Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Хакимов, Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для плодородных моделей “hard core” с тремя состояниями на дереве Кэли, *ТМФ*, 2015, том 183, номер 3, 441–449

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8700>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:43:33

© 2015 г.

Р. М. Хакимов*

ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ ПЛОДОРОДНЫХ МОДЕЛЕЙ “HARD CORE” С ТРЕМЯ СОСТОЯНИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Рассмотрены плодородные модели “hard core” с параметром активности $\lambda > 0$ и тремя состояниями на дереве Кэли порядка три. Известно, что существуют четыре типа таких моделей, для двух из которых при $\lambda > 0$ трансляционно-инвариантная мера Гиббса единственна, а для двух других моделей найдено значение λ_{cr} такое, что при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют только три трансляционно-инвариантные меры Гиббса, а при $\lambda \leq \lambda_{cr}$ – только одна трансляционно-инвариантная мера Гиббса.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, модель hard core, мера Гиббса, трансляционно-инвариантные меры.

DOI: 10.4213/tmf8700

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание всех предельных мер Гиббса, в частности трансляционно-инвариантных, для заданного гамильтониана является одной из основных задач теории мер Гиббса. Определение меры Гиббса и понятия, связанные с этой теорией, вводятся стандартным образом (см., например, монографии [1]–[3]).

Известно, что для модели Изинга на дереве Кэли количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса, зависящих от температуры, может быть равно 1 или 3. В работе [4] доказано, что на дереве Кэли трансляционно-инвариантная мера Гиббса антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем единственна. Работа [5] посвящена модели Поттса со счетным числом состояний и с ненулевым внешним полем на дереве Кэли. Доказано, что эта модель имеет единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса. В работе [6] дано полное описание трансляционно-инвариантных мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса с q состояниями и показано, что их количество равно $2^q - 1$.

В работе [7] изучена модель “hard core” (НС) на дереве Кэли и доказано, что трансляционно-инвариантная мера Гиббса для этой модели единственна. Кроме того, при некоторых условиях на параметры модели НС доказана неединственность

*Институт математики при Национальном университете Узбекистана, Ташкент, Узбекистан. E-mail: rustam-7102@rambler.ru

периодических мер Гиббса с периодом два. В работе [8] изучены слабо периодические меры Гиббса для модели НС. Показана единственность (трансляционно-инвариантной) слабо периодической меры для модели НС. В работах [9], [10] были изучены меры Гиббса для модели НС с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 1$. В работе [11] выделены плодородные модели НС, соответствующие графам типа *петля*, *свисток*, *жезл* и *ключ*. В работе [9] были рассмотрены трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели НС в случае графа *ключ* на дереве Кэли и была доказана единственность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для любой положительной активности λ . В статье [10] изучались трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели НС в случаях графов *свисток*, *жезл* и *петля* и показано, что (для графа *петля*) из положительной активности не следует единственность трансляционно-инвариантных мер.

В настоящей работе рассматриваются плодородные модели НС с тремя состояниями на однородном дереве Кэли. Для графов *петля* и *жезл* описаны трансляционно-инвариантные НС-меры Гиббса на дереве Кэли третьего порядка.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ

Дерево Кэли $\mathfrak{Z}^k$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, т. е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Пусть $\mathfrak{Z}^k = (V, L, i)$, где V есть множество вершин графа $\mathfrak{Z}^k$, L – множество его ребер и i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то вершины x и y называются *ближайшими соседями*, и в этом случае мы пишем $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V : \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ введем обозначения $W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}$ и

$$V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \quad L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}. \quad (1)$$

Рассмотрим модель НС ближайших соседей с тремя состояниями на однородном дереве Кэли. В этой модели каждой вершине x ставится в соответствие одно из значений $\sigma(x) \in \{0, 1, 2\}$. Значения $\sigma(x) = 1, 2$ означают, что вершина x “занята”, а значение $\sigma(x) = 0$ означает, что вершина x “вакантна”. Конфигурация $\sigma = \{\sigma(x) \mid x \in V\}$ на дереве Кэли задается как функция из V в множество $\{0, 1, 2\}$. Множество всех конфигураций на V обозначается через Ω . Аналогичным образом можно определить конфигурации в V_n (в W_n), и множество всех конфигураций в V_n (в W_n) обозначается как Ω_{V_n} (как Ω_{W_n}).

