Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Либре, К. Вальс, Неинтегрируемость системы Халфена, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 2, 296–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8705>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:31:49

© 2014 г.

Ж. Либре*, К. Вальс†

НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СИСТЕМЫ ХАЛФЕНА

Исследуется система Халфена с вещественными переменными и вещественными константами. Показано, что в случае, когда хотя бы одна из констант отлична от нуля, эта система не имеет никаких первых интегралов, описываемых формальными степенными рядами. Из этого утверждения вытекает отсутствие аналитических первых интегралов. Более того, доказано, что первые интегралы типа Дарбу также не существуют.

Ключевые слова: система Халфена, аналитические первые интегралы.

DOI: 10.4213/tmf8705

1. ВВЕДЕНИЕ В ЗАДАЧУ

Мы рассматриваем систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 - x_1(x_2 + x_3) - \alpha_1^2(x_1 - x_2)(x_3 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, x_3) = x_3x_1 - x_2(x_3 + x_1) - \alpha_2^2(x_2 - x_3)(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_3 &= F_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_3(x_1 + x_2) - \alpha_3^2(x_3 - x_1)(x_2 - x_3),\end{aligned}\tag{1}$$

где x_1, x_2, x_3 – вещественные переменные, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – вещественные константы. Систему (1) будем называть второй системой Халфена (сам Халфен назвал ее второй системой [1]), поскольку при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ система (1) переходит в так называемую классическую систему Халфена. Классическая система Халфена – это хорошо известная модель (см., например, работы [1]–[3]), которая впервые появилась в работе Дарбу [1] и была в дальнейшем решена Халфеном [3]. Одно из обстоятельств, сделавших эту систему знаменитой, состоит в том, что, как было показано, эта система эквивалентна полевым уравнениям Эйнштейна для диагональной самодуальной метрики Бианки-IX с евклидовой сигнатурой (см. [2], [4]). Классическая система Халфена также возникает при самоподобных редукциях уравнений ассоциативности на трехмерном фробениусовом многообразии [5].

*Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, Catalonia, Spain. E-mail: jllibre@mat.uab.cat

†Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal. E-mail: cvalls@math.ist.utl.pt

С точки зрения интегрируемости классическая система Халфена интенсивно исследовалась с помощью различных методов. Один из основных результатов в этом направлении утверждает, что система (1) при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ оказывается явно интегрируемой, так как ее общее решение выражается в терминах эллиптических интегралов [3], [6], [7], но ее первые интегралы не являются глобальными и представляют собой многозначные неалгебраические функции [8]. Другой достойный внимания результат был получен в работе [9] с помощью так называемых многочленов Дарбу. Этот результат утверждает, что система (1) при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ не имеет непостоянных алгебраических интегралов. Наконец, отметим работу [10], в которой была дана полная характеристика формальных и аналитических первых интегралов.

Первая цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, что не существуют первые интегралы системы (1), задаваемые в виде формальных степенных рядов. Будем рассматривать случай $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$; случай $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ был исчерпывающе изучен в работе [10]. В статье [11] в рамках другого обобщения классической системы Халфена при некоторых условиях на параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ было показано, что первые интегралы типа Дарбу не существуют. В настоящей работе мы смогли доказать, что первые интегралы типа Дарбу для обобщенной системы Халфена, задаваемой уравнениями (1), при всех значениях параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ не существуют. По поводу других применений интегрируемости по Дарбу см. работу [12].

Одна из идей, которые мы применяем при решении проблемы существования формальных первых интегралов, состоит в следующем. Три плоскости

$$H_1 := x_1 - x_2 = 0, \quad H_2 := x_1 - x_3 = 0, \quad H_3 := x_2 - x_3 = 0 \quad (2)$$

оказываются инвариантными относительно потоков системы (1); при этом если функция $f := f(x_1, x_2, x_3)$ представляет собой первый интеграл системы (1), то для каждого $i = 1, 2, 3$ ограничение функции f на многообразие $H_i = 0$ также является первым интегралом системы (1). Таким образом, метод, используемый в настоящей работе, состоит в исследовании интегрируемости системы, редуцированной на каждое из многообразий $H_i = 0$, что позволяет получить точную информацию об интегралах полной системы (1).

Приведем основные результаты работы.

Формальным первым интегралом $f = f(x_1, x_2, x_3)$ системы (1) будем называть непостоянный формальный степенной ряд по переменным x_1, x_2, x_3 такой, что

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} F_i(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

ТЕОРЕМА 1. *При любом выборе $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ система (1) не имеет никакого формального первого интеграла.*

Будем называть *аналитическим первым интегралом* системы (1) непостоянную аналитическую функцию, которая постоянна на траекториях системы (1). Как следствие теоремы 1 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. При любом выборе $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ система (1) не имеет никакого аналитического первого интеграла.

Будем называть рациональным первым интегралом $f = f(x_1, x_2, x_3)$ системы (1) непостоянную рациональную функцию, постоянную на решениях системы (1).

ТЕОРЕМА 3. При любом выборе $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ система (1) не имеет никакого рационального первого интеграла.

Наконец, мы исследуем первые интегралы системы (1) типа Дарбу (см. определение ниже).

