16)$$

играет роль затравочной константы связи (“заряда”) в ненормированной теории возмущений.

Дифференцируя (15) по k , перенося первое слагаемое из левой части в правую и возводя обе части в квадрат, можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение для $H(k)$. При реальном $\varepsilon = 2$ оно легко решается разделением переменных. Решение (с вытекающим из (15) при $\varepsilon = 2$ граничным условием $H(\infty) = 1$) имеет вид [20]

$$H(k) = \left[1 + \frac{3}{4} g_0^2 k^{-4} \right]^{-1/3}, \quad (17)$$

откуда для $E(k)$ с помощью (14) получаем [20]

$$E(k) = \left(\frac{W}{2\nu_0} \right) g_0^2 k^{-7} \left[1 + \frac{3}{4} g_0^2 k^{-4} \right]^{-4/3}. \quad (18)$$

В УФ-асимптотике ($k \rightarrow \infty$) из (18) находим $E(k) \sim k^{-7}$, а в ИК-асимптотике ($k \rightarrow 0$) получаем колмогоровский “закон $5/3$ ” с явным выражением константы Колмогорова C_k через параметры модели [20]:

$$E(k) \simeq C_k W^{2/3} k^{-5/3}, \quad C_k = 4(9\alpha)^{-2/3}. \quad (19)$$

Решение (17) для $H(k)$ разложимо, очевидно, в ряд по g_0 , но это не есть ряд теории возмущений для исходного уравнения (15): итерируя (15) по g_0 при $\varepsilon = 2$, находим лишь тривиальное нефизическое решение $H(k) = 1$, $E(k) = 0$.

С несколько большим трудом можно получить и точное решение уравнения (15) для произвольного $0 < \varepsilon \leq 2$, оно имеет довольно громоздкий вид и не будет сейчас обсуждаться. Мы получим его в разделе 4 с помощью техники РГ, а сейчас обсудим итерационное решение (15) при $\varepsilon \neq 2$. С учетом соображений размерности оно может быть записано в виде

$$H(k) = k^{4-2\varepsilon} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (g_0 k^{-\varepsilon})^n \right] \quad (20)$$

с некоторыми зависящими только от ε коэффициентами $c_n = c_n(\varepsilon)$. Для первых трех из них находим

$$c_1 = -(4-2\varepsilon)^{1/2} \frac{1}{\varepsilon}, \quad c_2 = \frac{5}{\varepsilon^2} - \frac{11}{4\varepsilon}, \quad c_3 = (4-2\varepsilon)^{-1/2} \left[-\frac{80}{3\varepsilon^3} + \frac{881}{30\varepsilon^2} - \frac{967}{120\varepsilon} \right]. \quad (21)$$

На примере ряда (20) для модели Гейзенберга можно пояснить основные проблемы, возникающие и в точной модели (1), (2), (6) при изучении ИК-асимптотик на основе рядов теории возмущений (ср. [6, 13]).

При $k \rightarrow 0$ безразмерный параметр разложения $g_0 k^{-\varepsilon}$ в (20) не мал, и для определения асимптотики $k \rightarrow 0$ ряд необходимо как-то суммировать; в этом и состоит “первая ИК-проблема”, решаемая собственно методом РГ. Она ослабляется при $\varepsilon \rightarrow 0$ и исчезла бы совсем при $\varepsilon = 0$, если бы этот предел в (20) существовал. Однако он не существует из-за наличия полюсов по ε в коэффициентах c_n . Полюсы связаны с УФ-расходимостью интеграла (15) в области больших y . Устранение этих полюсов есть классическая “УФ-проблема”, общее решение которой дается теорией УФ-ренормировки [2]. В рамках этой теории обычно и получают уравнения РГ, выражающие простую идею неоднозначности ренормировки. Сказанное выше о связи ИК- и УФ-проблем поясняет, почему

метод РГ, тесно связанный с проблемой УФ-расходимостей, оказывается полезным инструментом для решения на первый взгляд совершенно другой проблемы ИК-сингулярностей.

Коэффициент c_3 в (21) имеет при $\varepsilon \rightarrow 2$ особенность, связанную с ИК-расходимостью интеграла (15) на решении (20) при $\varepsilon = 2$. Для старших c_n эти особенности только усиливаются, $c_n \sim (4 - 2\varepsilon)^{1-n/2}$, так что предел $\varepsilon \rightarrow 2$ членов ряда (20) не существует и не совпадает с разложением по g_0 решения (17). Это весьма упрощенный аналог “второй ИК-проблемы” – проблемы ИК-сингулярностей коэффициентов рядов типа (20) для точной модели (1), (2), (6) при конечных ε [6, 13]. В данном случае эта проблема также будет решена методом РГ: суммирование ряда (20) с помощью уравнений РГ приводит к выражению для $H(k)$, предел $\varepsilon \rightarrow 2$ которого существует и совпадает с (17).

