Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Хатамов, Г. Т. Мадгозиев, Меры Гиббса для обобщенной модели Поттса с радиусом взаимодействия два на дереве Кэли, *ТМФ*, 2015, том 183, номер 3, 450–459

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8702>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:00:40

© 2015 г.

Н.М. Хатамов*, Г.Т. Мадгозиев*

МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА С РАДИУСОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Изучается обобщенная модель Поттса на дереве Кэли порядка $k = 3$. При некоторых условиях на параметры показано, что существует не более двух трансляционно-инвариантных мер Гиббса и континуум мер Гиббса, не являющихся трансляционно-инвариантными. Для любого нормального делителя $\hat{G}$ индекса два группового представления дерева Кэли изучены $\hat{G}$ -периодические меры Гиббса. Доказано, что существует несчетное множество $\hat{G}$ -периодических (не трансляционно-инвариантных и не “шахматно”-периодических) мер Гиббса.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, обобщенная модель Поттса, мера Гиббса.

DOI: 10.4213/tmf8702

1. ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных проблем статистической физики – найти для данного гамильтониана все отвечающие ему меры Гиббса. Определение меры Гиббса и других связанных с ней понятий можно найти, например, в монографиях [1]–[4]. Напомним, что обобщенная модель Поттса является новой и поэтому изучена очень мало по сравнению с другими моделями. Например, модель Поттса хорошо изучена на решетке $\mathbb{Z}^d$ и на дереве Кэли.

В работе [5] рассматривалась ферромагнитная модель Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли второго порядка и показано, что существует критическая температура T_c такая, что при $T < T_c$ имеются три трансляционно-инвариантные меры Гиббса и несчетное число мер Гиббса, не являющихся трансляционно-инвариантными. В работе [6] результаты статьи [5] обобщены на случай модели Поттса с конечным числом состояний на дереве Кэли произвольного (конечного) порядка. В работе [7] доказано, что на дереве Кэли трансляционно-инвариантная мера Гиббса антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем единственна. Работа [8] посвящена модели Поттса со счетным числом состояний и с ненулевым внешним полем на дереве Кэли. Доказано, что эта модель имеет единственную трансляционно-

*Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан.
E-mail: nxatamov@mail.ru

инвариантную меру Гиббса. В работе [9] найдены все трансляционно-инвариантные меры Гиббса и, в частности, показано, что при достаточно низких температурах их количество равно $2^q - 1$ (где $q \geq 2$ есть число значений спина). Доказано, что существуют $[q/2]$ критических температур и найдено точное количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для каждой промежуточной температуры. В работе [10] изучена проблема крайности трансляционно-инвариантных мер Гиббса, описанных в работе [9]. В работе [11] вводится слабо периодическая мера Гиббса и для модели Изинга найдены некоторые такие меры, а в работе [12] для модели Поттса изучены слабо периодические основные состояния и слабо периодические меры Гиббса. Полученные в работе [12] слабо периодические меры Гиббса также являются трансляционно-инвариантными.

Обобщенная модель Поттса на дереве Кэли рассмотрена в работах [13], [14]. В работе [13] для этой модели на дереве Кэли второго порядка показано, что найдется значение λ_{cr} такое, что при $\lambda > \lambda_{\text{cr}}$ существует не менее трех трансляционно-инвариантных мер Гиббса и несчетное множество $\hat{G}$ -периодических (не трансляционно-инвариантных и не “шахматно”-периодических) мер Гиббса.

В настоящей работе обобщены результаты работы [13] на случай дерева Кэли третьего порядка. Содержание работы состоит в следующем: во введении даются основные определения; в разделе 2 приведена система функциональных уравнений; в разделе 3 для рассматриваемой модели доказано существование трансляционно-инвариантных мер Гиббса; в разделе 4 изучены периодические меры Гиббса, основной результат этого раздела составляет теорема 4, утверждение которой отражает новое явление в рамках рассматриваемой модели, так как для ранее изученных моделей не существовало H_A -периодических мер Гиббса при $H_A \neq G_k^{(2)}$.

Основные понятия. Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Здесь V – множество вершин дерева Γ^k , L – множество его ребер. Пусть i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то вершины x и y называются *ближайшими соседями*, что обозначается как $\langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V\},$$

где $\langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$, т.е. $x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y$ являются ближайшими соседями. Как уже отмечалось, мы изучаем случай $k = 3$.

Известно [4], [15], что дерево Кэли представляется как группа G_k , являющаяся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$.

