Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ли-Янь Лю, Цин-Хай Хао, Плоский водородоподобный атом в неоднородных магнитных полях: точно или квазиточно решаемые модели, *ТМФ*, 2015, том 183, номер 2, 329–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8707>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:03:34

© 2015 г.

Ли-Янь Лю*, Цин-Хай Хао*

ПЛОСКИЙ ВОДОРОДОПОДОБНЫЙ АТОМ В НЕОДНОРОДНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ: ТОЧНО ИЛИ КВАЗИТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ

Для решения задачи о движении двумерного водородоподобного атома в неоднородных магнитных полях вида $\mathbf{B} = (k/r)\mathbf{z}$ и $\mathbf{B} = (k/r^3)\mathbf{z}$ применяется простой математический метод. Построен гамильтониан, имеющий тот же вид, что и гамильтониан водородоподобного атома в однородных магнитных полях, и с помощью сравнения гамильтонианов получен энергетический спектр. Результаты показали, что можно получить весь спектр атома в магнитном поле $\mathbf{B} = (k/r)\mathbf{z}$, таким образом, в этом случае задача является точно решаемой. Найдены аналитические решения уравнения Шредингера для атома в магнитном поле $\mathbf{B} = (k/r^3)\mathbf{z}$ при определенных значениях магнитной напряженности k , тем самым представлена квазиточно решаемая модель.

Ключевые слова: квазиточно решаемая система, точно решаемая система.

DOI: 10.4213/tmf8707

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой механике очень важны точные решения уравнения Шредингера, так как в них содержится вся необходимая информация о рассматриваемой системе [1], [2]. В общем случае уравнение Шредингера нельзя решить точно и получить полный спектр. Для большинства потенциалов спектр можно рассчитать только численно. Недавно было обнаружено, что для некоторых квантовых задач часть собственных значений и собственных функций (но не весь спектр) может быть получена аналитически, такие задачи называются квазиточно решаемыми [3]–[9]. Квазиточно решаемые задачи занимают важное место в квантовой механике, и физические примеры таких систем привлекают много внимания [10]–[15].

Плоское движение электронов во внешних электромагнитных полях вызывает большой интерес вследствие их классического поведения и наличия богатых квантовых структур [16]–[19]. Недавно было обнаружено, что для двумерного атома водорода, движущегося в однородном магнитном поле, можно получить аналитические решения уравнения Шредингера [20]–[22], уравнения Клейна–Гордона [23]

*College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin, China.
E-mail: llypaper@126.com

и уравнения Дирака [24]–[26], и все эти уравнения являются физическими примерами квазиточно решаемых задач. В предыдущих исследованиях атома водорода во внешних полях в основном рассматривались однородные магнитные поля, а их свойства в неоднородных полях не обсуждались.

В настоящей статье мы изучаем водородоподобный атом в магнитных полях вида $\mathbf{B} = (k/r)\mathbf{z}$ и $\mathbf{B} = (k/r^3)\mathbf{z}$, где k – константа, r – полярная координата и $\mathbf{z}$ – единичный вектор в направлении оси z . Мы не обсуждаем механизм возникновения неоднородных магнитных полей, вместо этого мы фокусируем наше внимание на физических свойствах атомов в них и демонстрируем новые физические модели точно и квазиточно решаемых задач.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 изучается задача о плоском водородоподобном атоме, движущемся в магнитном поле $\mathbf{B} = (k/r)\mathbf{z}$. Вместо того чтобы непосредственно решать уравнение Шредингера, мы представляем новый способ получения энергетического спектра. В разделе 3 мы применяем этот метод, чтобы рассмотреть движение атома в магнитном поле $\mathbf{B} = (k/r^3)\mathbf{z}$. Показано, что для некоторых значений напряженности магнитного поля k можно получить аналитические решения, следовательно, мы имеем физическую модель квазиточно решаемой задачи. Наконец, итоги и обсуждение даны в разделе 4.

2. АТОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ $\mathbf{B} = (k/r)\mathbf{z}$

Пусть магнитное поле $\mathbf{B} = (k/r)\mathbf{z}$ перпендикулярно плоскости, в которой расположен атом. Векторные потенциалы, связанные с магнитным полем, выраженные в полярных координатах (r, θ) записываются как

$$A_x = -k \sin \theta, \quad A_y = k \cos \theta, \quad A_z = 0,$$

где применяется кулоновская калибровка. В настоящей работе мы используем атомные единицы $M = e = \hbar = 1$. Гамильтониан водородоподобного атома в магнитном поле имеют вид [1], [2]

$$H_1 = \frac{1}{2} \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{A}}{c} \right)^2 - \frac{Z}{r},$$

где c – скорость света и Z – заряд атома. Мы вводим собственную функцию следующего вида:

$$\Psi(r, \theta) = \frac{U(r)}{\sqrt{r}} e^{im\theta},$$

где m – квантовое число углового момента, являющееся целым числом. Подставляя эту собственную функцию в уравнение Шредингера

$$H_1 \Psi(r, \theta) = E_1 \Psi(r, \theta),$$

мы получаем, что радиальная функция $U(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{m^2 - 1/4}{r^2} + \frac{2Km - 2Z}{r} + K^2 \right) U(r) = E_1 U(r), \quad (1)$$

где $K = k/c$. Это уравнение можно переписать в виде

$$H_{1r} U(r) = E_1 U(r), \quad (2)$$

где

$$H_{1r} = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{m^2 - 1/4}{r^2} + \frac{2Km - 2Z}{r} + K^2 \right). \quad (3)$$

Мы не будем решать уравнение (2) непосредственно, вместо этого мы построим гамильтониан, который имеет такой же вид, как и H_{1r} , и, сравнивая гамильтонианы, получим энергетический спектр.

Мы построим гамильтониан вида

$$H_1^c = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + W^2 - \frac{dW}{dx} + V(x) \right), \quad (4)$$

где индекс c отвечает сконструированному гамильтониану. Функция $W(x)$ дается выражением

$$W(x) = a + \frac{b}{x}, \quad x \geq 0,$$

где a, b – константы. В (4) $V(x)$ – потенциал, который надо определить. Мы считаем, что собственные функции гамильтониана H_1^c имеют вид

$$\psi_N^c(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i \exp \left(- \int W(x) dx \right) = \sum_{i=0}^N a_i x^i x^{-b} e^{-ax}, \quad (5)$$

где a_i – коэффициенты разложения. Чтобы волновая функция оставалась конечной в пределах $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$, мы считаем, что $b < 0$ и $a > 0$. Подстановка $\psi_N^c(x)$ в уравнение Шредингера

$$H_1^c \psi_N^c(x) = E_1^c \psi_N^c(x)$$

дает

$$\begin{aligned} V(x) - 2E_1^c = & -\frac{2ba_1}{a_0x} + \\ & + \frac{\sum_{i=2}^N a_i i(i-1)x^{i-2} - 2b \sum_{i=2}^N a_i i x^{i-2} - 2a \sum_{i=2}^N a_i i x^{i-1} + (2ba_1/a_0) \sum_{i=1}^N a_i x^{i-1}}{\sum_{i=0}^N a_i x^i}. \end{aligned}$$

Пусть

$$V(x) = -\frac{2ba_1}{a_0x}$$

и

$$\begin{aligned} -2E_1^c = & \\ = & \frac{\sum_{i=2}^N a_i i(i-1)x^{i-2} - 2b \sum_{i=2}^N a_i i x^{i-2} - 2a \sum_{i=2}^N a_i i x^{i-1} + (2ba_1/a_0) \sum_{i=1}^N a_i x^{i-1}}{\sum_{i=0}^N a_i x^i}. \end{aligned}$$

Дробь в правой части последнего равенства следует приравнять константе, чтобы уравнение оставалось верным, а если ее можно свести к константе, то она равна нулю:

$$\sum_{i=2}^N a_i i(i-1)x^{i-2} - 2b \sum_{i=2}^N a_i i x^{i-2} - 2a \sum_{i=2}^N a_i i x^{i-1} + \frac{2ba_1}{a_0} \sum_{i=1}^N a_i x^{i-1} = 0.$$