Добавим, что в данном случае благодаря точной решаемости задачи (14) можно получить уравнения РГ при любом $0 < \varepsilon \leq 2$ без каких-либо ссылок на теорию УФ-ренормировки и проблему УФ-расходимостей. Другие задачи такого типа обсуждались ранее в [21, 22]. Однако в рамках теории возмущений, только и доступной в точной задаче (1), (2), те же уравнения РГ получаются обычным образом как результат произвола в процедуре устранения УФ-расходимостей.

Вывод уравнения РГ для модели (15) обсуждается в следующем разделе.

3. УРАВНЕНИЕ РГ. РГ-ФУНКЦИИ. НЕПОДВИЖНАЯ ТОЧКА

Определим ренормированную функцию $H_R = H_R(k, g, \mu)$ как решение уравнения

$$H_R(k) + g \mu^\varepsilon H_R(k) \int_k^\mu dy \sqrt{H'_R(y)/y^5} = k^{4-2\varepsilon}. \quad (22)$$

Здесь g – ренормированная константа связи (безразмерный параметр разложения в ренормированной теории возмущений), μ – точка нормировки (“ренормировочная масса”), дополнительный произвольный параметр ренормированной теории.

Можно непосредственно убедиться, что функции $H(k)$ в (15) и $H_R(k)$ в (22) отличаются лишь не зависящим от k нормировочным множителем, т.е. $H(k) = Z H_R(k)$ с некоторой “константой ренормировки” $Z = Z(g, \mu)$, если константы связи в (15), (22) связаны соотношением $g_0 = g \mu^\varepsilon Z_g$ с $Z_g = Z^{-3/2}$. Действительно, подставляя равенства

$$H(k) = Z H_R(k), \quad g_0 = g \mu^\varepsilon Z_g, \quad Z_g = Z^{-3/2} \quad (23)$$

в уравнение (22) и представляя интеграл по отрезку $[k, \mu]$ в виде суммы интегралов по областям $[k, \infty]$ и $[\infty, \mu]$, приходим к уравнению (15) при условии, что Z удовлетворяет уравнению

$$1 = Z^{-1} - g \mu^\varepsilon Z^{-3/2} \int_\mu^\infty dy \sqrt{H'(y)/y^5}. \quad (24)$$

С учетом (15) при $k = \mu$ и связи g и g_0 в (23) из (24) находим

$$Z = \mu^{2\varepsilon-4} H(k = \mu). \quad (25)$$

В отличие от (20) ряд теории возмущений по g для функции $H_R(k)$, получаемый итерациями ренормированного уравнения (22), не содержит полюсов по ε , т.е. его коэффициенты УФ-конечны (очевидное следствие конечности пределов интегрирования в (22)). Первые члены этого ряда имеют вид

$$H_R(k) = k^{4-2\varepsilon} \left[1 + g(4-2\varepsilon)^{1/2} \frac{(1-s^{-\varepsilon})}{\varepsilon} + \left(\frac{g}{2}\right)^2 \left(5(4-2\varepsilon) \frac{(1-s^{-\varepsilon})^2}{\varepsilon^2} + \frac{(1-s^{-\varepsilon})}{\varepsilon} \right) + O(g^3) \right], \quad (26)$$

где $s \equiv k/\mu$. Все сингулярности по ε оказываются сосредоточенными в константе Z (25). Поэтому соотношения (22)–(25) можно рассматривать как точный аналог мультипликативной ренормировки в моделях квантовой теории поля. Из (22) видно, что ренормированная функция $H_R(k)$ при $k = \mu$ имеет простой вид и совпадает с нулевым приближением теории возмущений по g , т.е. $H_R(k = \mu) = \mu^{4-2\varepsilon}$. Поэтому формулы (22)–(25) отвечают известной ренормировочной схеме с точкой нормировки (ТН). Другая схема – схема минимальных вычитаний (МВ) – будет рассмотрена в разделе 5.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ операцию $\mathcal{D}_\mu \equiv \mu \partial_\mu$ при фиксированных значениях затравочного заряда g_0 и подействуем ею на обе части равенства $H = Z H_R$. Это дает дифференциальное уравнение РГ для функции H_R (здесь и далее $\mathcal{D}_x \equiv x \partial_x$ для любой переменной x)

$$[\mathcal{D}_\mu + \beta(g) \partial_g - \gamma(g)] H_R = 0, \quad (27)$$

в котором РГ-функции (β -функция и аномальная размерность γ) определены соотношениями

$$\beta(g) \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g, \quad \gamma(g) \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z. \quad (28)$$

