Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Джакив, Майорановские фермионы и их алгебры Клиффорда со связями, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 1, 39–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8701>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:48:39

© 2014 г.

Р. Джакив*

МАЙОРАНОВСКИЕ ФЕРМИОНЫ И ИХ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА СО СВЯЗЯМИ

Приведен пример, сводящий воедино математику (алгебры Клиффорда со связями) и физику (майорановские фермионы).

Ключевые слова: майорановские фермионы, алгебры Клиффорда, топологические возбуждения.

DOI: 10.4213/tmf8701

Посвящается Людвигу Фаддееву в связи с его восьмидесятилетием. Людвиг олицетворяет собой идеал математического физика с его весомым вкладом в математику (алгебраические свойства интегрируемых систем) и в физику (квантовая теория поля).

В квантовой теории поля комплекснозначные квантовые поля описывают заряженные частицы и античастицы. Нейтрально заряженные возбуждения, которые задаются самосопряженными выражениями (частицы совпадают с античастицами), задаются вещественнозначными полями. Реальным примером может служить или нейтральный пион с нулевым спином, или фотон, который также нейтрален, но имеет спин 1, или (гипотетический) гравитон со спином 2. Все эти частицы являются бозонами. Но что можно сказать о самосопряженных фермионах? Надо признать, что пока нет экспериментальных данных, свидетельствующих в пользу их существования. Тем не менее в современных теориях такие частицы используются для объяснения последних данных, полученных в нейтринной физике. Также и суперсимметричные партнеры самосопряженных бозонов должны быть самосопряженными фермионами.

Уравнение Майораны описывает самосопряженные фермионы в терминах вещественнозначного уравнения Дирака. Стандартное комплекснозначное уравнение Дирака имеет вид

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\Psi = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi,$$

*Center for Theoretical Physics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA. E-mail: jackiw@mit.edu

где Ψ – четырехкомпонентная комплексная функция (описывающая заряженные возбуждения), α, β – четыре “дираковские” числовые (4×4) -матрицы, $\mathbf{p} = \frac{1}{i} \nabla$, m – массовый параметр. Матрицы Дирака гарантируют, что итерация дает

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = -\nabla^2 \Psi + m^2 \Psi,$$

Уравнение Дирака = $\pm \sqrt{\text{волновое уравнение массивного поля}}$.

Уравнение Дирака производит “разложение” волнового уравнения массивного поля, извлекая из него “квадратный корень” в матричных терминах. Но так как квадратные корни могут быть разных знаков, комплексное уравнение Дирака описывает фермионные частицы одновременно с фермионными античастицами. Ясно, что можно произвести аналогичное разложение, в котором частицы будут отождествлены с античастицами, т. е. с вещественнозначной волновой функцией Ψ . Анализируя приведенное выше уравнение Дирака, можно заключить, что функция Ψ может быть вещественной при мнимом β , а поскольку $\mathbf{p} = -i \nabla$, то α должно быть вещественным. Такой выбор матриц Дирака задает представление Майораны.

Конкретный пример представления Майораны для таких матриц дается выражениями

$$\begin{aligned} \alpha_M^1 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, & \alpha_M^2 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, & \alpha_M^3 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \beta_M &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, & \Psi_M^* &= \Psi_M, \\ \alpha_M^* &= \alpha_M, & \beta_M^* &= -\beta_M. \end{aligned}$$

Но так как физическое содержание инвариантно относительно преобразований сопряжения, приведенное выше условие вещественности можно заменить на условие вещественности с точностью до сопряжения, задаваемого матрицей сопряжения C :

$$C \alpha^* C^{-1} = \alpha, \quad C \beta^* C^{-1} = -\beta, \quad C \Psi^* = \Psi.$$

Например, если использовать представление Вейля

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

то матрица сопряжения примет вид¹⁾

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, уравнение Майораны сохраняет вид уравнения Дирака (Вейля), но с наложенным условием сопряжения $C \Psi^* = \Psi$:

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \sigma \cdot \mathbf{p} & m \\ m & -\sigma \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} &= i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \\ C \Psi^* &= \Psi \quad \Rightarrow \quad \chi = i \sigma^2 \psi^*. \end{aligned}$$

¹⁾В представлении Майораны $C = I$.

Условие связи приводит к двухкомпонентному майорановскому (2×2) -матричному уравнению

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \psi + i\sigma^2 m \psi^* = i \frac{\partial}{\partial t} \psi.$$

Заметим, что ψ смешивается с ψ^* ; майорановский массовый член не сохраняет никакого квантового числа, и нет различия между частицами и античастицами ввиду отсутствия квантовых чисел, различающих эти два сорта частиц, т. е. частица является своей античастицей.