Из этого соотношения получаются рекуррентные формулы для коэффициентов a_i :

$$a_{i+1} = \frac{2a(i-N)}{(i+1)(i-2b)}a_i.$$

Отсюда имеем

$$V(x) = -\frac{2aN}{x}, \quad E_1^c = 0.$$

Таким образом, H_1^c записывается как

$$H_1^c = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{b^2 + b}{x^2} + \frac{2ab - 2aN}{x} + a^2 \right). \quad (6)$$

Если мы положим

$$x = r, \quad b^2 + b = m^2 - \frac{1}{4}, \quad ab - aN = Km - Z, \quad (7)$$

то H_1^c принимает такой же вид, что и H_{1r} , и спектральные задачи для них одинаковы. Из соотношений (7) легко получить равенства

$$b = -|m| - \frac{1}{2}, \quad a = \frac{Km - Z}{-|m| - 1/2 - N}. \quad (8)$$

Чтобы удовлетворить неравенство $a > 0$, необходимо наложить на m некоторые ограничения: если магнитное поле направлено вдоль положительной части оси z , а именно, $K > 0$, то $m < Z/K$; если магнитное поле направлено вдоль отрицательной части оси z , т. е. $K < 0$, то $m > Z/K$. Отсюда для водородоподобного атома, движущегося в магнитном поле $\mathbf{B} = (k/r)\mathbf{z}$, квантовые числа углового момента не могут быть произвольными целыми числами, ограничения для них определяются напряженностью магнитного поля и атомным зарядом, в то время как в однородном магнитном поле таких ограничений нет, и m может быть произвольным целым числом [21]. Сравнивая формулы (3), (6) и (8), мы получаем весь энергетический спектр водородоподобного атома:

$$E_{mn} = \frac{1}{2} \left[K^2 - \left(\frac{Z - Km}{n} \right)^2 \right],$$

$$\Psi_{mn}(r, \theta) = \sum_{i=0}^{n-|m|-1/2} a_i r^{i+|m|} \exp\left(\frac{Km - Z}{n} r\right) e^{im\theta}, \quad n = |m| + N + \frac{1}{2},$$

где

$$a_{i+1} = \frac{Km - Z}{-|m| - 1/2 - N} \frac{(2i - 2n + 2|m| + 1)}{(i+1)(i+2|m|+1)} a_i.$$

Видно, что энергия связана с напряженностью магнитного поля, и ее вырождение снимается с помощью двух квантовых чисел n и m . В отличие от случая водородоподобного атома в постоянном магнитном поле, для которого задача является квазиточно решаемой, в случае магнитного поля $\mathbf{B} = (k/r)\mathbf{z}$ задача точно решается. Легко проверить, что если нет внешнего магнитного поля, $K = 0$, то восстанавливается энергетический спектр водородоподобного атома в отсутствие внешнего поля [1], [2].

3. АТОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ $\mathbf{B} = (k/r^3)\mathbf{z}$

В кулоновской калибровке векторные потенциалы, связанные с магнитным полем $\mathbf{B} = (k/r^3)\mathbf{z}$, можно записать следующим образом:

$$A_x = \frac{k \sin \theta}{r^2}, \quad A_y = -\frac{k \cos \theta}{r^2}, \quad A_z = 0.$$

Гамильтониан водородоподобного атома в магнитном поле есть

$$H_2 = \frac{1}{2} \left(p^2 + \frac{2iK}{r^3} \partial_\theta + \frac{K^2}{r^4} \right) - \frac{Z}{r}.$$

Мы полагаем, что собственная функция имеет вид

$$\Phi(r, \theta) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}} e^{im\theta}.$$

Радиальная волновая функция $u(r)$ подчиняется следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{m^2 - 1/4}{r^2} - \frac{2Km}{r^3} + \frac{K^2}{r^4} - \frac{2Z}{r} \right) u(r) = E_2 u(r).$$