Рассмотрим четыре типа плодородных (fertile) графов с тремя вершинами 0, 1, 2 (на множестве значений $\sigma(x)$), которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{петля :} & \quad \{0, 0\} \{0, 1\} \{0, 2\} \{1, 1\} \{2, 2\}, \\ \text{жезл :} & \quad \{0, 1\} \{0, 2\} \{1, 1\} \{2, 2\}, \\ \text{ключ :} & \quad \{0, 0\} \{0, 1\} \{0, 2\} \{1, 1\}, \\ \text{свисток :} & \quad \{0, 0\} \{0, 1\} \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Графы, которые не являются плодородными, называются бесплодными (sterile) [11].

Пусть $O = \{\text{ключ}, \text{жезл}, \text{петля}, \text{свисток}\}$ и $G \in O$. Конфигурация σ называется G -допустимой конфигурацией на дереве Кэли (в V_n или W_n), если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ есть ребро графа G для любой ближайшей пары соседей x, y из V (из V_n или из W_n). Обозначим множество G -допустимых конфигураций через Ω^G (через $\Omega_{V_n}^G$ или $\Omega_{W_n}^G$ соответственно).

Множество активности [11] для графа G есть функция $\lambda: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ из множества G в множество положительных действительных чисел. Значение λ_i функции λ в вершине $i \in \{0, 1, 2\}$ называется ее активностью.

Будем писать $x < y$, если путь от x^0 до y проходит через x . Вершина y называется прямым потомком вершины x , если $y > x$ и x, y являются соседями. Через $S(x)$ обозначим множество прямых потомков вершины x . Заметим, что в $\mathfrak{Z}^k$ всякая вершина $x \neq x^0$ имеет k прямых потомков, а вершина x^0 имеет $k + 1$ потомков.

Для $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$ обозначим как

$$\#\sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1)$$

число занятых вершин в σ_n .

Пусть $z: x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x}) \in \mathbb{R}_+^3$ есть векторнозначная функция на V . Для $n = 1, 2, \dots$ и $\lambda > 0$ рассмотрим вероятностную меру $\mu^{(n)}$ на $\Omega_{V_n}^G$, определяющуюся как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x), x}. \quad (2)$$

Здесь Z_n – нормировочный множитель,

$$Z_n = \sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}^G} \lambda^{\#\tilde{\sigma}_n} \prod_{x \in W_n} z_{\tilde{\sigma}(x), x}.$$

Говорят, что вероятностная мера $\mu^{(n)}$ является согласованной, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}^G$

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}^G} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}^G) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (3)$$

В этом случае существует единственная мера μ на $(\Omega^G, \mathbf{B})$ такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$

$$\mu(\sigma|_{V_n=\sigma_n}) = \mu^{(n)}(\sigma_n),$$

где $\mathbf{B}$ – σ -алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами множества Ω^G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мера μ , определенная формулой (2) с условием (3), называется (G) -НС-мерой Гиббса с $\lambda > 0$, соответствующей функции $z: x \in V \setminus \{x^0\} \mapsto z_x$. Множество таких мер (для всевозможных z) обозначается через $\mathcal{S}_G$.

Пусть $L(G)$ – множество ребер графа G ; обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ матрицу смежности графа G , т. е.

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

В следующей теореме [10] сформулировано условие на z_x , гарантирующее согласованность меры $\mu^{(n)}$.