ТЕОРЕМА 4. При любом выборе $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ система (1) не имеет никакого первого интеграла типа Дарбу.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 представлены некоторые вспомогательные результаты, необходимые для доказательства теорем 1 и 2. В разделе 3 приводятся доказательства теорем 1 и 2. В разделе 4 доказана теорема 3, наконец, в разделе 5 приведено доказательство теоремы 4.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Заметим, что система уравнений (1) инвариантна относительно замен

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &\rightarrow (x_2, x_3, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1), \\ (x_1, x_2, x_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &\rightarrow (x_3, x_1, x_2, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2).\end{aligned}\tag{3}$$

Первый вспомогательный результат доказывается с помощью формулы бинома Ньютона, и мы опускаем это доказательство, отсылая читателя к работе [10].

ЛЕММА 1. Пусть $f = f(x_1, x_2, x_3)$ – формальный степенной ряд такой, что при $x_l = x_j$, $l, j \in \{1, 2, 3\}$, $l \neq j$, имеет место равенство $f(x_1, x_2, x_3)|_{x_l=x_j} = \bar{f}$, где $\bar{f}$ – формальный степенной ряд по переменным x_j, x_k , $k \in \{1, 2, 3\}$, $k \neq j$ и $k \neq l$. Тогда существует формальный степенной ряд $g = g(x_1, x_2, x_3)$ такой, что $f = \bar{f} + (x_l - x_j)g$.

Напомним определение многочлена Дарбу для системы (1) с кофактором K . Будем говорить, что $f = f(x_1, x_2, x_3)$ – многочлен Дарбу системы (1), если он удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \dot{x}_3 = Kf.\tag{4}$$

Более того, так как многочлен в правой части уравнения (1) имеет степень два, кофактор K может иметь степень не выше единицы. Запишем это как

$$K = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3.$$

Заметим, что $f = 0$ – инвариантная алгебраическая поверхность для потоков системы (1), и полиномиальный первый интеграл системы (1) является многочленом Дарбу с нулевым кофактором.

Напомним, что если существуют плоскости, инвариантные относительно потоков системы (1), и многочлен Дарбу системы (1) с кофактором K , то ограничение функции f на каждую из инвариантных плоскостей будет многочленом Дарбу системы (1), ограниченной на эту инвариантную плоскость, с кофактором, представляющим собой ограничение кофактора K на эту плоскость. Отметим, что для вещественных полиномиальных дифференциальных систем, к которым относится система (1), при построении их первых интегралов типа Дарбу используются в общем случае комплексные многочлены Дарбу и комплексные экспоненциальные множители. Это связано с тем, что такие объекты возникают парами (собственно объект и его комплексно-сопряженный), и мы с необходимостью приходим к вещественнозначности первого интеграла типа Дарбу, если такой интеграл существует.

Две следующие леммы хорошо известны.

ЛЕММА 2. Для $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ любой многочлен Дарбу f системы (1) имеет кофактор вида $K = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$.

ЛЕММА 3. Для $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, если представить f как сумму однородных частей, $f = f_1 + \dots + f_n$, то f будет представлять собой многочлен Дарбу системы (1) с кофактором K тогда и только тогда, когда f_i при каждом $i = 1, \dots, n$ будет многочленом Дарбу системы (1) с кофактором K .

ЛЕММА 4. Пусть F – аналитическая функция, а $F = \sum_i F_i$ – ее разложение на однородные многочлены степени i . Тогда F представляет собой аналитический первый интеграл однородной полиномиальной системы дифференциальных уравнений (1) тогда и только тогда, когда F_i – первый интеграл системы (1), имеющий вид однородного многочлена при всех i .

При доказательстве лемм 2–4 используется однородность системы (1). Эти доказательства хорошо известны (два первых доказательства см., например, в книге [13] и третье – в работе [14]).

Как обычно, через $\mathbb{N}$ обозначим множество положительных целых чисел.

ЛЕММА 5. Если разложить многочлен f на неприводимые множители в пространстве $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ как $\prod_{j=1}^s f_j^{n_j}$ с $n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то f будет многочленом Дарбу тогда и только тогда, когда каждый из множителей f_j является многочленом Дарбу. Более того, если K и K_j являются кофакторами соответственно многочленов f и f_j , то $K = \sum_{j=1}^s n_j K_j$.

Доказательство леммы 5 можно найти, например, в [13].

Следующее утверждение важно при исследовании рациональной интегрируемости полиномиальных систем. Оно было доказано в работе [15].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Из существования рационального первого интеграла полиномиальной системы дифференциальных уравнений (1) следует либо существование полиномиального первого интеграла (и, следовательно, многочлена Дарбу с нулевым кофактором), либо существование двух взаимно простых многочленов Дарбу с одним и тем же ненулевым кофактором.

Экспоненциальный множитель F полиномиальной дифференциальной системы (1) есть функция $F = e^{f/g} \notin \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ со взаимно простыми $f, g \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \dot{x}_3 = LF \quad (5)$$

для некоторого многочлена L первой степени.

Следующий результат хорошо известен. Его доказательство и геометрический смысл можно найти в работах [16] и [17].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *если $E = e^{g_0/g_1}$ – экспоненциальный множитель полиномиальной системы (1), а многочлен g_1 не является константой, то многообразие $g_1 = 0$ представляет собой инвариантную алгебраическую кривую;*

2) *факторы e^{g_0} могут быть экспоненциальными множителями, что вытекает из мультипликативности бесконечной инвариантной прямой.*

Следующий результат, полученный в работе [16], характеризует алгебраическую мультипликативность инвариантной алгебраической кривой, если известно число экспоненциальных множителей системы (1), связанных с этой инвариантной алгебраической кривой.