Пусть оператор H_{2r} имеет вид

$$H_{2r} = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{m^2 - 1/4}{r^2} - \frac{2Km}{r^3} + \frac{K^2}{r^4} - \frac{2Z}{r} \right). \quad (9)$$

Сконструируем гамильтониан того же вида, что и H_{2r} , чтобы получить энергетический спектр. Предположим, что функция $W(x)$ в формуле (4) задается как

$$W(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \gamma.$$

Тогда гамильтониан (4) принимает вид

$$H_2^c = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha^2 + \alpha + 2\beta\gamma}{x^2} + \frac{2\alpha\beta + 2\beta}{x^3} + \frac{\beta^2}{x^4} + \frac{2\alpha\gamma}{x} + \gamma^2 + v(x) \right), \quad x \geq 0,$$

где $v(x)$ является потенциалом, подлежащим определению. Предположим, что собственная функция гамильтониана H_2^c имеет вид

$$\varphi_N^c(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i \exp \left(-\int W(x) dx \right) = \sum_{i=0}^N a_i x^i x^{-\alpha} e^{-\gamma x + \beta/x}.$$

Ясно, что должны существовать ограничения $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\gamma > 0$, чтобы волновая функция была конечной. Подстановка $\varphi_N^c(x)$ в уравнение Шредингера

$$H_2^c \varphi_N^c(x) = E_2^c \varphi_N^c(x)$$

дает

$$v(x) = -\frac{2\alpha a_1}{a_0 x} + \frac{2\beta a_1^2}{a_0^2 x} - \frac{4\beta a_2}{a_0 x} - \frac{2\beta a_1}{a_0 x^2}, \quad E_2^c = 0. \quad (10)$$

Рекуррентные соотношения для коэффициентов a_i таковы:

$$\left(\frac{2\alpha a_1}{a_0} - \frac{2\beta a_1^2}{a_0^2} + \frac{4\beta a_2}{a_0} - 2\gamma(i+1) \right) a_{i+1} + \left(\frac{2\beta a_1}{a_0} + (i+2)(i+1) - 2\alpha(i+2) \right) a_{i+2} - 2\beta(i+3)a_{i+3} = 0. \quad (11)$$

Если $i = N - 1$, то равенство (11) сводится к

$$\frac{2\alpha a_1}{a_0} - \frac{2\beta a_1^2}{a_0^2} + \frac{4\beta a_2}{a_0} = 2\gamma N. \quad (12)$$

Комбинируя соотношения (10) и (12), непосредственно получаем

$$H_2^c = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha^2 + \alpha + 2\beta\gamma - 2\beta a_1/a_0}{x^2} + \frac{2\alpha\beta + 2\beta}{x^3} + \frac{\beta^2}{x^4} + \frac{2\alpha\gamma - 2\gamma N}{x} + \gamma^2 \right). \quad (13)$$

Пусть H_2^c имеет тот же вид, что и H_{2r} ; сравнение двух гамильтонианов дает

$$\begin{aligned} x = r, \quad \beta = -|K|, \quad \alpha = \begin{cases} -m - 1, & K > 0, \\ m - 1, & K < 0, \end{cases} \\ \gamma = \frac{Z}{N + |m| + 1}, \quad a_1 = \frac{Z}{N + |m| + 1} - \frac{1/4 + |m|}{2K}, \end{aligned} \quad (14)$$

где мы полагаем, что $a_0 = 1$. Следует заметить, что значение m ограничено в силу неравенства $\alpha < 0$: если магнитное поле направлено вдоль положительной части оси z , т.е. $K > 0$, то $m \geq 0$; если магнитное поле направлено вдоль отрицательной части оси z , $K < 0$, то $m \leq 0$. Следовательно, квантовые числа углового момента могут быть только неотрицательными или только неположительными целыми числами. Перепишем α как $\alpha = -|m| - 1$.