ТЕОРЕМА 1. *Вероятностные меры $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, заданные формулой (2), согласованы тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеют место следующие равенства:*

$$\begin{aligned} z'_{1,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{10} + a_{11}z'_{1,y} + a_{12}z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z'_{1,y} + a_{02}z'_{2,y}}, \\ z'_{2,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{20} + a_{21}z'_{1,y} + a_{22}z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z'_{1,y} + a_{02}z'_{2,y}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x} / z_{0,x}$, $i = 1, 2$.

3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА

Мы полагаем, что $z_{0,x} \equiv 1$ и $z_{i,x} = z'_{i,x} > 0$ для $i = 1, 2$. Тогда для любых функций $x \in V \mapsto z_x = (z_{1,x}, z_{2,x})$, удовлетворяющих равенствам

$$z_{i,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + a_{i1}z_{1,y} + a_{i2}z_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z_{1,y} + a_{02}z_{2,y}}, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

существует единственная G -НС-мера Гиббса μ , и наоборот. Начнем с трансляционно-инвариантных решений, в которых $z_x = z \in \mathbb{R}_+^2$, $x \neq x_0$.

3.1. Случай $G = \text{петля}$. В этом случае, полагая $z_x = z$, из (5) получим следующую систему уравнений:

$$z_1 = \lambda \left(\frac{1 + z_1}{1 + z_1 + z_2} \right)^k, \quad z_2 = \lambda \left(\frac{1 + z_2}{1 + z_1 + z_2} \right)^k. \quad (6)$$

Вычитая из первого уравнения системы (6) второе, получим, что $z_1 = z_2$ или

$$(1 + z_1 + z_2)^k = \lambda((1 + z_1)^{k-1} + \dots + (1 + z_2)^{k-1}) \quad (7)$$

для $z_1 \neq z_2$. Если $z_1 = z_2 = z$, из системы (6) имеем

$$\lambda^{-1}z = f(z) = \left(\frac{1 + z}{1 + 2z} \right)^k. \quad (8)$$

Функция $f(z)$ убывает при $z > 0$. Следовательно, уравнение (8) имеет единственное решение $z^* = z^*(k, \lambda)$ для любого $\lambda > 0$.

В случае $k = 2$ известна следующая теорема [10].

ТЕОРЕМА 2. *При $k = 2$ для случая $G = \text{петля}$ имеют место следующие утверждения:*

- 1) при $\lambda \leq 9/4$ существует единственная трансляционно-инвариантная мера Гиббса μ_0 для модели НС,
- 2) при $\lambda > 9/4$ существует не менее трех трансляционно-инвариантных НС-мер Гиббса μ_i , $i = 0, 1, 2$.

Следующее утверждение дает оценки для произвольного решения системы уравнений (6).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Решения системы уравнений (6) удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\lambda}{(1+\lambda)^k} < z_i < \lambda, \quad i = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\frac{1+z_1}{1+z_1+z_2} < 1, \quad \frac{1+z_2}{1+z_1+z_2} < 1,$$

из уравнений (6) получим, что $0 < z_1 < \lambda$, $0 < z_2 < \lambda$. Кроме того, используя эти неравенства, из первого уравнения (6) имеем

$$\frac{\lambda}{z_1} = \left(1 + \frac{z_2}{1+z_1}\right)^k < \left(1 + \frac{\lambda}{1+0}\right)^k = (1+\lambda)^k \implies z_1 > \frac{\lambda}{(1+\lambda)^k}.$$

Из второго уравнения (6) аналогично можно получить

$$z_2 > \frac{\lambda}{(1+\lambda)^k}.$$

Утверждение доказано.