ТЕОРЕМА 5. *Если дана неприводимая инвариантная алгебраическая кривая $g_1 = 0$ степени m для системы (1), то она имеет алгебраическую мультипликативность k тогда и только тогда, когда векторное поле, соответствующее системе (1), имеет $k - 1$ экспоненциальных множителей вида $e^{g_{0,i}/g_1^i}$, где $g_{0,i}$ – многочлен степени не выше im , а многочлены $g_{0,i}$ и g_1 взаимно просты для всех $i = 1, \dots, k - 1$.*

В силу теоремы 5, если удастся доказать, что e^{g_0/g_1} не является экспоненциальным множителем таким, что степень многочлена g_0 не превосходит степень многочлена g_1 , то не существует никаких экспоненциальных множителей, связанных с инвариантной алгебраической кривой $g_1 = 0$.

Первый интеграл G системы (1) имеет тип Дарбу, если он записывается как

$$G = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}, \quad (6)$$

где $f_1, \dots, f_p$ – многочлены Дарбу, $F_1, \dots, F_q$ – экспоненциальные множители, а показатели $\lambda_j, \mu_k \in \mathbb{C}$ при $j = 1, \dots, p$ и $k = 1, \dots, q$.

Нам понадобится следующий результат, доказательство которого было дано в [13].

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что система (1) имеет p многочленов Дарбу с кофакторами K_i и q экспоненциальных множителей F_j с кофакторами L_j . Тогда и только тогда, когда функция G , заданная уравнением (6) (типа Дарбу), представляет собой первый интеграл системы (1), найдутся $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, q$, не все равные нулю, такие, что*

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0.$$

Как уже отмечалось во введении, плоскости $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$ и $x_2 = x_3$ инвариантны относительно потоков системы уравнений Халфена (1). Тем самым, если f – формальный первый интеграл системы (1), функции

$$\begin{aligned} f_1(x_2, x_3) &= f(x_2, x_2, x_3), \\ f_2(x_2, x_3) &= f(x_3, x_2, x_3), \\ f_3(x_1, x_3) &= f(x_1, x_3, x_3) \end{aligned} \quad (7)$$

оказываются формальными первыми интегралами системы (1), ограниченной соответственно на плоскости $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$ и $x_2 = x_3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, если f есть формальный первый интеграл системы (1), то он имеет вид

$$f = c_0 + (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)g,$$

где c_0 – некоторая константа, а $g := g(x_1, x_2, x_3)$ – формальный степенной ряд.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – формальный первый интеграл системы (1). Докажем сначала, что $f_1 = c_0$, где f_1 задается формулой (7). В самом деле, f_1 удовлетворяет уравнению

$$-x_2^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + (x_2^2 - 2x_2x_3 + \alpha_3^2(x_2 - x_3)^2) \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0.$$

Произведем линейную замену переменных

$$y_2 = x_2, \quad z_2 = x_2 - x_3. \quad (8)$$

В полученных переменных $f_1(x_2, x_3) = h(y_2, z_2)$ и

$$-y_2^2 \frac{\partial h}{\partial y_2} - (2y_2 + \alpha_3^2 z_2) z_2 \frac{\partial h}{\partial z_2} = 0. \quad (9)$$

Покажем, что $h = c_0$. Для этого запишем функцию h в виде степенного ряда по переменным y_2 и z_2 :

$$h = \sum_{k, l \geq 0} h_{k, l} y_2^k z_2^l.$$

Учитывая справедливость уравнения (9) для h , получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k, l \geq 0} (k + 2l) h_{k, l} y_2^{k+1} z_2^l + \alpha_3^2 \sum_{k, l \geq 0} l h_{k, l} y_2^k z_2^{l+1} = \\ &= \sum_{k, l \geq 0} ((k + 2l - 1) h_{k-1, l} + \alpha_3^2 (l - 1) h_{k, l-1}) y_2^k z_2^l, \end{aligned} \quad (10)$$

где $h_{m, n} = 0$ при $m < 0$ или $n < 0$. Далее, приравнявая нулю коэффициенты при всех степенях переменных y_2 и z_2 в выражении (10), получаем

$$(k + 2l - 1) h_{k-1, l} + \alpha_3^2 (l - 1) h_{k, l-1} = 0, \quad k, l \geq 0. \quad (11)$$

Можно утверждать, что

$$h_{k,l} = 0 \quad \text{при} \quad k, l \geq 0, \quad \text{если} \quad (k, l) \neq (0, 0). \quad (12)$$

Докажем это утверждение индукцией по переменной l . При $l = 0$ из уравнения (11) следует, что $(k - 1)h_{k-1,0} = 0$ при всех $k \geq 0$, откуда немедленно получим, что $h_{k,0} = 0$ при всех $k > 0$, и это завершает доказательство утверждения (12) при $l = 0$. Предположим теперь, что утверждение (12) справедливо при $l = 0, \dots, m - 1$ (для $m \geq 1$), и докажем его при $l = m$. По предположению индукции функция $h_{k,m}$ удовлетворяет соотношению $(k + 2m - 1)h_{k-1,m} = 0$ при $k \geq 0$, откуда следует, что $h_{k,m} = 0$ при $k \geq 0$. Тем самым соотношение (12) доказано при $l = m$, и по индукции можно заключить, что оно выполнено при всех $l \geq 0$. Далее из условия (12) получим, что $h = h_{0,0} = c_0$, следовательно, $f_1(x_2, x_3) = c_0$. Применяя теперь лемму 1 при $x_l = x_1$ и $x_j = x_2$, получим, что равенство

$$f = c_0 + (x_1 - x_2)g_0 \quad (13)$$

имеет место для некоторого формального ряда $g_0 := g_0(x_1, x_2, x_3)$.