Полевое разложение для заряженного дираковского поля имеет вид

$$\Psi = \sum_{E>0} (a_E e^{-iEt} \Psi_E + b_E^\dagger e^{iEt} C \Psi_E^*),$$

где a и $b^\dagger$ – операторы уничтожения частиц и рождения античастиц соответственно. Для майорановского поля получим

$$\Psi = \sum_{E>0} (a_E e^{-iEt} \Psi_E + a_E^\dagger e^{iEt} C \Psi_E^*).$$

Операторы античастиц (b , $b^\dagger$) при этом исчезают.

Замечательное обстоятельство состоит в том, что теоретики в области конденсированных состояний материи столкнулись с точно таким же уравнением при описании контакта сверхпроводника с топологическим изолятором. Соответствующая двумерная гамильтонова плотность задает уравнения движения двухкомпонентного вектора $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ и имеет вид

$$H = \psi^* \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{i} \boldsymbol{\nabla} - \mu \right) \psi + \frac{1}{2} (\Delta \psi^* i \sigma^2 \psi^* + \text{э.с.}),$$

где $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2)$, μ – химический потенциал, а Δ – параметр порядка, который может быть или постоянной величиной $\Delta = \Delta_0 = m$, или задаваться вихревым профилем, $\Delta(\mathbf{r}) = v(r) e^{i\theta}$, $v(0) = 0$, $v(\infty) = \Delta_0$.

Уравнение движения имеет вид

$$i\partial_t \psi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} - \mu) \psi + \Delta i \sigma^2 \psi^*.$$

В отсутствие μ и при постоянном параметре Δ эта система оказывается $(2+1)$ -мерной версией $(3+1)$ -мерного двухкомпонентного уравнения Майораны! Она описывает нейтральные фермионы спина $1/2$ с майорановской массой $|\Delta|$.

В присутствии единственного вихревого параметра порядка $\Delta(\mathbf{r}) = v(r) e^{i\theta}$ имеет место (статическая) изолированная мода с нулевой энергией [1], [2]

$$\psi_0 = \# \begin{pmatrix} J_0(\mu r) e^{-i\pi/4 - V(r)} \\ J_1(\mu r) e^{i(\theta + \pi/4) - V(r)} \end{pmatrix},$$

где $\#$ – вещественная постоянная, $V'(r) = v(r)$. Полевое разложение для поля Майораны при этом имеет вид

$$\Psi = \dots + a \psi_0,$$

$E \neq 0$ моды

где оператор нулевой моды a удовлетворяет уравнению

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad a^\dagger = a \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{1}{2}.$$

Как реализовать действие a на состояниях? Имеются две возможности [3].

1. Две одномерные реализации. Выберем в качестве вакуумного состояния собственное состояние a с возможными собственными значениями $\pm 1/\sqrt{2}$:

$$a |0\pm\rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |0\pm\rangle.$$

Имеются два вакуумных состояния $|0+\rangle$ и $|0-\rangle$. Две башни состояний строятся с помощью многократного применения операторов $a_E^\dagger$. При этом нет операторов, связывающих эти две башни состояний. Фермионная четность нарушена, так как a – фермионный оператор. Как и в случае спонтанного нарушения симметрии, надо выбрать вакуумное состояние $|0+\rangle$ или $|0-\rangle$, и эти два вакуумных состояния не связаны никаким туннелированием.

2. Одна двумерная реализация. Вакуум при этом двукратно вырожден, $|1\rangle, |2\rangle$, и оператор a переводит эти два состояния друг в друга:

$$a |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |2\rangle, \quad a |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle.$$

Две башни состояний строятся путем многократного применения оператора $a_E^\dagger$. Действие оператора a переводит башни состояний друг в друга. Фермионная четность сохраняется.

Естественно предположить, что фермионная четность сохраняется. Поэтому будем предполагать, что выполняется вторая возможность, которая также подтверждается рассмотрением случая пары вихрь–антивихрь, разнесенных на значительное расстояние.

Отметим, что условие нарушения фермионной четности 1 встречается в математической физике. Обозначим через $\mathcal{L}$ лагранжеву плотность для системы “скалярные кинки + фермионы”:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{\mu^2}{2} \Phi^2 - \frac{\lambda^2}{8} \Phi^4 + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - g \Phi \bar{\Psi} \Psi,$$

$\mathcal{L}$ проявляет свойства суперсимметрии для $g = \lambda, \Psi$.