Из соотношений (9), (13) и (14) получаем энергию водородоподобного атома:

$$E_{Nm} = -\frac{1}{2} \frac{Z^2}{(N + |m| + 1)^2}.$$

Кажется, что энергия определяется двумя квантовыми числами N и m , и, таким образом, весь энергетический спектр можно получить, изменяя N и m , но на самом деле это не так. Существуют два ограничения, наложенные на коэффициент a_1 , одно из них вытекает из рекуррентного соотношения (11), а другое – из формулы для a_1 в (14). Оба ограничения выполняются, только если напряженность магнитного поля k или заряд Z рассматриваются как параметр: если фиксировано магнитное поле, то только определенные значения Z разрешены при фиксированных N и m ; если заряд Z фиксирован, только специальный набор магнитных полей разрешен. Ниже в качестве примера мы рассмотрим случай, когда в (5) порядок $N = 1$.

ПРИМЕР 1. Если $N = 1$, то H_2^c имеет вид

$$H_2^c = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha^2 + \alpha + 2\beta\gamma - 2\beta a_1}{x^2} + \right. \\ \left. + \frac{2\alpha\beta + 2\beta}{x^3} + \frac{\beta^2}{x^4} + \frac{2\alpha\gamma - 2\gamma}{x} + \gamma^2 \right).$$

Параметры этого выражения таковы:

$$\alpha = -|m| - 1, \quad \beta = -|K|, \quad \gamma = \frac{Z}{2 + |m|}, \quad a_1 = \frac{Z}{2 + |m|} - \frac{1/4 + |m|}{2|K|}. \quad (15)$$

Рекуррентное соотношение (11) принимает вид

$$\alpha a_1 - \beta a_1^2 - \gamma = 0. \quad (16)$$

Формула для a_1 в (15) и соотношение (16) выполняются, только если напряженность магнитного поля K или заряд Z рассматриваются как параметр:

$$(-|m| - 1) \left(\frac{Z}{2 + |m|} - \frac{1/4 + |m|}{2|K|} \right) + |K| \left(\frac{Z}{2 + |m|} - \frac{1/4 + |m|}{2K} \right)^2 - \frac{Z}{2 + |m|} = 0.$$

Если заряд Z фиксирован, то разрешен только определенный набор магнитных полей,

$$|K| = (|m| + 2) \frac{2|m| + 9/4 + \sqrt{(|m| + 2)^2 + 2(1/4 + |m|)}}{2Z},$$

или, эквивалентно, если фиксировано внешнее магнитное поле, то имеется ограничение на значение Z . Из формул (7) и (13) мы получаем энергетический уровень и волновую функцию:

$$E_2 = -\frac{1}{2} \frac{Z^2}{(|m| + 2)^2}, \\ \psi(r, \theta) = \frac{U(r)}{\sqrt{r}} e^{im\theta} = \left[1 + \left(\frac{Z}{2 + |m|} - \frac{1/4 + |m|}{2|K|} \right) r \right] r^{m+1/2} \times \\ \times \exp \left(-\frac{Z}{2 + |m|} r - \frac{|K|}{r} \right) e^{im\theta}.$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье обсуждаются задачи для плоского водородоподобного атома, движущегося в магнитных полях вида $\mathbf{B} = (k/r)\mathbf{z}$ и $\mathbf{B} = (k/r^3)\mathbf{z}$. Вместо непосредственного решения уравнения Шредингера мы построили гамильтониан, который имеет тот же вид, что и гамильтониан водородоподобного атома в однородных магнитных полях; сравнивая гамильтонианы, мы получили энергетический спектр. Результаты показали, что в случае магнитного поля $\mathbf{B} = (k/r)\mathbf{z}$ получается весь спектр, и вырождение энергии снимается. В отличие от известных результатов при отсутствии магнитного поля, в случае неоднородного магнитного поля квантовые числа углового момента могут не быть целыми числами, они определяются напряженностью магнитного поля и атомным зарядом. В случае магнитного поля $\mathbf{B} = (k/r^3)\mathbf{z}$ аналитические решения уравнения Шредингера возможны для определенных значений заряда Z или напряженности магнитного поля k ; таким образом,

продемонстрирован физический пример квазиточно решаемой задачи. Следовательно, плоское движение электронов в неоднородных магнитных полях увеличивает круг физических моделей, которые описываются точно и квазиточно решаемыми задачами в квантовой механике.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке NSF of China (гранты № 11247274, 11075115), а также при финансовой поддержке Fundamental Research Funds for the Central Universities (грант № 3122014K006).