Рассмотрим модель, в которой спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1, 1\}$. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$. Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A . Через $|A|$ обозначим число элементов множества A .

Обобщенный символ Кронекера как функция

$$U(\sigma_A): \Omega_A \rightarrow \{|A| - 1, |A| - 2, \dots, |A| - \min(|A|, |\Phi|)\}$$

определяется следующим образом:

$$U(\sigma_A) = |A| - |\sigma_A \cap \Phi|, \quad (1.1)$$

где $A \subset V$, а $|\sigma_A \cap \Phi|$ – число различных значений $\sigma_A(x)$, $x \in A$ (см. работу [14]). В настоящей работе мы рассмотрим случай $|A| = 5$.

Обозначим через M множество всех шаров $b(x) = \{y \in V \mid d(x, y) \leq 1\}$ с радиусом 1. Гамильтониан модели определяется следующим образом:

$$H(\sigma) = -J \sum_{b \in M} U(\sigma_b), \quad J \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

2. СИСТЕМА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $x^0 \in V$ есть фиксированная точка. Будем писать $x < y$, если путь из x^0 в y проходит через x . Точка y называется *прямым потомком* точки x , если $x < y$ и $d(x, y) = 1$. Для $x \in G_k$ введем обозначение $x_\downarrow = \{y \in G_k \mid \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$, где $S(x)$ – множество прямых потомков точки $x \in V$.

Положим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x^0, x) = n\}, \quad V_n = \{x \in V \mid d(x^0, x) \leq n\}.$$

Пусть (напомним, мы изучаем дерево Кэли порядка $k = 3$)

$$b(x) = \{x, xa_1, xa_2, xa_3, xa_4\}, \quad \sigma_{b(x)} = \{\sigma(x), \sigma(xa_1), \sigma(xa_2), \sigma(xa_3), \sigma(xa_4)\}.$$

Рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на множестве Ω_{V_n} :

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x), \sigma_{b(x)}}^{\sigma_{b(x)_\downarrow}} \right\}, \quad \sigma_n \in \Omega_{V_n}, \quad (2.1)$$

где

$$Z_n = \sum_{\bar{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \exp \left\{ -\beta H(\bar{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x), \bar{\sigma}_{b(x)}}^{\bar{\sigma}_{b(x)_\downarrow}} \right\}, \quad h_{b, \bar{\sigma}_b}^{\bar{\sigma}_{b_\downarrow}} \in \mathbb{R}.$$

Говорят, что вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ (при $n \geq 1$) согласованно, если

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \quad (2.2)$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$. В этом случае существует единственная мера μ на Ω_V такая, что $\mu(\sigma|_{V_n}) = \mu(\sigma_n)$, если $\sigma|_{V_n} = \sigma_n$, для всех $n \geq 1$ и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

Рассмотрим следующие конфигурации на единичном шаре:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \{+, +, +, +, +\}, & \sigma_1 &= \{+, -, +, +, +\}, & \sigma_2 &= \{+, +, +, -, -\}, \\ \sigma_3 &= \{+, +, -, -, -\}, & \sigma_4 &= \{+, -, -, -, -\}, & & \\ -\sigma_0 &= \{-, -, -, -, -\}, & -\sigma_1 &= \{-, -, -, -, +\}, & -\sigma_2 &= \{-, -, -, +, +\}, \\ -\sigma_3 &= \{-, -, +, +, +\}, & -\sigma_4 &= \{-, +, +, +, +\}. & & \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned}
 h_{b,\sigma_0}^{\sigma_0} &= h_{b,0}, & h_{b,\sigma_1}^{\sigma_0} &= h_{b,1}, & h_{b,\sigma_2}^{\sigma_0} &= h_{b,2}, & h_{b,-\sigma_1}^{\sigma_1} &= h_{b,3}, \\
 h_{b,-\sigma_2}^{\sigma_1} &= h_{b,4}, & h_{b,-\sigma_3}^{\sigma_1} &= h_{b,5}, & h_{b,\sigma_1}^{-\sigma_1} &= h_{b,6}, & h_{b,\sigma_2}^{-\sigma_1} &= h_{b,7}, \\
 h_{b,\sigma_3}^{-\sigma_1} &= h_{b,8}, & h_{b,-\sigma_0}^{-\sigma_0} &= h_{b,9}, & h_{b,-\sigma_1}^{-\sigma_0} &= h_{b,10}, & h_{b,-\sigma_2}^{-\sigma_0} &= h_{b,11}, \\
 h_{b,\sigma_0}^{-\sigma_0} &= h_{b,12}, & h_{b,-\sigma_1}^{-\sigma_0} &= h_{b,13}, & h_{b,-\sigma_2}^{-\sigma_0} &= h_{b,14}, & h_{b,-\sigma_3}^{-\sigma_0} &= h_{b,15}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для $a \in M$ через b, c, d обозначим прямые потомки шара a [15].