Из определений и последнего равенства в (23) находим точную связь между РГ-функциями:

$$\beta(g) = g \left[-\varepsilon + \frac{3}{2} \gamma(g) \right]. \quad (29)$$

Из уравнения (27) и нормировки H_R при $k = \mu$ можно получить явное выражение для $\gamma(g)$ в терминах ренормированной функции H_R . Из соображений размерности и нормировки имеем

$$H_R(k, g, \mu) = k^{4-2\varepsilon} F(s, g), \quad s \equiv k/\mu, \quad F(1, g) = 1, \quad (30)$$

с некоторой функцией $F(s, g)$ безразмерных переменных $s \equiv k/\mu$ и g . Подставляя (30) в (27), полагая $k = \mu$ и опуская вклад с ∂_g (ибо функция H_R при $k = \mu$ не зависит от g), находим

$$\gamma(g) = \mathcal{D}_\mu \ln H_R|_{k=\mu} = \partial_s F(s, g)|_{s=1}. \quad (31)$$

Представление (31) демонстрирует УФ-конечность аномальной размерности $\gamma(g)$ и удобно для ее практического вычисления как по теории возмущений, так и точного. Подставляя в (31) известные из (26) первые члены ряда теории возмущений для H_R , находим первые члены ряда теории возмущений для $\gamma(g)$:

$$\gamma(g) = g\sqrt{4-2\varepsilon} + \frac{g^2}{2} + \frac{(g/2)^3}{\sqrt{4-2\varepsilon}} + \dots \quad (32)$$

С помощью представления (31) и уравнения (22) можно найти и точное выражение для $\gamma(g)$. Дифференцируя (22) по k , перенося первое слагаемое из левой части в правую, возводя обе части в квадрат и переходя с помощью (31) к функции $F(s, g)$, получаем для последней дифференциальное уравнение

$$\frac{(\mathcal{D}_s F)^2}{F^4} = g^2 s^{-2\varepsilon} [(4-2\varepsilon)F + \mathcal{D}_s F], \quad (33)$$

из которого при $s = 1$ с учетом (31) получаем квадратное уравнение для $\gamma(g)$

$$\gamma^2 = g^2 [(4-2\varepsilon) + \gamma]. \quad (34)$$

Выбирая решение уравнения (34), отвечающее теории возмущений (32), находим

$$\gamma(g) = \frac{g^2}{2} + g\sqrt{(4-2\varepsilon) + (g/2)^2}. \quad (35)$$

Выражение (35) есть точный результат для определенной равенством (28) аномальной размерности $\gamma(g)$ модели (22); $\beta(g)$ -функция находится затем из точного равенства (29).

Решение РГ-уравнения (27) обсуждается в разделе 4. Сейчас лишь отметим, что оно имеет ИК-устойчивую положительную неподвижную точку $g = g_*$, в которой $\beta(g_*) = 0$, $\omega \equiv \beta'(g_*) > 0$. Действительно, из точных выражений (29) и (35) получаем

$$g_* = \frac{\varepsilon}{3(1-\varepsilon/3)^{1/2}}, \quad \omega = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon/3)}{1-5\varepsilon/12}. \quad (36)$$

Величины g_* , ω положительны при всех $0 < \varepsilon \leq 2$. В силу равенства (29) в неподвижной точке имеем $\gamma^* \equiv \gamma(g_*) = 2\varepsilon/3$.

Соотношение между точными результатами типа (35) и теорией возмущений для $\gamma(g)$, g_* , ω мы обсудим ниже в разделе 6, а пока заметим, что точная аномальная размерность (35), в отличие от приближенной (32), имеет при $\varepsilon \rightarrow 2$ простой конечный предел $\gamma(g) = g^2$, а для $\beta(g)$ -функции из (29) тогда имеем $\beta(g) = g[-2 + 3g^2/2]$.

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РГ. ИНВАРИАНТНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ. ИК-АСИМПТОТИКА

Решение уравнений РГ (27) для функции H_R с учетом представления (30) может быть записано в виде (ср. [6, 13])

$$H_R = k^{4-2\varepsilon} f(\bar{g}) \exp \int_{\bar{g}}^g dy \frac{\gamma(y)}{\beta(y)}, \quad f(g) \equiv F(1, g). \quad (37)$$

Здесь инвариантный заряд $\bar{g} = \bar{g}(s, g)$ — это решение однородного уравнения (27) с нормировкой $\bar{g}(1, g) = g$. Он также удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\mathcal{D}_s \bar{g} = \beta(\bar{g}), \quad \bar{g}(1, g) = g, \quad (38)$$

из которого для него получается неявное выражение

$$\ln s = \int_g^{\bar{g}} \frac{dy}{\beta(y)}. \quad (39)$$

Представление (37) верно, поскольку обе его части удовлетворяют уравнению РГ и совпадают при $s = 1$ в силу нормировки $\bar{g}$. В конкретной ренормировочной схеме ТН скейлинговая функция $f(g)$ в (37) тождественно равна единице (см. раздел 3), но в общем случае это не так. С помощью равенств (29) и (39) интеграл в (37) можно вычислить, что дает

$$H_R = k^{4-2\varepsilon} \left(\frac{\bar{g}s^\varepsilon}{g} \right)^{2/3} f(\bar{g}). \quad (40)$$