Применяя теперь рассуждение, приведенное выше для функции f_1 , в случае функции f_2 , получим, что существует постоянная c_1 и формальный степенной ряд $g_1 = g_1(x_1, x_2, x_3)$ такие, что

$$f = c_1 + (x_1 - x_3)g_1. \quad (14)$$

Повторяя далее эти же рассуждения в случае функции f_3 , получим, что существует постоянная c_2 и формальный степенной ряд $g_2 = g_2(x_1, x_2, x_3)$ такие, что

$$f = c_2 + (x_2 - x_3)g_2. \quad (15)$$

Подставляя теперь в уравнения (13)–(15) значения $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, получим, что $c_0 = c_1 = c_2$. Из уравнений (13)–(15) также получим

$$(x_1 - x_2)g_0 = (x_1 - x_3)g_1 = (x_2 - x_3)g_2,$$

откуда сразу следует, что существует формальный степенной ряд $g := g(x_1, x_2, x_3)$ такой, что

$$g_0 = (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)g, \quad g_1 = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)g, \quad g_2 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)g. \quad (16)$$

Доказываемое утверждение теперь вытекает из формулы (13) и из первого уравнения системы (16).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть f – произвольный первый интеграл системы (1). В соответствии с предложением 3 функцию f можно представить в виде

$$f = c_0 + (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)g \quad (17)$$

для некоторой постоянной c_0 и формального степенного ряда $g := g(x_1, x_2, x_3)$. Налагая условие, что f представляет собой первый интеграл системы (1), получим, что после сокращения на произведение $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ ряд g будет удовлетворять уравнению

$$\frac{dg}{dt} = ((2 - 2\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)x_1 + (2 + \alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + \alpha_3^2)x_2 + (2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_3^2)x_3)g, \quad (18)$$

в котором производная вычисляется вдоль решения системы (1). Докажем, что $g = 0$ методом доказательства от противного, т. е. предположим, что $g \neq 0$, и придем к противоречию. Рассмотрим два различных случая.

СЛУЧАЙ 1. Пусть g не делится на $x_1 - x_2$. В этом случае следует применить лемму 1 при $x_l = x_1$ и $x_j = x_2$, что позволяет записать g в виде $g = g_0 + (x_1 - x_2)g_1$, где $g_0 := g_0(x_2, x_3) \neq 0$ и $g_1 := g_1(x_1, x_2, x_3)$ суть формальные степенные ряды. Тогда ряд g_0 удовлетворяет уравнению (18) при ограничении на плоскость $x_1 = x_2$. Тем самым, снова производя замену переменных (8), получим, что в этих новых переменных, если $g_0(x_2, x_3) = h_0(y_2, z_2)$, то h_0 удовлетворяет уравнению

$$-y_2^2 \frac{\partial h_0}{\partial y_2} - (2y_2 + \alpha_3^2 z_2) z_2 \frac{\partial h_0}{\partial z_2} = (6y_2 - (2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_3^2) z_2) h_0. \quad (19)$$

Запишем теперь h_0 как

$$h_0 = \sum_{j \geq 0} h_{0,j} z_2^j, \quad h_{0,j} = h_{0,j}(y_2),$$

где $h_{0,j}$ – формальный числовой ряд при каждом j . Докажем, что

$$h_{0,j} = 0 \quad \text{при} \quad j \geq 0. \quad (20)$$

Функция $h_{0,0}$, очевидно, удовлетворяет уравнению (19) при ограничении на многообразии $z_2 = 0$, т. е. выполняется равенство

$$-y_2^2 \frac{dh_{0,0}}{dy_2} = 6y_2 h_{0,0},$$

разрешая которое, мы получаем $h_{0,0} = c/y_2^6$, $c \in \mathbb{C}$. Поскольку $h_{0,0}$ задается формальным рядом по переменной y_2 , получаем, что $c = 0$ и, следовательно, $h_{0,0} = 0$. Тем самым соотношение (20) доказано при $j = 0$.

Предположим теперь, что соотношение (20) справедливо при $j = 0, \dots, m-1$ для $m \geq 1$, и докажем его при $k = m$. Очевидно, что по предположению индукции имеет место соотношение

$$h_0 = \sum_{j \geq 0} h_{0,j+m} z_2^{j+m},$$

и тогда из уравнения (19) после деления на z_2^m получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} -y_2^2 \sum_{j \geq 0} \frac{dh_{0,j+m}}{dy_2} z_2^j - (2y_2 + \alpha_3^2 z_2) \sum_{j \geq 0} (j+m) h_{0,j+m} z_2^j = \\ = (6y_2 - (2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_3^2) z_2) \sum_{j \geq 0} h_{0,j+m} z_2^j. \end{aligned} \quad (21)$$

Записывая его на многообразии $z_2 = 0$, получим уравнение

$$-y_2^2 \frac{dh_{0,m}}{dy_2} = y_2(6 + 2m)h_{0,m},$$

решение которого имеет вид $h_{0,m} = c_m/y_2^{6+2m}$, $c_m \in \mathbb{C}$. Так как $h_{0,m}$ представляется в виде формального степенного ряда по переменной y_2 , получим $c_m = 0$ и, следовательно, $h_{0,m} = 0$, что доказывает справедливость представления (20) при $j = m$. Тем самым методом математической индукции мы показали, что представление (20) выполняется при всех $j \geq 0$. Из этого представления непосредственно следует, что $h_0 = 0$. Следовательно, $g_0 = 0$, и это противоречит предположению о том, что g не делится на $x_1 - x_2$.