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 1 из работы [13]. Эта теорема дает необходимые и достаточные условия на $h_{b,i}$, при которых выполняется условие (2.2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k = 3$. Введем обозначения

$$\beta = \frac{1}{T}, \quad \lambda = e^{J\beta}, \quad y_{a,i} = e^{h_{a,i} - h_{a,11}}, \quad i = \overline{0, 10}.$$

Вероятностное распределение $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, в (2.1) согласованно тогда и только тогда, когда для любого $a \in M$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 y_{a,0} &= y_{a,8} = \\
 &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2} + y_{b,3}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2} + y_{b,3}} \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2} + y_{c,3}}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2} + y_{c,3}} \frac{\lambda y_{d,0} + y_{d,1} + y_{d,2} + y_{d,3}}{y_{d,0} + y_{d,1} + y_{d,2} + y_{d,3}}, \\
 y_{a,1} &= y_{a,9} = \\
 &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2} + y_{b,3}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2} + y_{b,3}} \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2} + y_{c,3}}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2} + y_{c,3}} \frac{y_{d,4} + y_{d,5} + y_{d,6} + 1}{y_{d,0} + y_{d,1} + y_{d,2} + y_{d,3}}, \\
 y_{a,2} &= y_{a,10} = \\
 &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2} + y_{b,3}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2} + y_{b,3}} \frac{y_{c,4} + y_{c,5} + y_{c,6} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2} + y_{c,3}} \frac{y_{d,4} + y_{d,5} + y_{d,6} + 1}{y_{d,0} + y_{d,1} + y_{d,2} + y_{d,3}}, \\
 y_{a,3} &= y_{a,11} = \\
 &= \frac{y_{b,4} + y_{b,5} + y_{b,6} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2} + y_{b,3}} \frac{y_{c,4} + y_{c,5} + y_{c,6} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2} + y_{c,3}} \frac{y_{d,4} + y_{d,5} + y_{d,6} + 1}{y_{d,0} + y_{d,1} + y_{d,2} + y_{d,3}}, \\
 y_{a,4} &= y_{a,12} = \\
 &= \frac{\lambda y_{b,4} + y_{b,5} + y_{b,6} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2} + y_{b,3}} \frac{\lambda y_{c,4} + y_{c,5} + y_{c,6} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2} + y_{c,3}} \frac{\lambda y_{d,4} + y_{d,5} + y_{d,6} + 1}{y_{d,0} + y_{d,1} + y_{d,2} + y_{d,3}}, \\
 y_{a,5} &= y_{a,13} = \frac{\lambda y_{c,4} + y_{c,5} + y_{c,6} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2} + y_{c,3}} \frac{\lambda y_{d,4} + y_{d,5} + y_{d,6} + 1}{y_{d,0} + y_{d,1} + y_{d,2} + y_{d,3}}, \\
 y_{a,6} &= y_{a,14} = \frac{\lambda y_{d,4} + y_{d,5} + y_{d,6} + 1}{y_{d,0} + y_{d,1} + y_{d,2} + y_{d,3}}, \\
 y_{a,7} &= 1.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА

В этом разделе мы изучаем трансляционно-инвариантные меры для модели (1.2) на дереве Кэли. Заметим, что трансляционно-инвариантные меры Гиббса соответствуют решениям (2.4) с $y_{a,i} = y_i$, $i = \overline{0, 6}$, при всех $a \in M$. В (2.4) положим

$y_{a,i} = y_i \in \mathbb{R}_+$ для любого $a \in M$ и получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \left(\frac{\lambda y_0 + y_1 + y_2 + y_3}{y_0 + y_1 + y_2 + y_3} \right)^3, \\
 y_1 &= \left(\frac{\lambda y_0 + y_1 + y_2 + y_3}{y_0 + y_1 + y_2 + y_3} \right)^2 \frac{y_4 + y_5 + y_6 + 1}{y_0 + y_1 + y_2 + y_3}, \\
 y_2 &= \frac{\lambda y_0 + y_1 + y_2 + y_3}{y_0 + y_1 + y_2 + y_3} \left(\frac{y_4 + y_5 + y_6 + 1}{y_0 + y_1 + y_2 + y_3} \right)^2, \\
 y_3 &= \left(\frac{y_4 + y_5 + y_6 + 1}{y_0 + y_1 + y_2 + y_3} \right)^3, \quad y_4 = \left(\frac{\lambda y_4 + y_5 + y_6 + 1}{y_0 + y_1 + y_2 + y_3} \right)^3, \\
 y_5 &= \left(\frac{\lambda y_4 + y_5 + y_6 + 1}{y_0 + y_1 + y_2 + y_3} \right)^2, \quad y_6 = \frac{\lambda y_4 + y_5 + y_6 + 1}{y_0 + y_1 + y_2 + y_3},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\lambda > 0$. В общем случае решить систему уравнений (3.1) очень трудно. Поэтому рассмотрим ее в частном случае. Разрешая систему уравнений (3.1) относительно λ , получаем