Нас сейчас интересует не ренормированная функция H_R , а связанная с ней соотношением $H = ZH_R$ исходная функция H из (15). Домножая (40) на Z и используя второе равенство в (23), находим

$$H(k) = k^{4-2\varepsilon} \left(\frac{\bar{g}k^\varepsilon}{g_0} \right)^{2/3} f(\bar{g}). \quad (41)$$

Полагая $f(g) = 1$ (схема ТН), для спектральной плотности $E(k)$ из (41) с помощью (14) и (38) находим

$$E(k) = \left(\frac{W \Lambda^{2\varepsilon-4}}{2\alpha} \right) [4 - 2\varepsilon + \gamma(\bar{g})] \bar{g}^{2/3} k^{1-4\varepsilon/3}. \quad (42)$$

Равенство (39) позволяет получить неявное выражение для $\bar{g} = \bar{g}(s, g)$ в ренормированных переменных; но в силу одновременной ренорминвариантности $\bar{g}$ и g_0 возможно найти и функцию $\bar{g} = \bar{g}(g_0 k^{-\varepsilon})$. Из соображений размерности и условий нормировки имеем (ср., например, [6, 18])

$$g_0 k^{-\varepsilon} = \bar{g} Z^{3/2}(\bar{g}), \quad (43)$$

что при $k = \mu$ совпадает со вторым равенством в (23). Из определений (28) и с учетом того, что $Z = Z(g, \varepsilon)$ не зависит явно от μ , находим $\gamma = \beta \partial_g \ln Z$. Интегрируя это равенство с очевидным начальным условием $Z|_{g=0} = 1$, имеем

$$Z(g) = \exp \int_0^g dy \frac{\gamma(y)}{\beta(y)}. \quad (44)$$

Явное вычисление интеграла (44) с точными РГ-функциями (35), (29) дает

$$\begin{aligned} Z(g) = & (4 - 2\varepsilon)^{\frac{(2-\varepsilon)}{2(3-\varepsilon)}} \left[1 - 3(3 - \varepsilon) \left(\frac{g}{\varepsilon} \right)^2 \right]^{\frac{2(1-5\varepsilon/12)}{(3-\varepsilon)}} \times \\ & \times \left[\left(\frac{g}{2} \right) + \sqrt{4 - 2\varepsilon + \left(\frac{g}{2} \right)^2} \right]^{\frac{\varepsilon}{6(3-\varepsilon)}} \times \\ & \times \left[g \left(\frac{6}{\varepsilon} - \frac{5}{2} \right) + \sqrt{4 - 2\varepsilon + \left(\frac{g}{2} \right)^2} \right]^{\frac{-2(1-5\varepsilon/12)}{(3-\varepsilon)}}. \end{aligned} \quad (45)$$

С помощью явных формул (35) для $\gamma(g)$ и (36) для g_* , ω можно переписать выражение (45) в виде, более удобном для исследования ИК-асимптотики инвариантного заряда в (43) и предела $\varepsilon \rightarrow 2$:

$$\begin{aligned} Z(g) = & (4 - 2\varepsilon)^{\frac{(2-\varepsilon)}{2(3-\varepsilon)}} \left[1 - \left(\frac{g}{g_*} \right)^2 \right]^{2\varepsilon/3\omega} \times \\ & \times \left[\frac{\gamma(g)}{g} \right]^{\frac{\varepsilon}{6(3-\varepsilon)}} \left[\frac{\gamma(g)}{g} + \frac{3g(2-\varepsilon)}{\varepsilon} \right]^{-2\varepsilon/3\omega}. \end{aligned} \quad (46)$$

Совокупность выражений (41)–(43) и (45), (46) дает точное неявное решение уравнения (15), которое в этом конкретном случае можно было бы получить и непосредственно из (15).

При $\varepsilon = 2$ правая часть выражения (46) упрощается; в этом случае с учетом (43) получаем

$$Z(g) = \left(1 - \frac{3}{4} g^2 \right)^{1/3}, \quad \bar{g}^2 = g_0^2 \left(k^4 + \frac{3}{4} g_0^2 \right)^{-1}, \quad (47)$$

что при подстановке в (41), (42) воспроизводит известное решение (17), (18) исходной задачи (15) при $\varepsilon = 2$.

Из представлений (43)–(46) или прямо из уравнения (38) с учетом явного вида β -функции можно найти асимптотики инвариантного заряда: $\bar{g} \rightarrow g_0 k^{-\varepsilon}$ при $k \rightarrow \infty$ и $\bar{g} \rightarrow g_*$ при $k \rightarrow 0$, где ИК-устойчивая неподвижная точка g_* дается выражением (36).