СЛУЧАЙ 2. Пусть g делится на $x_1 - x_2$. В этом случае $g = (x_1 - x_2)^j h$, где $j \geq 1$ и $h \neq 0$. Функция $h := h(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид формального степенного ряда, который не делится на $x_1 - x_2$, и после деления на $(x_1 - x_2)^j$ получим, что этот ряд удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} = & [(2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1^2(2 + j))x_1 + (2 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2 - \alpha_2^2(2 + j))x_2 + \\ & + ((2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2)(1 + j) - 2\alpha_3^2)x_3]h, \end{aligned}$$

в котором производная по h вычисляется вдоль решения системы (1). Применяя теперь к h рассуждения, аналогичные тем, которые применялись к функции g в случае 1, получим, что $h = 0$, тем самым приходя к противоречию.

Отсюда можно заключить, что $g = 0$, и теперь доказательство теоремы вытекает из (17) и определения формального первого интеграла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В силу теоремы 1 система Халфена (1) не имеет первых интегралов полиномиального вида. Утверждение теоремы 2 теперь непосредственно следует из леммы 4.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Напомним, что уравнение, определяющее многочлен Дарбу, – это уравнение (4), и что в силу леммы 2 можно выбрать K в виде

$$K = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3, \quad (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

Докажем теперь теорему 3 на основе предложения 1, теоремы 1 и следующего результата.

ТЕОРЕМА 7. При $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ каждый многочлен Дарбу системы (1) имеет вид

$$f = c H_1^{n_1} H_2^{n_2} H_3^{n_3} = c (x_1 - x_2)^{n_1} (x_1 - x_3)^{n_2} (x_2 - x_3)^{n_3},$$

где c – некоторая постоянная, а n_1, n_2, n_3 – неотрицательные целые числа. Более того, кофактор многочлена f есть

$$\begin{aligned} K = & n_1(-2x_3 - \alpha_1^2(x_3 - x_1) + \alpha_2^2(x_2 - x_3)) + \\ & + n_2(-2x_2 + \alpha_1^2(x_1 - x_2) + \alpha_3^2(x_3 - x_2)) + \\ & + n_3(-x_1 - \alpha_2^2(x_1 - x_2) + \alpha_3^2(x_3 - x_1)). \end{aligned} \quad (22)$$

Основной целью настоящего раздела будет доказательство теоремы 7, поскольку, как будет ясно впоследствии, из нее явно следует доказательство теоремы 3. Для этого изучим многочлены Дарбу системы (1) первой степени и старших степеней. Сформулируем два отдельных предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ единственно возможными многочленами Дарбу системы (1) первой степени являются

$$H_1 := x_1 - x_2, \quad H_2 := x_1 - x_3, \quad H_3 := x_2 - x_3$$

с соответствующими кофакторами

$$\begin{aligned} K_1 &= -2x_3 - \alpha_1^2(x_3 - x_1) + \alpha_2^2(x_2 - x_3), \\ K_2 &= -2x_2 - \alpha_3^2(x_2 - x_3) + \alpha_1^2(x_1 - x_2), \\ K_3 &= -2x_1 - \alpha_2^2(x_1 - x_2) + \alpha_3^2(x_3 - x_1). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ и f – однородный многочлен Дарбу системы (1) первой степени, т.е. $f = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$. Тогда доказываемое утверждение непосредственно следует из того, что многочлен f должен удовлетворять условию (4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ и f – неприводимый однородный многочлен Дарбу системы (1) не менее чем второй степени и с кофактором K таким же, как и в утверждении леммы 2. Тогда $K = 0$.

Чтобы доказать это утверждение, покажем, что каждый из коэффициентов c_1, c_2 и c_3 в определении K из леммы 2 равен нулю для произвольного многочлена Дарбу системы (1) степени выше или равной двум. Для этого нам потребуется следующий предварительный результат, описывающий многочлены Дарбу и их кофакторы для системы (1) при ограничении на каждую из плоскостей H_j , $j = 1, 2, 3$, заданных формулами (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\bar{f} = \bar{f}(x_2, x_3)$ – однородный многочлен Дарбу степени n для системы (1), ограниченной на $x_1 = x_2$, с кофактором $K = (c_1 + c_2)x_2 + c_3x_3$, где $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Тогда, если $\bar{f} \neq 0$, он имеет вид

$$\bar{f} = c_0x_2^{n-l_2-l_3}(x_2 - x_3)^{l_2}(x_2 + \alpha_3^2(x_2 - x_3))^{l_3},$$

где

$$c_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad l_2, l_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad l_2 + l_3 \leq n,$$

и при этом

$$c_3 = \alpha_3^2(l_2 + l_3), \quad c_1 + c_2 + c_3 = -n - l_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{f}$ – однородный многочлен Дарбу системы (1), ограниченной на многообразии $x_1 = x_2$ с кофактором $K = (c_1 + c_2)x_2 + c_3x_3$, где $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Для системы (1), ограниченной на $x_1 = x_2$, получаем

$$\dot{x}_2 = -x_2^2, \quad \dot{x}_3 = x_2^2 - 2x_2x_3 + \alpha_3^2(x_2 - x_3)^2. \quad (23)$$

Несложные вычисления показывают, что единственными многочленами Дарбу первой степени будут x_2 , $x_2 - x_3$ и $x_2 + \alpha_3^2(x_2 - x_3)$ (при $\alpha_3 \neq 0$).

