Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Ильичев, В. Я. Томашпольский, Солитоноподобные структуры на поверхности жидкости под ледяным покровом, *ТМФ*, 2015, том 182, номер 2, 277–293

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:17:24

© 2015 г.

А. Т. Ильичев*, В. Я. Томашпольский†

СОЛИТОНОПОДОБНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

Доказано существование солитоноподобных решений, отвечающих семейству уединенных волн понижения уровня поверхности, для полной системы уравнений, которая описывает распространение волн в жидкости конечной глубины под ледяным покровом. Ледяной покров моделируется упругой пластиной Кирхгофа–Лява и имеет значительную толщину, так что инерция пластины учитывается при формулировке модели. Упомянутое семейство уединенных волн параметризовано скоростью распространения волны, и его существование доказано для скоростей, отвечающих от характеристической скорости линейных волн и достаточно близких к этой скорости. Уединенные волны, в свою очередь, отвечают от состояния покоя и находятся в некоторой его окрестности. Иными словами, доказано существование уединенных волн понижения уровня поверхности вода–лед малой амплитуды. Доказательство проводится при помощи проекции искомой системы уравнений на центральное многообразие (имеющее в данном случае размерность два) и дальнейшего анализа конечномерной приведенной динамической системы на центральном многообразии.

Ключевые слова: ледяной покров, уединенная волна, бифуркация, центральное многообразие, резольвентные оценки.

DOI: 10.4213/tmf8708

1. ВВЕДЕНИЕ

Первые результаты о распространении волн под ледяным покровом, моделирующимся бесконечно протяженной упругой пластиной, были опубликованы в книге [1], и с тех пор линейные волновые процессы в жидкости под упругой пластиной являлись предметом исследования в большом числе работ (см., например, [2]–[9]). Нелинейным волнам под упругой пластиной посвящены исследования [10]–[19]. В работах [20]–[23] ледяной покров моделировался при помощи однородного упругого слоя

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: ilichev@mi.ras.ru

†Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

конечной толщины, что позволило учесть эффекты внутреннего деформирования, согласованные с волновыми движениями в жидкости. В статье [24] рассмотрено волновое движение во вращающейся стратифицированной жидкости под ледяным покровом.

Волновое движение на поверхности слоя жидкости конечной глубины под ледяным покровом, индуцируемое мультиполями различных порядков, как в плоском, так и в пространственном случаях, изучалось в работе [25]. Отдельно рассмотрены случаи импульсного источника, источника постоянной интенсивности и источника с интенсивностью, меняющейся по гармоническому закону, приведены выражения для потенциала скорости в жидком слое и их асимптотики. В работе [26] найдены волны, возникающие под ледяным покровом в жидкости при различных импульсных воздействиях на ледяной покров, и рассмотрены импульсный точечный источник в толще жидкости, удар по ледяному покрову, начальный импульс, сообщаемый поверхности жидкости, начальное смещение ледяного покрова. В работе [27] те же авторы обобщают постановки задач из статьи [26]. Плоская задача о возмущении ледяного покрова движущимся в жидкости диполем рассмотрена в работах [28], [29], где найдена волна, устанавливающаяся при длительном движении диполя, и описан характер процесса ее установления.

В настоящей статье рассматриваются вопросы существования классических уединенных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости не слишком большой глубины под ледяным покровом. Эти волны отходят от состояния покоя при изменении физических параметров задачи. Ледяной покров моделируется геометрически нелинейной упругой пластиной Кирхгоффа–Лява, свободно плавающей на поверхности жидкости. При этом, в отличие от монографии [30], принимается во внимание инерция ледяного покрова, которая может оказаться вполне сравнимой с инерцией слоя жидкости в водоемах небольшой глубины (реках, небольших озерах и т. п.). Волновые процессы в жидкости описываются системой уравнений Эйлера с дополнительным поверхностным давлением, обусловленным наличием упругой пластины.

Уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) достаточно универсально и, как известно, описывает длинные волны малой (но конечной) амплитуды в огромном количестве сред в механике и физике. Это уравнение допускает, как хорошо известно, целое семейство солитонных решений, описывающих уединенные волны, – солитоны. В связи с этим возникает вопрос, имеют ли полные уравнения модели, которые описывают гораздо более сложную динамику, аналогичные решения, и если да, то как соотносятся солитонные решения полной системы с солитонными решениями асимптотического уравнения КдФ? Понимание того, что существование солитонов для уравнения КдФ не означает наличие у полной, нередуцированной системы солитонных решений, присутствовало всегда, и любое доказательство существования солитонных решений у полной системы уравнений всегда считалось значительным результатом. Так, например, Кортевег и де Фриз вывели свое знаменитое уравнение для волн на воде в конце XIX века. И только в 1947 году было доказано существование семейства поверхностных уединенных волн, отходящих от состояния покоя, для полной задачи, которая описывается уравнениями Эйлера движения тяжелой несжимаемой жидкости. Эти волны являются уединенными волнами возвышения и приближаются солитонами соответствующего уравнения КдФ. Но дело обстоит не всегда так.

В огромном множестве примеров, когда волновая динамика в пределе малых амплитуд и длинных волн описывается уравнением КдФ, полная система уравнений в этом диапазоне физических параметров вообще не имеет решений с конечной энергией. Причина данного явления (его можно назвать потерей существования солитонных решений при переходе к полной системе) состоит в следующем. Гомоклиническая структура полной системы (описывающей волны, бегущие вдоль бесконечного направления), которая должна соответствовать солитону, оказывается двоякоасимптотической не к нулю, как в случае уравнения КдФ, а к периодическому решению вокруг нуля и, следовательно, соответствует волне, не стремящейся к нулю на бесконечности. Амплитуда асимптотической периодической волны экспоненциально мала для малых амплитуд самой волны, но для конечных амплитуд оказывается значительной (а на практике, как правило, мы имеем дело только с такими волнами). Уравнение КдФ не может описывать асимптотическую периодическую волну, так как выводится только для волн, имеющих алгебраический порядок малости по амплитуде. То же верно и для уточнения уравнения КдФ любого порядка по амплитуде: периодическая волна имеет амплитуду, порядок малости которой находится, как говорят, выше любого алгебраического порядка (*beyond all orders*). На физическом языке это означает, что имеет место резонанс длинной волны и волны конечной длины уже в линейном приближении.

Исследуемые в настоящей работе системы уравнений в частных производных являются обратимыми, т. е. инвариантными относительно отражения времени и динамической координаты. Обратимость – естественное свойство задач, где направление распространения волн неограничено и не имеет предпочтительной ориентации и фиксированного начала координат. Анализ задачи о распространении волн в жидкости под ледяным покровом выполнен в соответствии со следующими пунктами.

1. *Определение критического значения параметра бифуркации*, т. е. значения физического параметра задачи $\lambda = \lambda_0$, при малом возмущении $\mu = \lambda - \lambda_0$ которого, наряду с нулевым решением, система имеет нетривиальное решение.

2. *Запись системы уравнений, описывающих бегущие волны*, в виде бесконечномерной динамической системы

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathcal{A}\mathbf{u} + \mathcal{F}(\mu, \mathbf{u}), \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}(\lambda_0), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{u}$ – неизвестная вектор-функция, $\mathcal{A}(\lambda_0)$ – неограниченный замкнутый линейный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве X , а $\mathcal{F}(\mu, \mathbf{u})$ – нелинейная вектор-функция своих аргументов. Точка над функцией в (1.1) обозначает производную по неограниченной пространственной координате, которая играет роль динамической переменной.

3. *Определение движения собственных значений линейного оператора $\mathcal{A}(\lambda)$* в окрестности мнимой оси при изменении параметра $\mu = \lambda - \lambda_0$. Бифуркации возникают при пересечении собственными значениями оператора $\mathcal{A}(\lambda)$ мнимой оси. В силу обратимости системы уравнений собственные значения оператора $\mathcal{A}(\lambda)$ выходят на мнимую ось парами при изменении параметра λ и являются симметричными относительно мнимой и вещественной осей. В монографии [30] рассмотрены следующие типы бифуркаций: бифуркация, отвечающая простому резонансу, или бифуркация из нулевого волнового числа, бифуркация, отвечающая резонансу длинной и короткой волн, бифуркация резонанса 1:1 и бифуркация сложного резонанса 1:1.