Тогда в ИК-асимптотике ($k \rightarrow 0$) из (42) с заменой $\bar{g} \rightarrow g_*$ и учетом $\gamma_* \equiv \gamma(g_*) = 2\varepsilon/3$ (см. раздел 3) находим

$$E(k) \simeq C_k(\varepsilon) (W \Lambda^{4-2\varepsilon})^{2/3} k^{1-4\varepsilon/3}, \quad C_k(\varepsilon) = \left[\frac{4\varepsilon}{3\alpha} \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \right) \right]^{2/3}, \quad (48)$$

где $C_k(\varepsilon)$ – обобщение константы Колмогорова C_k на произвольные ε ; при $\varepsilon = 2$ выражение (48) переходит в (19).

В УФ-асимптотике дело обстоит сложнее, т.к. пределы $\varepsilon \rightarrow 2$ и $k \rightarrow \infty$ оказываются в этом случае неперестановочными. Учитывая, что в УФ-пределе величина $\bar{g} \rightarrow g_0 k^{-\varepsilon}$ мала, разлагая входящую в (42) функцию $\gamma(\bar{g})$ по $\bar{g}$ и ограничиваясь первым членом, находим $E(k) \sim k^{1-2\varepsilon}$ для любого $0 < \varepsilon < 2$. Однако для самого $\varepsilon = 2$ этот ответ неверен из-за сингулярностей при $\varepsilon \rightarrow 2$, возникающих в разложении функции $\gamma(\bar{g})$ по $\bar{g}$ (см. (32)). Правильную асимптотику можно найти, положив $\varepsilon = 2$ в точном выражении (35), что дает $E(k) \sim k^{-7}$ в согласии с (18).

5. РГ-ФУНКЦИИ В СХЕМЕ МИНИМАЛЬНЫХ ВЫЧИТАНИЙ

В разделах 3 и 4 мы получили точные выражения (35), (36) для РГ-функций β , γ и положения неподвижной точки g_* в конкретной ренормировочной схеме с ТН, в которой ренормированная функция $H_R(k)$ имеет при $k = \mu$ (в ТН) простой вид. В точной модели (1), (2) подобная ренормировочная схема использовалась, например, в работах [12].

В этом разделе мы получим точные выражения для РГ-функций и g_* в схеме МВ, которая оказывается наиболее удобной при практических вычислениях в рамках теории возмущений (см., например, [25]). В частности, РГ-функции в этой схеме очень просто зависят от ε и в отличие от схемы ТН не имеют особенностей по ε даже в теории возмущений. В точной модели (1), (2) схема МВ использовалась, в частности, в работах [13–18]. Вместе с техникой расчета критических размерностей составных операторов и методом операторного разложения она дала возможность исследовать зависимость корреляционных функций от внешнего масштаба турбулентности L (см. также обзор [6] и цитированную там литературу).

Будем обозначать ренормированные величины в схеме МВ тильдой: $\tilde{H}_R(k)$, $\tilde{g}$ и т.д., чтобы отличать их от аналогов в схеме ТН.

УФ-расходимости в схеме МВ устраняются из ренормированных величин с помощью аналогичной (23) мультипликативной ренормировки

$$H(k) = \tilde{Z} \tilde{H}_R(k), \quad g_0 = g \tilde{\mu}^\varepsilon \tilde{Z}_g, \quad \tilde{Z}_g = \tilde{Z}^{-3/2}, \quad (49)$$

но константа ренормировки $\tilde{Z}$ теперь имеет вид “единица плюс только полюсы по ε ”:

$$\tilde{Z}(\tilde{g}, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\tilde{g}) \varepsilon^{-n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}^k \sum_{n=1}^k a_{kn} \varepsilon^{-n} \quad (50)$$

с числовыми коэффициентами a_{kn} , не зависящими ни от каких параметров. Второе равенство в (49) вводит в схеме МВ ренормировочную массу μ .

Уравнение РГ (27) и его решение (40) в схеме МВ имеют прежний вид, но сами величины $\tilde{Z}$, $\tilde{g}$, $\tilde{g}_*$ и т.д. отличаются от Z , g , g_* при тех же $H(k)$, g_0 (они связаны между собой УФ-конечной ренормировкой). Функция $\tilde{F}(1, \tilde{g})$ в представлении (40) теперь нетривиальна, что приводит к появлению добавочного множителя $f(\varepsilon) \equiv \tilde{F}(1, \tilde{g}_*)$ в ИК-асимптотике $\tilde{H}_R(k)$. Заметим, что все сингулярности коэффициентов рядов теории возмущений по $\tilde{g}$ при $\varepsilon \rightarrow 2$ в схеме МВ сосредоточены именно в скейлинговой функции $\tilde{F}(1, \tilde{g})$, тогда как сами РГ-функции $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\beta}$ несингулярны (см. ниже).