Список литературы

- [1] J. Zeng, *Quantum Mechanics*, Science Press, Beijing, 2000 (in Chinese).
- [2] W. Greiner, *Quantum Mechanics. An Introduction*, Springer, Berlin, 1989.
- [3] M. A. Shifman, *Lie Algebras, Cohomology, and New Applications to Quantum Mechanics* (Springfield, MO, March 20–21, 1992), Contemporary Mathematics, **160**, eds. N. Kamran, P. J. Olver, AMS, Providence, RI, 1994.
- [4] M. A. Shifman, *Internat. J. Modern Phys. A*, **4**:12 (1989), 2897–2952.
- [5] B. A. Turbiner, *Commun. Math. Phys.*, **118**:3 (1988), 467–474.
- [6] M. A. Shifman, *ITEP Lectures on Particle Physics and Field Theory*, World Scientific Lecture Notes in Physics, **62**, World Sci., Singapore, 1999.
- [7] A. G. Ushveridze, *Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics*, IOP, Bristol, 1994.
- [8] A. V. Zabrodin, *ТМФ*, **104**:1 (1995), 8–24.
- [9] С. М. Клишевич, *ТМФ*, **150**:2 (2007), 237–248.
- [10] A. Samanta, S. K. Ghosh, *Phys. Rev. A*, **42**:3 (1990), 1178–1183.
- [11] M. Taut, *Phys. Rev. A*, **48**:5 (1993), 3561–3566.
- [12] A. V. Turbiner, *Phys. Rev. A*, **50**:6 (1994), 5335–5337, arXiv: hep-th/9406018.
- [13] А. Д. Донков, В. Г. Кадышевский, М. Д. Матвеев, Р. М. Мир-Касимов, *ТМФ*, **8**:1 (1971), 61–72.
- [14] Y. Brihaye, P. Kosinski, *Modern Phys. Lett. A*, **13**:18 (1998), 1445–1452.
- [15] P.-F. Loos, P. M. W. Gill, *Phys. Rev. Lett.*, **103**:12 (2009), 123008, 4 pp.
- [16] A. H. MacDonald, D. S. Ritchie, *Phys. Rev. B*, **33**:12 (1986), 8336–8344.
- [17] P. Martin, J. J. Rodriguez-Nuñez, J. L. Marquez, *Phys. Rev. B*, **45**:15 (1992), 8359–8362.
- [18] H. Friedrich, D. Wintgen, *Phys. Rep.*, **183**:2 (1989), 37–79.
- [19] W. Rösner, H. Herold, H. Ruder, G. Wunner, *Phys. Rev. A*, **28**:4 (1983), 2071–2077.
- [20] M. Taut, *J. Phys. A*, **27** (1994), 1045.
- [21] M. Taut, *J. Phys. A*, **28**:7 (1995), 2081–2085.
- [22] M. Taut, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**:29 (1999), 5509–5515.
- [23] V. M. Villalba, R. Pino, *Phys. Lett. A*, **238**:1 (1998), 49–53, arXiv: cond-mat/9712044.
- [24] C.-L. Ho, V. R. Khalilov, *Phys. Rev. A*, **61**:3 (2000), 032104, 7 pp., arXiv: quant-ph/0003086.
- [25] C.-M. Chiang, C.-L. Ho, *Phys. Rev. A*, **63**:6 (2001), 062105, 5 pp., arXiv: hep-th/0011005.
- [26] C.-L. Ho, P. Roy, *Ann. Phys.*, **312**:1 (2004), 161–176.