Произведем замену переменных $y_2 = x_2$, $z_2 = x_2 - x_3$, после которой система (23) принимает вид

$$\dot{y}_2 = -y_2^2, \quad \dot{z}_2 = -z_2(2y_2 + \alpha_3^2 z_2). \quad (24)$$

Будем искать многочлены этой Дарбу системы. Пусть $f = f(y_2, z_2)$ – такой многочлен Дарбу с кофактором $K = d_2y_2 + d_3z_2$, т. е. он удовлетворяет уравнению

$$-y_2^2 \frac{\partial f}{\partial y_2} - z_2(2y_2 + \alpha_3^2 z_2) \frac{\partial f}{\partial z_2} = (d_2y_2 + d_3z_2)f. \quad (25)$$

Если положить

$$u_2 = \frac{y_2^2}{z_2}, \quad w_2 = y_2,$$

то мы получим $u'_2 = \alpha_3^2 w_2^2$ и $w'_2 = -w_2^2$. Введем обозначение $H_2 = u_2 + \alpha_3^2 w_2$. Тогда $H'_2 = 0$ и $w'_2 = -w_2^2$. Таким образом, можно переписать функцию g как

$$g = g(H_2, w_2) = f\left(w_2, \frac{w_2^2}{H_2 - \alpha_3^2 w_2}\right),$$

и тогда из (25) следует уравнение

$$-w_2^2 \frac{dg}{dw_2} = \left(d_2 w_2 + \frac{d_3 w_2^2}{H_2 - \alpha_3^2 w_2}\right)g.$$

Его решение имеет вид

$$g = K(H_2)w_2^{-d_2}(H_2 - \alpha_3^2 w_2)^{d_3/\alpha_3^2},$$

где K – функция от H_2 . Тем самым получаем

$$f = K\left(\frac{y_2(y_2 + \alpha_3^2 z_2)}{z_2}\right)z_2^{-d_3/\alpha_3^2}y_2^{2d_3/\alpha_3^2 - d_2}.$$

Поскольку функция f должна быть однородным многочленом, мы получаем, что

$$f = c_0 y_2^{l_1} z_2^{l_2} (y_2 + \alpha_3^2 z_2)^{l_3}, \quad c_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad l_1 + l_2 + l_3 = n \geq 2. \quad (26)$$

Таким образом,

$$d_3 = -\alpha_3^2(l_2 + l_3), \quad d_2 = -n - l_2, \quad l_1 = n - l_2 - l_3.$$

Возвращаясь к многочлену $\bar{f}$ и его кофактору, получим

$$c_3 = \alpha_3^2(l_2 + l_3), \quad c_1 + c_2 + c_3 = -n - l_2.$$

Это соотношение завершает доказательство предложения.

Следующие два предложения доказываются аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\bar{f} = \bar{f}(x_2, x_3)$ есть однородный многочлен Дарбу степени n для системы (1), ограниченной на многообразие $x_1 = x_3$, с кофактором $K = c_2x_2 + (c_1 + c_3)x_3$, где $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Тогда, если $\bar{f} \neq 0$, мы имеем

$$\bar{f} = d_0x_3^{n-j_2-j_3}(x_3 - x_2)^{j_2}(x_3 + \alpha_2^2(x_3 - x_2))^{j_3}, \quad d_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

и

$$c_2 = \alpha_2^2(j_2 + j_3), \quad c_1 + c_2 + c_3 = -n - j_2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\bar{f} = \bar{f}(x_1, x_3)$ есть однородный многочлен Дарбу степени n для системы (1), ограниченной на многообразие $x_2 = x_3$, с кофактором $K = c_1x_1 + (c_2 + c_3)x_3$, где $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Тогда

$$\bar{f} = e_0x_3^{n-m_2-m_3}(x_3 - x_1)^{m_2}(x_3 + \alpha_1^2(x_3 - x_1))^{m_3}, \quad e_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

и

$$c_1 = \alpha_1^2(m_2 + m_3), \quad c_1 + c_2 + c_3 = -n - m_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ и f есть неприводимый многочлен Дарбу системы (1), имеющий степень $n \geq 2$, с кофактором $K = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$, в котором $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Из неприводимости f непосредственно следует, что $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$ и $f_3 \neq 0$ (напомним, формулы (7) определяют f_i при $i = 1, 2, 3$), поскольку иначе f делился бы или на $x_1 - x_2$, или на $x_1 - x_3$, или на $x_2 - x_3$, и тем самым мы приходим к противоречию.

Более того, так как f_1 , f_2 и f_3 суть однородные многочлены Дарбу системы (1), ограниченной соответственно на $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$ и $x_2 = x_3$, можно применить предложение 6 с $\bar{f} = f_1$, предложение 7 с $\bar{f} = f_2$ и предложение 8 с $\bar{f} = f_3$.