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{\sqrt[3]{y_0}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) - (y_1 + y_2 + y_3)}{y_0}, \\
 \lambda &= \frac{\sqrt{y_1/\sqrt[3]{y_3}}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) - (y_1 + y_2 + y_3)}{y_0}, \\
 \lambda &= \frac{(y_2/\sqrt[3]{y_3^2})(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) - (y_1 + y_2 + y_3)}{y_0}, \\
 \lambda &= \frac{\sqrt[3]{y_4}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) - (y_5 + y_6 + 1)}{y_4}, \\
 \lambda &= \frac{\sqrt{y_5}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) - (y_5 + y_6 + 1)}{y_4}, \\
 \lambda &= \frac{y_6(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) - (y_5 + y_6 + 1)}{y_4}, \\
 \sqrt[3]{y_3} &= \frac{y_4 + y_5 + y_6 + 1}{y_0 + y_1 + y_2 + y_3}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Приравнявая правые части первых шести уравнений этой системы, имеем

$$\begin{aligned}
 &\left(y_0 \sqrt[3]{y_0} - 1 + \left(\sqrt{y_0 y_2} + y_2 + \sqrt{\frac{y_2^3}{y_0}} \right) (\sqrt[3]{y_0} - 1) \right) y_6^3 + \\
 &\quad + (y_0 - 1) y_6^2 + \left(y_0 - 1 - y_0(y_2 + \sqrt{y_0 y_2}) \left(1 + \sqrt{\frac{y_2}{y_0}} \right) \right) y_6 + \\
 &\quad + y_0 - 1 + \sqrt[6]{\frac{y_2^3}{y_0}} \left(y_0 + \sqrt{y_0 y_2} + y_2 + \sqrt{\frac{y_2^3}{y_0}} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Это кубическое уравнение относительно y_6 . Хорошо известно [16], что количество положительных корней многочлена не превосходит количества изменений знаков

его коэффициентов. Используя этот факт для уравнения (3.3), получим следующие утверждения:

1) если

$$y_0 > 1, \quad \frac{y_0 - 1}{2y_0y_2 + \sqrt{y_0y_2}(y_0 + y_2)} > 1$$

или

$$0 < y_0 < 1, \quad \frac{1 - y_0}{\sqrt[6]{y_2^3/y_0}(y_0 + \sqrt{y_0y_2} + y_2 + \sqrt{y_2^3/y_0})} > 1,$$

то уравнение (3.3) не имеет положительных решений;

2) если

$$0 < y_0 < 1, \quad \frac{1 - y_0}{\sqrt[6]{y_2^3/y_0}(y_0 + \sqrt{y_0y_2} + y_2 + \sqrt{y_2^3/y_0})} < 1,$$

то уравнение (3.3) имеет не более одного положительного решения;

3) если

$$y_0 > 1, \quad \frac{y_0 - 1}{2y_0y_2 + \sqrt{y_0y_2}(y_0 + y_2)} < 1,$$

то уравнение (3.3) имеет не более двух положительных решений, графический анализ показывает, что в этом случае уравнение (3.1) имеет ровно два положительных решения;

4) если $y_0 = 1$, то уравнение (3.3) имеет единственное решение

$$y_6 = \frac{1 + y_2}{1 + \sqrt{y_2}}.$$

Предположим, что для любого $a \in M$

$$y_{a,0} = y_{a,4}, \quad y_{a,1} = y_{a,5}, \quad y_{a,2} = y_{a,6}, \quad y_{a,3} = 1. \quad (3.4)$$