Выражения для величин, описывающих поведение исходной (не зависящей от выбора схемы ренормировки) функции $H(k)$ в (13), совпадают в обеих схемах. В частности, общими для всех схем являются наличие ИК-устойчивой положительной неподвижной точки (но не сама величина g_*), критический показатель γ^* и поправочный показатель ω , в нашем случае известный точно из полученного в схеме ТН выражения (36).

При практических вычислениях в схеме МВ удобна формула

$$\tilde{\gamma}(\tilde{g}) = -\mathcal{D}_{\tilde{g}} a_1(\tilde{g}), \quad (51)$$

вытекающая из аналогичного формуле (28) определения $\tilde{\gamma}$, УФ-конечности $\tilde{\gamma}$ и явного вида константы $\tilde{Z}$ в (50); a_1 — коэффициент при $1/\varepsilon$ в $\tilde{Z}$. Прямой расчет РГ-функций в схеме МВ по теории возмущений дает

$$\tilde{\beta}(\tilde{g}) = -\tilde{g} \left[\varepsilon - \frac{3}{2} \tilde{\gamma}(\tilde{g}) \right] = \tilde{g} \left[-\varepsilon + 3\tilde{g} + \frac{3}{4} \tilde{g}^2 + \frac{21}{32} \tilde{g}^3 + \dots \right]. \quad (52)$$

Выражение (52) иллюстрирует простой общий вид РГ-функций в схеме МВ (ср. [25]): $\tilde{\gamma}$ не зависит от ε (следствие ее УФ-конечности и явного вида $\tilde{Z}$ в (50)), а вся зависимость $\tilde{\beta}$ -функции от ε содержится в явно выделенном первом слагаемом в (52). Это позволяет найти и точные выражения для $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{g}_*$ по известному из (36) точному значению показателя ω .

В ненулевой неподвижной точке $\tilde{g}_* \neq 0$ из первого равенства в (52) имеем

$$\omega(\varepsilon) = \tilde{\beta}'(\tilde{g}_*) = \frac{3}{2} \tilde{g}_* \tilde{\gamma}'(\tilde{g}_*). \quad (53)$$

В то же время, дифференцируя равенство $\tilde{\gamma}(\tilde{g}_*(\varepsilon)) = 3\varepsilon/2$ по ε , находим

$$\tilde{\gamma}'(\tilde{g}_*) \tilde{g}'_*(\varepsilon) = \frac{3}{2}, \quad (54)$$

где $\tilde{\gamma}'$ обозначает производную по $\tilde{g}$, а $\tilde{g}'_*$ — производную по ε . Объединяя (53) с (54), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\tilde{g}_*}{\tilde{g}_*} = \frac{d\varepsilon}{\omega(\varepsilon)}. \quad (55)$$

Интегрируя его с дополнительным условием $\tilde{g}_*(\varepsilon) = \varepsilon/3 + O(\varepsilon^2)$, вытекающим из явного вида $\tilde{\beta}$ -функции в первом порядке теории возмущений (см. (52)), получаем

$$\tilde{g}_*(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3} \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^{1/4}. \quad (56)$$

Заметим, что $\tilde{g}_*$ и g_* совпадают лишь в первом порядке ε -разложения, но обе они конечны и положительны при всех $0 < \varepsilon \leq 2$.

Функция $\tilde{\gamma}_* = \tilde{\gamma}_*(\tilde{g}_*(\varepsilon))$ зависит от ε только через координату неподвижной точки $\tilde{g}_*(\varepsilon)$, т.к. аномальная размерность $\tilde{\gamma}(\tilde{g})$ в схеме МВ не зависит от ε . Точные равенства $\tilde{\gamma}_* = 2\varepsilon/3$ и (56) позволяют получить точное неявное выражение для аномальной размерности $\tilde{\gamma}(\tilde{g})$ вне неподвижной точки как функции $\tilde{g}$:

$$\tilde{g} = \frac{\tilde{\gamma}}{2} \left(1 - \frac{\tilde{\gamma}}{2}\right)^{1/4}. \quad (57)$$

Итерируя точное равенство (57) по $\tilde{g}$, приходим к ряду теории возмущений (52) для $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\beta}$.

Функция $\tilde{F}(1, \tilde{g})$ в представлениях (37), (40) в схеме МВ нетривиальна, что приводит к появлению добавочного множителя $f(\varepsilon) \equiv \tilde{F}(1, \tilde{g}_*)$ в ИК-асимптотике $k \rightarrow 0$. Он может быть найден точно из сопоставления выражений (40) для двух ренормировочных схем и явного вида (36) и (56) неподвижных точек в этих схемах: $f(\tilde{g}_*) = (g_*/\tilde{g}_*)^{2/3} = (1 - \varepsilon/3)^{-1/2}$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, использование метода РГ позволило получить для уравнения (15) точное решение (41)–(46), являющееся суммой ряда (20) и пригодное в отличие от последнего для нахождения ИК-асимптотики.