Рассмотрим случай $k = 3$. В этом случае система уравнений (6), если положить $\sqrt[3]{z_1} = x > 0$, $\sqrt[3]{z_2} = y > 0$, принимает вид

$$x = \sqrt[3]{\lambda} \frac{1+x^3}{1+x^3+y^3}, \quad y = \sqrt[3]{\lambda} \frac{1+y^3}{1+x^3+y^3}. \quad (9)$$

Разделив первое уравнение на второе в последней системе уравнений, получим, что $x = y$ или

$$x + y = \frac{1}{xy} \quad (10)$$

при $x \neq y$. Из уравнения (10) при $x \neq y$ найдем y :

$$y = \frac{\sqrt{x^4+4x} - x^2}{2x}. \quad (11)$$

Далее, заметив, что $y^2 = 1/x - xy$ в силу (10), после некоторых преобразований перепишем первое уравнение системы (9) следующим образом:

$$x = \sqrt[3]{\lambda} \frac{(1+x^3)x}{x^4 + y(1+x^3)}.$$

Используя равенство (11), будем иметь уравнение

$$4x(\sqrt[3]{\lambda}x^8 - \sqrt[3]{\lambda^2}x^7 + 2x^6 - 2\sqrt[3]{\lambda^2}x^4 + 2x^3 - \sqrt[3]{\lambda}x^2 - \sqrt[3]{\lambda^2}x + 1) = 0.$$

Это уравнение имеет решение $x = x(\lambda)$. Но мы рассмотрим это уравнение относительно переменной λ и получим решение $\lambda = \lambda(x)$. Для этого, положив $\sqrt[3]{\lambda} = t$, рассмотрим уравнение

$$x(x^3 + 1)^2 t^2 - x^2(x^6 - 1)t - (2x^6 + 2x^3 + 1) = 0. \quad (12)$$

Отсюда

$$t_{1,2} = \frac{x^2(x^3 - 1) \pm (x^3 + 1)\sqrt{x^4 + 4x}}{2x(x^3 + 1)}.$$

Следовательно, поскольку $t_2 < 0$, имеем

$$t - t_1 = 0 \iff t = \frac{x^2(x^3 - 1) + (x^3 + 1)\sqrt{x^4 + 4x}}{2x(x^3 + 1)} = \varphi(x).$$

Проанализировав функцию $\varphi(x)$, заметим, что $\varphi(x) > 0$. Кроме того, $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow +\infty$, поэтому каждому значению t соответствуют по крайней мере два значения x при $t > \varphi(x^*)$, одно значение при $t = \varphi(x^*)$, и уравнение $t = \varphi(x)$ не имеет решений при $t < \varphi(x^*)$, где x^* есть решение уравнения $\varphi'(x) = 0$. С помощью программы **MathCAD (Maple)** найдем положительное решение уравнения $\varphi'(x) = 0$, которое единственно и равно $x^* = \sqrt[3]{4}/2$. Положим

$$\lambda_{\text{cr}} = t^3 = \varphi^3(x^*) = \frac{32}{27}.$$

Заметим, что если $\varphi''(x) > 0$, то каждому значению λ соответствуют только два значения x при $\lambda > \lambda_{\text{cr}}$. Поэтому докажем, что $\varphi''(x) > 0$. Действительно,

$$\varphi''(x) = \frac{12x^4(2 - x^3)(x + 4)\sqrt{x^2 + 4x} + (x^4 + 4x + 12)(x^3 + 1)^3}{2x^2(x + 4)(x^3 + 1)^3\sqrt{x^2 + 4x}}.$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = 12x^4(2 - x^3)(x + 4)\sqrt{x^2 + 4x} + (x^4 + 4x + 12)(x^3 + 1)^3.$$

Ясно, что если $x^3 < 2$, то $\varphi''(x) > 0$. Пусть $x^3 > 2$. Тогда из неравенства $\psi(x) > 0$ получим

$$\begin{aligned} \alpha(x) = & x^{26} + 14x^{23} + 24x^{22} + 79x^{20} + 240x^{19} - 1492x^{17} - 5976x^{16} - 7776x^{15} + \\ & + 7327x^{14} + 29568x^{13} + 38448x^{12} - 6466x^{11} - 25368x^{10} - 33984x^9 + \\ & + 289x^8 + 1584x^7 + 2160x^6 + 104x^5 + 600x^4 + 864x^3 + 16x^2 + 96x + 144 > 0. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha(1) = 496 > 0$. С помощью программы **MathCAD (Maple)** можно увидеть, что уравнение $\alpha(x) = 0$ имеет два положительных решения $x_1 < 1$, $x_2 < 1$. Отсюда получим, что $\varphi''(x) > 0$ при $x > 0$.