Тогда из системы (2.4) следует, что

$$\begin{aligned} y_{a,0} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2} + 1} \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2} + 1} \frac{\lambda y_{d,0} + y_{d,1} + y_{d,2} + 1}{y_{d,0} + y_{d,1} + y_{d,2} + 1}, \\ y_{a,1} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2} + 1} \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2} + 1}, \\ y_{a,2} &= \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2} + 1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть $\lambda > 1$. Если $y_a = (y_{a,0}, y_{a,1}, y_{a,2})$ для $a \in M$ является решением системы (3.5), то при любом $a \in M$ для каждого $i = 0, 1, 2$ выполняются неравенства $y_i^- \leq y_{a,i} \leq y_i^+$, где $(y_0^-, y_0^+, y_1^-, y_1^+, y_2^-, y_2^+)$ – решение системы

$$\begin{aligned} y_0^- &= \left(\frac{\lambda y_0^- + y_1^- + y_2^+ + 1}{y_0^- + y_1^- + y_2^+ + 1} \right)^3, & y_0^+ &= \left(\frac{\lambda y_0^+ + y_1^+ + y_2^- + 1}{y_0^+ + y_1^+ + y_2^- + 1} \right)^3, \\ y_0^- &= \left(\frac{\lambda y_0^- + y_1^- + y_2^+ + 1}{y_0^- + y_1^- + y_2^+ + 1} \right)^2, & y_0^+ &= \left(\frac{\lambda y_0^+ + y_1^+ + y_2^- + 1}{y_0^+ + y_1^+ + y_2^- + 1} \right)^2, \\ y_1^- &= \frac{\lambda y_0^- + y_1^- + y_2^+ + 1}{y_0^- + y_1^- + y_2^+ + 1}, & y_1^+ &= \frac{\lambda y_0^+ + y_1^+ + y_2^- + 1}{y_0^+ + y_1^+ + y_2^- + 1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

2. Пусть $\lambda < 1$. Если $y_a = (y_{a,0}, y_{a,1}, y_{a,2})$ для $a \in M$ является решением системы (3.5), то при любом $a \in M$ для каждого $i = 0, 1, 2$ выполняются неравенства $y_i^- \leq y_{a,i} \leq y_i^+$, где $(y_0^-, y_0^+, y_1^-, y_1^+, y_2^-, y_2^+)$ – решение системы

$$\begin{aligned} y_0^- &= \left(\frac{\lambda y_0^+ + y_1^+ + y_2^- + 1}{y_0^+ + y_1^+ + y_2^- + 1} \right)^3, & y_0^+ &= \left(\frac{\lambda y_0^- + y_1^- + y_2^+ + 1}{y_0^- + y_1^- + y_2^+ + 1} \right)^3, \\ y_0^- &= \left(\frac{\lambda y_0^+ + y_1^+ + y_2^- + 1}{y_0^+ + y_1^+ + y_2^- + 1} \right)^2, & y_0^+ &= \left(\frac{\lambda y_0^- + y_1^- + y_2^+ + 1}{y_0^- + y_1^- + y_2^+ + 1} \right)^2, \\ y_1^- &= \frac{\lambda y_0^+ + y_1^+ + y_2^- + 1}{y_0^+ + y_1^+ + y_2^- + 1}, & y_1^+ &= \frac{\lambda y_0^- + y_1^- + y_2^+ + 1}{y_0^- + y_1^- + y_2^+ + 1}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Пусть $y = (y_0^-, y_0^+, y_1^-, y_1^+, y_2^-, y_2^+)$ – решение системы (3.6). Если $y_i^- = y_i^+$, $y_j^- = y_j^+$ и $y_0^- \neq 1/(\lambda - 1)$, то $y_k^- = y_k^+$ при $i \neq j \neq k$ для $i, j, k = 0, 1, 2$.

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА

В этом разделе, считая, что выполнено условие (3.4), мы изучаем периодические меры Гиббса. Положим $h_{a,i} = \ln y_{a,i}$, $i = 0, 1, 2$, и запишем систему (3.5) в следующем виде:

$$\begin{aligned} h_{a,0} &= \ln \left(\frac{\lambda e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + e^{h_{b,2}} + 1}{e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + e^{h_{b,2}} + 1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\lambda e^{h_{c,0}} + e^{h_{c,1}} + e^{h_{c,2}} + 1}{e^{h_{c,0}} + e^{h_{c,1}} + e^{h_{c,2}} + 1} \frac{\lambda e^{h_{d,0}} + e^{h_{d,1}} + e^{h_{d,2}} + 1}{e^{h_{d,0}} + e^{h_{d,1}} + e^{h_{d,2}} + 1} \right), \\ h_{a,1} &= \ln \frac{\lambda e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + e^{h_{b,2}} + 1}{e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + e^{h_{b,2}} + 1} \frac{\lambda e^{h_{c,0}} + e^{h_{c,1}} + e^{h_{c,2}} + 1}{e^{h_{c,0}} + e^{h_{c,1}} + e^{h_{c,2}} + 1}, \\ h_{a,2} &= \ln \frac{\lambda e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + e^{h_{b,2}} + 1}{e^{h_{b,0}} + e^{h_{b,1}} + e^{h_{b,2}} + 1}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Мы рассматриваем периодические решения системы (4.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть H_0 – подгруппа группы G_k . Совокупность векторов