Переход от $H(k)$ к ренормированной функции $H_R(k)$ решает при этом УФ-проблему (см. раздел 2), которая состоит в том, что функция $H_R(k)$ конечна при $\varepsilon \rightarrow 0$. Представления (40) и (41) для $H(k)$ и $H_R(k)$ (эквивалентные с точки зрения зависимости от k)

решают первую ИК-проблему: суммирование ряда теории возмущений для нахождения его ИК-асимптотики, и попутно вторую ИК-проблему: представления (40) и (41), в отличие от коэффициентов их разложений по g_0 или g , имеют конечный предел $\varepsilon \rightarrow 2$, совпадающий с решением исходной задачи (15) при $\varepsilon = 2$.

В данной модели все РГ-функции удалось найти точно (см. (35), (57)), затем точно доказать существование ИК-устойчивой неподвижной точки (36), (56) и как следствие степенной ИК-асимптотики (41). В более сложных случаях, как, например, для стохастического уравнения Навье–Стокса (1), (2) с функцией накачки (6), РГ-функции известны лишь в виде первых членов ряда теории возмущений типа (32), (52) (см., например, [6]). При этом их коэффициенты для ренормировочной схемы ТН (но не МВ) сингулярны при конечных ε [12], в отличие, по-видимому, от точных РГ-функций. Это позволяет тем не менее получить для одновременных корреляторов типа (8) модели (1), (2) точные аналоги РГ-представлений (37)–(40). Подставляя в них приближенные выражения для РГ-функций, приходим к первым членам “улучшенной теории возмущений” [3, 21], в которой первая ИК-проблема решена уже в первом порядке. Далее можно найти ИК-асимптотику в виде (48) с той разницей, что величины g_* , ω , $C_k(\varepsilon)$ вычисляются по первым известным членам $\gamma(g)$ не точно, а в виде первых членов ε -разложений и само существование нужной неподвижной точки гарантировано, строго говоря, лишь для асимптотически малых ε .

Существование конечного предела при $\varepsilon \rightarrow 2$ и возможность экстраполяции результатов, полученных при малых ε , в эту точку остаются в модели (1), (2) гипотезой, полное обоснование которой потребует, по-видимому, решения проблемы галилеево-инвариантных “опасных” операторов, не имеющей аналога в теории критического поведения (см. [6, 17, 18]). Поэтому важно, что РГ-анализ модели Гейзенберга подтверждает корректность такой процедуры: существование нужной неподвижной точки (в данном случае гарантированное для всех $0 < \varepsilon \leq 2$) обнаруживается уже в низшем порядке ε -разложения (для обеих ренормировочных схем $g_* = \varepsilon/3 + O(\varepsilon^2)$, $\omega = \varepsilon + O(\varepsilon^2)$), показатель степени k в асимптотике (48) сразу находится точно (следствие соотношения (29), верного и для модели (1), (2)), а для $C_k(\varepsilon)$ уже первые члены ε -разложения дают неплохую численную оценку:

$$C_k(\varepsilon) = \left(\frac{4\varepsilon}{3\alpha}\right)^{2/3} \left[1 - \frac{2\varepsilon}{9} - \frac{\varepsilon^2}{81} + \dots\right],$$

т.е. первый член при $\varepsilon = 2$ завышает точный ответ (19) примерно вдвое, а учет следующих двух членов дает уже гораздо лучшее приближение. Интересно отметить, что для модели (1), (2) первый член ε -разложения константы Колмогорова $C_k(\varepsilon)$ дает значение, примерно вдвое превышающее экспериментальный результат (см. [6, 13]).

В заключение заметим, что правильное решение (17), (18) получается из (41), (42), только если при $\varepsilon \rightarrow 2$ амплитуда D_0 в корреляторе случайной силы исчезает как

$D_0 \sim (2-\varepsilon)W$ в согласии с (6), т.е. степенная накачка понимается именно как регуляризация “идеальной” δ -функции (5). В некоторых работах по РГ-теории турбулентности, например [26, 27], считается $D_0 = \text{const} \cdot W$ при $\varepsilon = 2$ как результат некоторого приближенного вычисления. На примере модели Гейзенберга ясно, что такое приближение качественно неверно и приводило бы к расходимости интеграла (3) и к бесконечным ответам для корреляционных функций, если бы авторы работ [26, 27] не ограничивались при их вычислении рамками ε -разложения (см. об этом также в [6]).