С помощью условия аномалии центрального заряда в алгебре суперсимметрии можно доказать, что фермионная четность может и отсутствовать [4]. Остается открытым вопрос, можно ли каким-либо образом реализовать эту экзотическую возможность в теории конденсированного состояния или в какой-либо физически значимой теории (некоторые рассуждения на эту тему см. в работе [5]).

Сколько состояний $\mathcal{N}$ необходимо для представления N вихрей (в виде, сохраняющем фермионную четность)? При $N = 1$ используются два состояния: $\mathcal{N} = 2$. При $N = 2$ имеются эрмитовы операторы a_1 и a_2 с $a_1^2 = a_2^2 = 1/2$ и $a_1 a_2 + a_2 a_1 = 0$. Можно реализовать их действие на двух состояниях, уже присутствующих при $N = 1$:

$$\begin{aligned} a_1 |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |2\rangle, & a_1 |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle, \\ a_2 |1\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} |2\rangle, & a_2 |2\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2}} |1\rangle. \end{aligned}$$

Эти формулы записываются явно, если задать состояния с помощью декартовых 2-векторов, а операторы a_i – с помощью матриц Паули:

$$\begin{aligned} |1\rangle &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |2\rangle &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ a_1 &= \frac{\sigma^1}{\sqrt{2}}, & a_2 &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Эти результаты подтверждают формулы $\mathcal{N} = e^{N/2}$ для четных N и $\mathcal{N} = e^{(N+1)/2}$ для нечетных N .

При $N = 3$ имеем операторы трех мод: a_i , $i = 1, 2, 3$. Применить три матрицы Паули для того, чтобы представить их в нужном виде, не удастся. В частности, нельзя просто положить $a_3 = \sigma^3/\sqrt{2}$, так как матрица σ^3 имеет диагональный вид при действии на декартовы состояния, определенные выше, что должно приводить к нарушению фермионной четности. Поэтому в случае $N = 3$ приходится использовать матрицы Дирака размера 4×4 и декартовы 4-векторы. Для $\mathcal{N} = 4$ имеем следующие состояния и операторы:

$$\begin{aligned} |1\rangle &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & |2\rangle &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & |3\rangle &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |4\rangle &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \alpha &= \begin{pmatrix} 0 & i\sigma \\ -i\sigma & 0 \end{pmatrix}, & \beta &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Возьмем три из четырех матриц Дирака $\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha, \beta)$. Их вторые степени равны $1/2$, они взаимно антикоммутируют и действуют на четыре базисных вектора. Таким образом проверяется, что $\mathcal{N} = 2^{(N+1)/2} = 4$ для $N = 3^2$.

Теперь уже понятно, как надо действовать в случае высших N . Чтобы записать N операторов нулевых мод, действующих на состояния, следует использовать алгебру Клиффорда, реализованную в терминах матриц размера $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, и $\mathcal{N}$ -компонентные декартовы векторы. При выборе представителей алгебры Клиффорда следует избегать матриц, диагональных в декартовом базисе, поскольку такие элементы отвечают реализациям с нарушенной фермионной четностью. Реализации с сохраненной фермионной четностью содержат соответственно $\mathcal{N} = 2^{N/2}$ и $\mathcal{N} = 2^{(N+1)/2}$ состояний для четного и нечетного числа вихрей. Возникающая алгебра представляет собой алгебру Клиффорда с тем ограничением, что диагональные элементы должны отсутствовать [6].

Интересной открытой проблемой остается вопрос о роли, если она имеет место, реализаций с нарушенной фермионной четностью, которые встречаются в суперсимметричных теориях.

Мы все время надеемся услышать от экспериментаторов новость об обнаружении майорановских частиц. Но кто будет первым: исследователи в области сплошных сред или в области элементарных частиц?

²⁾ Матрица $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ также антикоммутирует с остальными, но ее нельзя использовать, так как она имеет диагональный вид, приводящий к нарушению фермионной четности.

Список литературы

- [1] R. Jackiw, P. Rossi, *Nucl. Phys. B*, **190**:4 (1981), 681–691.
- [2] L. Fu, C. L. Kane, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:9 (2008), 096407, 4 pp.
- [3] C. Chamon, R. Jackiw, Y. Nishida, S.-Y. Pi, L. Santos, *Phys. Rev. B*, **81**:22 (2010), 224515, 10 pp.
- [4] A. Losev, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, *Phys. Lett. B*, **522**:3–4 (2001), 327–334.
- [5] G. W. Semenoff, P. Sodano, *Electron. J. Theor. Phys.*, **3**:10 (2006), 157–190.
- [6] R. Jackiw, S.-Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.*, **85**:3 (2012), 033102, 3 pp.

Поступила в редакцию 30.04.2014