$$h = \{h_a = (h_{a,0}, h_{a,1}, h_{a,2}), a \in G_k\}$$

называется H_0 -периодической, если $h_{ya,i} = h_{a,i}$, $i = 0, 1, 2$, для всех $a \in G_k$ и $y \in H_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мера Гиббса, соответствующая H_0 -периодической совокупности векторов, называется H_0 -периодической.

Определим функцию $F: h = (h_0, h_1, h_2) \rightarrow F(h) \in \mathbb{R}$ следующим образом:

$$F(h) = \frac{\lambda e^{h_0} + e^{h_1} + e^{h_2} + 1}{e^{h_0} + e^{h_1} + e^{h_2} + 1}. \quad (4.2)$$

Пусть $G_k^{(2)}$ – подгруппа группы G_k , состоящая из слов четной длины. Очевидно, что $G_k^{(2)}$ является подгруппой индекса 2 [4]. Пусть

$$h_{a,i} = \begin{cases} h_i, & \text{если } c_a \in G_2^{(2)}, \\ h'_i, & \text{если } c_a \in G_2 \setminus G_2^{(2)}, \end{cases} \quad i = 0, 1, 2,$$

где c_a – центр шара a . Тогда из (4.1) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} h_0 &= 3 \ln \frac{\lambda e^{h'_0} + e^{h'_1} + e^{h'_2} + 1}{e^{h'_0} + e^{h'_1} + e^{h'_2} + 1}, & h'_0 &= 3 \ln \frac{\lambda e^{h_0} + e^{h_1} + e^{h_2} + 1}{e^{h_0} + e^{h_1} + e^{h_2} + 1}, \\ h_1 &= 2 \ln \frac{\lambda e^{h'_0} + e^{h'_1} + e^{h'_2} + 1}{e^{h'_0} + e^{h'_1} + e^{h'_2} + 1}, & h'_1 &= 2 \ln \frac{\lambda e^{h_0} + e^{h_1} + e^{h_2} + 1}{e^{h_0} + e^{h_1} + e^{h_2} + 1}, \\ h_2 &= \ln \frac{\lambda e^{h'_0} + e^{h'_1} + e^{h'_2} + 1}{e^{h'_0} + e^{h'_1} + e^{h'_2} + 1}, & h'_2 &= \ln \frac{\lambda e^{h_0} + e^{h_1} + e^{h_2} + 1}{e^{h_0} + e^{h_1} + e^{h_2} + 1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

ТЕОРЕМА 2. Для модели (1.2) при $\lambda > 0$ и при условии (3.4) существует единственная $G_2^{(2)}$ -периодическая мера Гиббса. Более того, эта мера совпадает с трансляционно-инвариантной мерой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $h_0 = h'_0$, $h_1 = h'_1$, $h_2 = h'_2$. Из системы (4.3) имеем

$$\begin{aligned} h_0 &= 3 \ln \frac{\lambda e^{h_0} + e^{h_1} + e^{h_2} + 1}{e^{h_0} + e^{h_1} + e^{h_2} + 1}, \\ h_1 &= 2 \ln \frac{\lambda e^{h_0} + e^{h_1} + e^{h_2} + 1}{e^{h_0} + e^{h_1} + e^{h_2} + 1}, \\ h_2 &= \ln \frac{\lambda e^{h_0} + e^{h_1} + e^{h_2} + 1}{e^{h_0} + e^{h_1} + e^{h_2} + 1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Эта система уравнений имеет единственное решение (h_0^*, h_1^*, h_2^*) . Действительно, из (4.4) получаем уравнение $e^{4h_2} + (1 - \lambda)e^{3h_2} - 1 = 0$. Пусть $e^{h_2} = z$, тогда

$$Q(z) = z^4 + (1 - \lambda)z^3 - 1 = 0.$$

Заметим, что знаки при коэффициентах 1, $1 - \lambda$, -1 этого уравнения меняются только один раз. Поэтому по вышеупомянутому свойству [16] о числе положительных корней многочлена мы получаем, что уравнение $Q(z) = 0$ имеет единственное положительное решение.