Итак, на примере точно решаемой модели Гейзенберга, являющейся вполне реалистической моделью развитой турбулентности, показаны применимость метода РГ для изучения ИК-асимптотик в теории турбулентности, возможность замены

$$d^f(k) \sim \delta(\mathbf{k}) \rightarrow d^f(k) \sim k^{1-2\varepsilon}$$

функции накачки в корреляторе случайной силы, а также возможность экстраполяции (точных или приближенных) результатов РГ-анализа из области асимптотически малых ε к реальному $\varepsilon = 2$. При этом получаемое по теории возмущений приближенное решение уравнений РГ (только и доступное для более сложной модели – стохастического уравнения Навье–Стокса) уже в низшем порядке “улучшенной теории возмущений” дает качественно верный результат для ИК-асимптотики (степенное поведение с точно известным показателем), а первые члены ε -разложения имеют хорошую численную оценку для константы Колмогорова в спектре турбулентной энергии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-17-033) и Конкурсного центра фундаментального естествознания Госкомвуза (грант № 95-0-5.1-30).

Список литературы

- [1] *W. Heisenberg.* Z. Phys. 1948. В. 124. S. 628.
- [2] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
- [3] *Д. В. Ширков.* УМН. 1994. Т. 49. С. 147.
- [4] *J. Zinn-Justin.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Oxford: Clarendon, 1989.
- [5] *C. De Dominicis, P. C. Martin.* Phys. Rev. A. 1979. V. 19. P. 419.
- [6] *Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев.* УФН. 1996. Т. 166. № 12. С. 1257.
- [7] *R. H. Kraichnan.* Phys. Rev. A. 1982. V. 25. P. 3281; Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 2400.
- [8] *S. Chen, R. H. Kraichnan.* Phys. Fluids. A. 1989. V. 1. P. 2019.
- [9] *S. L. Woodruff.* Phys. Fluids. 1994. V. 6. P. 3051.
- [10] *S. H. Lam.* Phys. Fluids. A. 1992. V. 4 (5). P. 1007.
- [11] *G. L. Eyink.* Phys. Fluids. 1994. V. 6. P. 3063.
- [12] *Э. В. Теодорович.* Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1987. № 4. С. 29; ДАН СССР. 1988. Т. 299. С. 836; Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. С. 149.
- [13] *Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев.* ЖЭТФ. 1989. Т. 95. С. 1272; *Н. В. Антонов.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1988. Т. 169. С. 18.
- [14] *Н. В. Антонов, С. В. Борисенко, В. И. Гирина.* ТМФ. 1996. Т. 107. С. 47.

- [15] *Н. В. Антонов*. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1991. Т. 189. С. 15; *Н. В. Антонов*. Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Сер. физика, химия. 1992. Вып. 3. С. 3; *Л. Ц. Аджемьян, Н. В. Антонов, Т. Л. Ким*. ТМФ. 1994. Т. 100. С. 382.
- [16] *Л. Ц. Аджемьян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак*. ТМФ. 1983. Т. 57. С. 268; *Л. Ц. Аджемьян, А. Н. Васильев, М. Гнатич*. ТМФ. 1988. Т. 74. С. 180.
- [17] *Н. В. Антонов, С. В. Борисенок, В. И. Гурина*. ТМФ. 1996. Т. 106. С. 92.
- [18] *Н. В. Антонов, А. Н. Васильев*. ТМФ. 1997. Т. 110. С. 122.
- [19] *M. Avellaneda, A. J. Majda*. Commun. Math. Phys. 1990. V. 131. P. 381.
- [20] *А. С. Монин, А. М. Яглом*. Статистическая гидромеханика. Т. 2. Санкт-Петербург: Гидрометеоиздат, 1996.
- [21] *Д. В. Ширков*. ДАН СССР. 1982. Т. 263. С. 64; ТМФ. 1984. Т. 60. С. 218; *D. V. Shirkov*. Int. J. Mod. Phys. A. 1988. V. 3. P. 1321.
- [22] *В. Ф. Ковалев, В. В. Пустовалов, Д. В. Ширков*. Групповой анализ и ренормгруппа. Сообщение ОИЯИ Р5-95-447. Дубна: ОИЯИ, 1995.
- [23] *N. Goldenfeld, O. Martin, Y. Oono, F. Liu*. Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 1361; *N. Goldenfeld, O. Martin, Y. Oono*. J. Sci. Comput. 1990. V. 4. P. 355.
- [24] *W. D. McComb*. The Physics of Fluid Turbulence. Oxford: Clarendon, 1990.
- [25] *Дж. Коллинз*. Перенормировка. М.: Мир, 1988.
- [26] *V. Yakhot, S. A. Orszag*. Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 1722; J. Sci. Comput. 1986. V. 1. P. 3.
- [27] *W. P. Dannevik, V. Yakhot, S. A. Orszag*. Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 2021.

Поступила в редакцию 24.XI.1997 г.