Пусть теперь в (10) $x = y$. Тогда $x = y = 1/\sqrt[3]{2}$. Используя первое или второе уравнение системы (9), найдем, что $\lambda = 32/27$. Заметим, что при данном λ значения $z = z_1 = z_2 = 1/2$ удовлетворяют уравнению (8) при $k = 3$, т. е. $(1/2, 1/2)$ является единственным решением системы (6). Из всего сказанного выше вытекает следующая

ТЕОРЕМА 3. При $k = 3$ и $\lambda_{\text{кр}} = 32/27$ для случая $G = \text{петля}$ верны следующие утверждения:

1) при $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ существуют только три трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели НС,

2) при $\lambda \leq \lambda_{\text{кр}}$ существует только одна трансляционно-инвариантная мера Гиббса для модели НС.

3.2. Случай $G = \text{жесл}$. В этом случае предполагая $z_x = z$, из формулы (5) при $k = 3$ получим следующую систему уравнений:

$$z_1 = \lambda \left(\frac{1 + z_1}{z_1 + z_2} \right)^3, \quad z_2 = \lambda \left(\frac{1 + z_2}{z_1 + z_2} \right)^3. \quad (13)$$

Положив $\sqrt[3]{z_1} = x > 0$, $\sqrt[3]{z_2} = y > 0$, мы можем записать ее как

$$x = \sqrt[3]{\lambda} \frac{1 + x^3}{x^3 + y^3}, \quad y = \sqrt[3]{\lambda} \frac{1 + y^3}{x^3 + y^3}. \quad (14)$$

Разделив первое уравнение на второе в последней системе уравнений, получим $x = y$ или

$$x + y = \frac{1}{xy} \quad (15)$$

при $x \neq y$. Отсюда следует два случая: либо $x < 1$, $y < 1$ (следовательно, $\lambda < 1$), либо $x < 1$, $y > 1$ или $x > 1$, $y < 1$.

Следующее утверждение дает оценки для произвольного решения системы уравнений (13).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Решения системы уравнений (13) удовлетворяют следующим неравенствам:

1) при $z_1 < 1$, $z_2 < 1$

$$\lambda < z_i < \frac{(1 + \lambda)^3}{8\lambda^2}, \quad i = 1, 2;$$

2) при $z_1 < 1$, $z_2 > 1$ или $z_1 > 1$, $z_2 < 1$

$$0 < z_1 < \lambda, \quad \lambda < z_2 < \frac{(1 + \lambda)^3}{\lambda^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Так как $z_1 < 1$, $z_2 < 1$, мы имеем $z_1 > \lambda$, $z_2 > \lambda$. Отсюда

$$z_1 = \lambda \left(\frac{1 + z_1}{z_1 + z_2} \right)^3 < \lambda \left(\frac{1 + z_1}{z_1 + \lambda} \right)^3 = \psi(z_1).$$

Здесь производная $\psi'(z_1) < 0$, т.е. функция $\psi(z_1)$ убывает, при $z_1 > \lambda$. Следовательно,

$$\lambda < z_1 < \lambda \left(\frac{1 + \lambda}{2\lambda} \right)^3 = \frac{(1 + \lambda)^3}{8\lambda^2} \implies \sqrt[3]{\lambda} < x < \frac{1 + \lambda}{2\sqrt[3]{\lambda^2}}.$$

Аналогично,

$$\lambda < z_2 < \frac{(1 + \lambda)^3}{8\lambda^2} \implies \sqrt[3]{\lambda} < y < \frac{1 + \lambda}{2\sqrt[3]{\lambda^2}}.$$