Теперь рассмотрим случай $h_0 \neq h'_0$, $h_1 \neq h'_1$, $h_2 \neq h'_2$. Из системы (4.3) получаем уравнения

$$h_2 = \ln \frac{\lambda e^{3h'_2} + e^{2h'_2} + e^{h'_2} + 1}{e^{3h'_2} + e^{2h'_2} + e^{h'_2} + 1}, \quad h'_2 = \ln \frac{\lambda e^{3h_2} + e^{2h_2} + e^{h_2} + 1}{e^{3h_2} + e^{2h_2} + e^{h_2} + 1}. \quad (4.5)$$

Отсюда следует, что $P(z) = 0$, где $z = e^{h_2}$, а многочлен $P(z)$ имеет вид

$$\begin{aligned} P(z) &= (\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1)z^{10} - (\lambda^4 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 3)z^9 - (3\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda - 6)z^8 - \\ &\quad - (3\lambda^3 - 9\lambda - 10)z^7 - (3\lambda^3 + 7\lambda^2 - 7\lambda - 11)z^6 - (9\lambda^2 - 9)z^5 - \\ &\quad - (6\lambda^2 + 6\lambda - 4)z^4 - (3\lambda^2 + 10\lambda + 3)z^3 - (6\lambda + 6)z^2 - (3\lambda + 5)z - \lambda - 3. \end{aligned}$$

Легко получим разложение $P(z) = Q(z)M(z)$, где $Q(z)$ задан выше и

$$\begin{aligned} M(z) &= (\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1)z^6 + (3\lambda^2 + 3\lambda + 2)z^5 + (3\lambda^2 + 5\lambda + 4)z^4 + \\ &\quad + (2\lambda^2 + 8\lambda + 4)z^3 + (4\lambda + 8)z^2 + (3\lambda + 5)z + \lambda + 3. \end{aligned}$$

Так как уравнение $Q(z) = 0$ имеет единственное решение, а уравнение $M(z) = 0$ не имеет решений, уравнение $P(z) = 0$ имеет единственное решение. Теорема доказана.

Число букв a_i , $i = \overline{1, k+1}$, участвующих в несократимой записи слова x , обозначим через $\omega_x(a_i)$. Пусть $\emptyset \neq A \subseteq N_3 = \{1, 2, 3, 4\}$ и

$$H_A = \left\{ x \in G_2 \mid \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) - \text{четное число} \right\}.$$

Очевидно, что H_A является подгруппой индекса 2 [4].

Пусть

$$h_{a,j} = \begin{cases} h_j, & \text{если } c_a \in H_A, \\ h'_j, & \text{если } c_a \in G_2 \setminus H_A, \end{cases} \quad j = 0, 1, 2.$$

Заметим, что (см. определение (4.2))

$$\begin{aligned} h_0 &= \begin{cases} 3 \ln F(h) = 2 \ln F(h) + \ln F(h'), & \text{если } |A| = 1, \\ 2 \ln F(h) + \ln F(h') = \ln F(h) + 2 \ln F(h'), & \text{если } |A| = 2, \\ 3 \ln F(h') = 2 \ln F(h') + \ln F(h), & \text{если } |A| = 3; \end{cases} \\ h'_0 &= \begin{cases} 3 \ln F(h') = 2 \ln F(h') + \ln F(h), & \text{если } |A| = 1, \\ 2 \ln F(h') + \ln F(h) = \ln F(h') + 2 \ln F(h), & \text{если } |A| = 2, \\ 3 \ln F(h) = 2 \ln F(h) + \ln F(h'), & \text{если } |A| = 3; \end{cases} \\ h_1 &= \begin{cases} 2 \ln F(h) = \ln F(h) + \ln F(h'), & \text{если } |A| = 1, \\ 2 \ln F(h) = \ln F(h) + \ln F(h') = 2 \ln F(h'), & \text{если } |A| = 2, \\ 2 \ln F(h') = \ln F(h') + \ln F(h), & \text{если } |A| = 3; \end{cases} \\ h'_1 &= \begin{cases} 2 \ln F(h') = \ln F(h') + \ln F(h), & \text{если } |A| = 1, \\ 2 \ln F(h') = \ln F(h') + \ln F(h) = 2 \ln F(h), & \text{если } |A| = 2, \\ 2 \ln F(h) = \ln F(h) + \ln F(h'), & \text{если } |A| = 3; \end{cases} \\ h_2 &= \ln F(h) = \ln F(h'); \\ h'_2 &= \ln F(h') = \ln F(h). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Случай $|A| = 4$ соответствует случаю $H_A = G_2^{(2)}$, изученному выше.