Из предложений 6–8 следует, что

$$c_1 + c_2 + c_3 = -n - l_2 = -n - j_2 = -n - m_2,$$

откуда $l_2 = j_2 = m_2$. Более того, мы имеем

$$c_1 + c_2 + c_3 = -n - l_2 = \alpha_1^2(l_2 + m_3) + \alpha_2^2(l_2 + j_3) + \alpha_3^2(l_2 + l_3). \quad (27)$$

Заметим, что выражение в правой части формулы (27) всюду неотрицательно, в то время как $-n - l_2$ всюду неположительно. Отсюда следует, что эти выражения должны обращаться в нуль, $n = l_2 = 0$, что противоречит предположению $n \geq 2$. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Если f – многочлен первой степени, то доказательство непосредственно следует из предложения 4. Предположим теперь, что система (1) обладает неприводимым многочленом Дарбу не менее чем второй степени с кофактором $K \neq 0$ из леммы 2. Тогда из леммы 3 можно заключить, что f представляет собой однородный неприводимый многочлен Дарбу не менее чем второй степени и с кофактором $K \neq 0$. Противоречие теперь вытекает из предложения 5. Тем самым все многочлены Дарбу с кофактором $K \neq 0$ в силу леммы 2 должны получаться из многочленов Дарбу первой степени, т.е. из H_1 , H_2 или H_3 . Более того, из теоремы 1 следует, что все многочлены Дарбу с нулевым кофактором, т.е. все первые интегралы полиномиального вида, должны быть постоянными. Отсюда, применяя лемму 5, получим утверждение теоремы 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Согласно теореме 7 каждый многочлен Дарбу системы (1) имеет вид

$$f = cH_1^{n_1}H_2^{n_2}H_3^{n_3} = c(x_1 - x_2)^{n_1}(x_1 - x_3)^{n_2}(x_2 - x_3)^{n_3},$$

в котором c – некоторая постоянная, а n_1, n_2, n_3 – неотрицательные целые числа. Более того, кофактор многочлена f задается выражением (22).

Из предложения 1 и теоремы 1 получаем, что из существования непостоянного рационального первого интеграла вытекает существование двух взаимно простых многочленов Дарбу с одним и тем же ненулевым кофактором. Поэтому первый интеграл должен иметь вид

$$\frac{R}{S} = \frac{c_0 H_1^{n_1} H_2^{n_2} H_3^{n_3}}{c_1 (c H_1^{m_1} H_2^{m_2} H_3^{m_3})}$$

с хотя бы одним из параметров m_i и n_i отличным от нуля, а кофакторы многочленов R и S должны совпадать. Тогда в соответствии с равенством (22) из совпадения кофакторов многочленов R и S следует, что

$$\begin{aligned} & (m_1 - n_1)(-2x_3 - \alpha_1^2(x_3 - x_1) + \alpha_2^2(x_2 - x_3)) + \\ & + (m_2 - n_2)(-2x_2 + \alpha_1^2(x_1 - x_2) + \alpha_3^2(x_3 - x_2)) + \\ & + (m_3 - n_3)(-2x_1 - \alpha_2^2(x_1 - x_2) + \alpha_3^2(x_3 - x_1)) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому, используя тот факт, что переменные α_i вещественные, получаем $m_i = n_i$ при $i = 1, 2, 3$, и это противоречит тому, что многочлены R и S взаимно просты. Это завершает доказательство теоремы.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Напомним, что уравнение, задающее экспоненциальный множитель $F = e^{h/g}$ с кофактором L системы (1), имеет вид

$$\dot{x}_1 \frac{\partial h}{\partial x_1 g} + \dot{x}_2 \frac{\partial h}{\partial x_2 g} + \dot{x}_3 \frac{\partial h}{\partial x_3 g} = L, \quad (28)$$

где опущен общий множитель F и

$$L = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3. \quad (29)$$

В силу предложений 2 и 3 и теорем 1 и 7, если система (1) имеет экспоненциальные множители, эти множители обязаны иметь вид $e^{h/H_1^{n_1}H_2^{n_2}H_3^{n_3}}$, где $h \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а степень многочлена h меньше или равна $n_1 + n_2 + n_3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. При $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ у системы (1) отсутствуют экспоненциальные множители.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с того, что продемонстрируем отсутствие экспоненциальных множителей вида e^h . Применяя уравнение (28) при $g = 1$, получим

$$x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} = L, \quad (30)$$

где L задано выражением (29). Выбирая $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ в уравнении (30), получим, что $b_0 = 0$. Теперь, положив $x_1 = x_2 = 0$ в уравнении (30), получаем

$$\alpha_3^2 x_3^2 \frac{\partial h}{\partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=0} = b_3 x_3. \quad (31)$$

Из этого соотношения следует, что $b_3 = 0$. Аналогично, полагая $x_1 = x_3 = 0$ в уравнении (30), получим, что $b_2 = 0$, а полагая $x_2 = x_3 = 0$ в уравнении (30), получим, что $b_1 = 0$. Таким образом, $L = 0$, и из (30) получаем, что h представляет собой первый интеграл системы (1) полиномиального вида, и это противоречит теореме 1.