2. Пусть $z_1 < 1$, $z_2 > 1$. Тогда

$$z_1 < 1 \implies z_2 = \lambda \left(\frac{1+z_2}{z_1+z_2} \right)^3 > \lambda,$$

$$z_2 > 1 \implies z_1 = \lambda \left(\frac{1+z_1}{z_1+z_2} \right)^3 < \lambda,$$

т. е. $z_1 < \lambda < z_2$. Отсюда $0 < z_1 < \lambda$ ($0 < x < \sqrt[3]{\lambda}$) и

$$\lambda < z_2 = \lambda \left(\frac{1+z_2}{z_1+z_2} \right)^3 < \lambda \left(\frac{1+z_2}{z_2} \right)^3 = \varphi(z_2).$$

Здесь производная $\varphi'(z_2) < 0$, т. е. функция $\varphi(z_2)$ убывает, при $z_2 > \lambda$. Следовательно,

$$\lambda < z_2 < \lambda \left(\frac{1+\lambda}{\lambda} \right)^3 = \frac{(1+\lambda)^3}{\lambda^2} \implies \sqrt[3]{\lambda} < y < \frac{1+\lambda}{\sqrt[3]{\lambda^2}}.$$

Утверждение доказано.

Подобно случаю $G = \text{петля}$ тем же методом можно получить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. При $k = 3$ и $\lambda_{\text{ср}} = 4/27$ для случая $G = \text{жезл}$ верны следующие утверждения:

1) при $\lambda > \lambda_{\text{ср}}$ существуют только три трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели НС,

2) при $\lambda \leq \lambda_{\text{ср}}$ существует только одна трансляционно-инвариантная мера Гиббса для модели НС.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. И в этом случае при $\lambda = \lambda_{\text{ср}}$ единственной трансляционно-инвариантной мере соответствует $z = z_1 = z_2 = 1/2$. Кроме того, известно, что при $k = 2$ в случае $G = \text{жезл}$ мы имеем $\lambda_{\text{ср}} = 1$, и справедливо утверждение, подобное теореме 4 [10].

3.3. Случаи $G = \text{свисток}$ или $G = \text{ключ}$. В случаях, когда $G = \text{свисток}$ или $G = \text{ключ}$, полагая $z_x = z$, из (5) при любом k имеем системы уравнений

$$z_1 = \lambda \left(\frac{1+z_2}{1+z_1} \right)^k, \quad z_2 = \lambda \left(\frac{z_1}{1+z_1} \right)^k$$

или

$$z_1 = \lambda \left(\frac{1+z_1}{1+z_1+z_2} \right)^k, \quad z_2 = \lambda \left(\frac{1}{1+z_1+z_2} \right)^k$$

соответственно.

В каждом из этих случаев было доказано, что для любых $\lambda > 0$ и $k \geq 1$ трансляционно-инвариантная мера Гиббса единственна [9], [10].

Благодарности. Автор выражает свою глубокую признательность профессору У. А. Розикову за постановку задачи и полезные советы по работе.

Список литературы

- [1] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992.
- [2] С. Preston, *Gibbs States on Countable Sets*, Cambridge Tracts in Mathematics, **68**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.
- [3] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [4] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [5] N. N. Ganikhodzhaev, U. A. Rozikov, *Lett. Math. Phys.*, **75**:2 (2006), 99–109.
- [6] С. Külske, U. A. Rozikov, R. M. Khakimov, *J. Stat. Phys.*, **156**:1 (2014), 189–200.
- [7] Yu. M. Suhov, U. A. Rozikov, *Queueing Syst.*, **46**:1–2 (2004), 197–212.
- [8] Р. М. Хакимов, *Матем. заметки*, **94**:5 (2013), 796–800.
- [9] J. B. Martin, U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 432–448.
- [10] У. А. Розиков, Ш. А. Шоюсупов, *ТМФ*, **149**:1 (2006), 18–31.
- [11] G. Brightwell, P. Winkler, *J. Combin. Theory Ser. B*, **77**:2 (1999), 221–262.

Поступила в редакцию 30.04.2014,
после доработки 17.09.2014