ТЕОРЕМА 3. Для модели (1.2) при условии (3.4) существует несчетное число H_A -периодических мер Гиббса. Более того, эти меры не являются трансляционно-инвариантными и не являются $G_2^{(2)}$ -периодическими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что система (4.6) имеет решение тогда и только тогда, когда $F(h) = F(h')$. Отсюда $t_0(s_1 - t_1) + t_0(s_2 - t_2) + (t_1 + t_2 + 1)(t_0 - s_0) = 0$, где $t_i = e^{h_i}$, $s_i = e^{h'_i}$, $i = 0, 1, 2$. В этом уравнении положим $s_1 - t_1 = \alpha$, $s_2 - t_2 = \gamma$. Тогда получим

$$s_1 = t_1 + \alpha, \quad s_2 = t_2 + \gamma, \quad s_0 = t_0 + \frac{(\alpha + \gamma)t_0}{t_1 + t_2 + 1}.$$

Из системы (4.6) имеем $t_1 = t_2^2$, $t_0 = (t_1 + t_2 + 1)(1 - t_2)/(t_2 - \lambda)$ и уравнение $t_2^4 + (1 - \lambda)t_2^3 - 1 = 0$. Это уравнение имеет единственное положительное решение t_2^* .

Отсюда для любых $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$

$$t_2 = t_2^*, \quad t_1 = t_1^* = (t_2^*)^2, \quad t_0 = t_0^* = \frac{(t_1^* + t_2^* + 1)(1 - t_2^*)}{t_2^* - \lambda},$$

$$s_1 = s_1^*(\alpha) = t_1^* + \alpha, \quad s_2 = s_2^*(\gamma) = t_2^* + \gamma, \quad s_0 = s_0^*(\alpha, \gamma) = t_0^* + \frac{(\alpha + \gamma)t_0^*}{t_1^* + t_2^* + 1}.$$

Таким образом, для любых $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ существует решение системы (4.6)

$$(\ln t_0^*, \ln t_1^*, \ln t_2^*, \ln s_0^*(\alpha, \gamma), \ln s_1^*(\alpha), \ln s_2^*(\gamma)).$$

Более того, эти решения различны при различных α и γ . Теорема доказана.

Из полученных выше результатов, применяя методы работ [17], [18], мы без труда можем доказать следующую теорему

ТЕОРЕМА 4. Для модели (1.2) при условии (3.4) существует континуум мер Гиббса, не являющихся трансляционно-инвариантными.

Благодарности. Авторы выражают признательность профессору У. А. Розикову за полезные дискуссии и советы, касающиеся настоящей работы.

Список литературы

- [1] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992.
- [2] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [3] C. Preston, *Gibbs States on Countable Sets*, Cambridge Tracts in Mathematics, **68**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.
- [4] U. A. Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.
- [5] Н. Н. Ганиходжаев, *ТМФ*, **85**:2 (1990), 163–175.
- [6] Н. Н. Ганиходжаев, *Докл. АН РУз*, 1992, № 6–7, 4–7.
- [7] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [8] N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov, *Lett. Math. Phys.*, **75**:2 (2006), 99–109.
- [9] C. Kuelske, U. A. Rozikov, *J. Stat. Phys.*, **156**:1 (2014), 189–200, arXiv:1310.6220.
- [10] C. Kuelske, U. A. Rozikov, *Fuzzy transformations and extremality of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree*, arXiv:1403.5775.
- [11] У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *ТМФ*, **160**:3 (2009), 507–516.
- [12] М. М. Рахматуллаев, *ТМФ*, **176**:3 (2013), 477–493.
- [13] У. А. Розиков, Г. Т. Мадгозиев, *ТМФ*, **167**:2 (2011), 311–322.
- [14] U. A. Rozikov, *J. Stat. Phys.*, **130**:4 (2008), 801–813.
- [15] U. A. Rozikov, *J. Stat. Phys.*, **122**:2 (2006), 217–235.
- [16] V. V. Prasolov, *Polynomials, Algorithms and Computation in Mathematics*, **11**, Springer, Berlin, 2004.
- [17] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, *ТВЛ*, **35**:2 (1990), 220–230.
- [18] У. А. Розиков, *ТМФ*, **118**:1 (1999), 95–104.

Поступила в редакцию 1.05.2014,
после доработки 17.09.2014