Предположим теперь, что $e^{h/H_1^{n_1}H_2^{n_2}H_3^{n_3}}$ – экспоненциальный множитель системы (1), в котором n_1, n_2, n_3 – неотрицательные целые числа, хотя бы одно из которых положительно, многочлен h взаимно прост с многочленами H_1, H_2 и H_3 , причем его степень не превышает $n_1 + n_2 + n_3$. Тогда h удовлетворяет уравнению

$$x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} - \left(\frac{\dot{H}_1}{H_1} n_1 + \frac{\dot{H}_2}{H_2} n_2 + \frac{\dot{H}_3}{H_3} n_3 \right) h = L H_1^{n_1} H_2^{n_2} H_3^{n_3}. \quad (32)$$

Без потери общности будем считать, что $n_1 > 0$. Полагая $H_1 = 0$ в уравнении (32) и обозначая через h_1 ограничение многочлена h на $H_1 = 0$, можно прийти к заключению, что h_1 удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} -x_2^2 \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + (x_2^2 - 2x_2x_3 + \alpha_3^2(x_2 - x_3)^2) \frac{\partial h_1}{\partial x_3} = \\ = [n_1((\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(x_2 - x_3) - 2x_3) + (n_2 + n_3)(\alpha_3^2x_3 - (\alpha_3^2 + 2)x_2)] h_1. \end{aligned} \quad (33)$$

Поскольку по предположению многочлены h и H_1 взаимно простые, получаем, что $h_1 \neq 0$. Более того, из уравнения (33) следует, что h_1 – многочлен Дарбу системы (1), ограниченной на $x_1 = x_2$, с кофактором

$$K = n_1((\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(x_2 - x_3) - 2x_3) + (n_2 + n_3)(\alpha_3^2x_3 - (\alpha_3^2 + 2)x_2).$$

В силу леммы 3 можно предположить, что многочлен h_1 однороден; известно также, что $n \leq n_1 + n_2 + n_3$. Теперь в силу предложения 6 имеем

$$\alpha_3^2(l_3 + l_2) = -(2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2)n_1 + \alpha_3^2(n_2 + n_3), \quad c_1 + c_2 + c_3 = -n - l_2. \quad (34)$$

Вычисляя $c_1 + c_2 + c_3$ с помощью (33), получим, что $c_1 + c_2 + c_3 = -2(n_1 + n_2 + n_3)$. Поэтому

$$n + l_2 = 2(n_1 + n_2 + n_3).$$

Так как $n \leq n_1 + n_2 + n_3$ и $l_2 \leq n$, получим $l_2 = n = n_1 + n_2 + n_3$, $l_1 = l_3 = 0$. Тогда первое из тождеств системы (34) принимает вид

$$\alpha_3^2 n_1 = -(2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2)n_1,$$

и это противоречит тому, что $n_1 > 0$. Поэтому выражение в правой части уравнения отрицательно, в то время как выражение в левой части таковым не является. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Из предложений 2 и 9 и теорем 1 и 7 следует, что в случае, когда система (1) обладает первым интегралом G типа Дарбу, этот интеграл должен иметь вид $G = cH_1^{\lambda_1}H_2^{\lambda_2}H_3^{\lambda_3}$, где $c, \lambda_i, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$. Поскольку G представляет собой первый интеграл, должно выполняться условие

$$\begin{aligned} & \lambda_1(-2x_3 - \alpha_1^2(x_3 - x_1) + \alpha_2^2(x_2 - x_3)) + \\ & + \lambda_2(-2x_2 + \alpha_1^2(x_1 - x_2) + \alpha_3^2(x_3 - x_2)) + \\ & + \lambda_3(-2x_1 - \alpha_2^2(x_1 - x_2) + \alpha_3^2(x_3 - x_1)) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку постоянные α_i , $i = 1, 2, 3$, вещественные, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Это завершает доказательство теоремы.

Благодарности. Работа Ж. Либре частично поддержана MINECO/FEDER (грант № MTM2008-03437), CIRIT (грант № 2014SGR-568), академией ICREA, а также FP7-PEOPLE-2012-IRSES (гранты № 316338 и 318999) и грантом FEDER-UNAB10-4E-378. Работа К. Вальс поддержана Center for Mathematical Analysis, Geometry and Dynamical Systems и Fundação para a Ciência e a Tecnologia, программы POCTI/FEDER и POSI, а также грантом SFRH/BPD/14404/2003.

Список литературы

- [1] G. Darboux, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (2), **7** (1878), 101–150.
- [2] G. Gibbons, C. Pope, *Commun. Math. Phys.*, **66**:3 (1979), 267–290.
- [3] G. Halphen, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **92** (1881), 1101–1103.
- [4] М. Атья, Н. Хитчин, *Геометрия и динамика магнитных монополей*, Мир, М., 1991.
- [5] B. Dubrovin, “Geometry of the 2D topological field theories”, *Integrable Systems and Quantum Groups*, Lecture Notes in Mathematics, **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, 1996, 120–348.
- [6] И. А. Страчан, *ТМФ*, **99**:3 (1994), 545–551.

- [7] Л. А. Тахтаджян, *ТМФ*, **93**:2 (1992), 330–341.
- [8] L. Takhtajan, *Commun. Math. Phys.*, **160** (1994), 295–315.
- [9] A. Maciejewski, J. Strelcyn, *Phys. Lett. A*, **201** (1995), 161–166.
- [10] C. Valls, *J. Geom. Phys.*, **56** (2006), 1192–1197.
- [11] C. Valls, *J. Geom. Phys.*, **57** (2006), 89–100.
- [12] J. Giné, J. Llibre, *Pacific J. Math.*, **218** (2005), 343–355.
- [13] F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [14] J. Llibre, X. Zhang, *Nonlinearity*, **15** (2002), 1269–1280.
- [15] J. Llibre, C. Valls, *J. Math. Phys.*, **46** (2005), 072901, 13 pp.
- [16] J. Llibre, X. Zhang, *J. Differential Equations*, **246** (2009), 541–551.
- [17] J. Llibre, X. Zhang, *Bull. Sci. Math.*, **133** (2009), 765–778.

Поступила в редакцию 5.05.2014