Рассматриваемые в настоящей статье солитоноподобные структуры (классические уединенные волны) являются нелинейными продуктами простого резонанса.

4. Понижение порядка динамической системы. Формально понижение порядка осуществляется при помощи разбиения неизвестных функций в сумму двух слагаемых. Одно из этих слагаемых есть линейная комбинация присоединенных и собственных векторов, соответствующих центральному спектру (мнимым собственным значениям), а другое является величиной следующего порядка малости по амплитуде волн и представляет собой определяемую функцию от первого слагаемого. Уравнения на коэффициенты упомянутой линейной комбинации являются системой пониженного порядка в гильбертовом пространстве X_0 . В случае бесконечномерной динамической системы указанное понижение порядка возможно лишь при выполнении дополнительных условий, которым должен удовлетворять оператор $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \rightarrow X$, где X – основное гильбертово функциональное пространство [30]–[33]. Размерность пространства X_0 конечна, что эквивалентно конечности числа мнимых собственных значений (с учетом их кратности) оператора $\mathcal{A}$. Система уравнений (1.1) после проекции на пространство X_0 и ему дополнительное в X принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_0 &= \mathcal{A}_0 \mathbf{u}_0 + \mathcal{F}_0(\mu, \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1), \\ \dot{\mathbf{u}}_1 &= \mathcal{A}_1 \mathbf{u}_1 + \mathcal{F}_1(\mu, \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1),\end{aligned}\tag{1.2}$$

где

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) \in X = X_0 \times X_1, \quad \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}|_{X_0}, \quad \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{X_1 \cap D(\mathcal{A})}.$$

Оказывается, что, до тех пор пока сохраняется неравенство $\|\mathbf{u}_0\| < \varepsilon$, решение $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$ системы уравнений (1.2) целиком принадлежит ограниченному множеству (центральному многообразию) $M_\mu = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 = \mathbf{h}(\mu, \mathbf{u}_0)\} \subset X$. Следовательно, множество всех малых ограниченных решений удовлетворяет конечномерной динамической системе уравнений

$$\dot{\mathbf{u}}_0 = \mathcal{A}_0 \mathbf{u}_0 + f_0(\mu, \mathbf{u}_0), \quad f_0(\mu, \mathbf{u}_0) = \mathcal{F}_0(\mu, \mathbf{u}_0 + \mathbf{h}(\mu, \mathbf{u}_0)).\tag{1.3}$$

Уравнения (1.3) называются приведенными уравнениями на центральном многообразии M_μ , или просто приведенными уравнениями.

5. Исследование системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных после понижения порядка, проводится асимптотическими методами, в частности путем приближения приведенных уравнений квазинормальными формами. Уравнения в квазинормальной форме, отвечающие всем четырем перечисленным типам бифуркаций, являются интегрируемыми [34]–[36]. В книге [30] сформулированы общие результаты теории квазинормальных форм для обратимых систем, а также приведен вывод уравнений в квазинормальной форме в рассматриваемых случаях. В настоящей статье не требуется сведение уравнений на центральном многообразии к квазинормальной форме: приближение приведенных уравнений уже имеет простейший вид.

6. Доказательство грубости решений типа уединенной волны асимптотических уравнений, т. е. доказательство того факта, что решения полной системы (или локально эквивалентной ей приведенной системы), аппроксимирующиеся решениями приближенных приведенных уравнений низшего порядка по амплитуде, являются также уединенными волнами соответствующих типов. Эти доказательства,

как правило, сводятся к использованию теоремы о неявной функции в различных формах. Для простого резонанса такое доказательство известно (см., например, монографию [30]). Формулировка результата о грубости решений приведена в виде леммы в настоящей статье.

Несмотря на то что исследуется конкретная задача, представленный анализ обладает определенной общностью. Полученные результаты с качественной точки зрения основаны на некоторых общих свойствах целого класса обратимых задач и количественно определяются лишь небольшим числом параметров. Инвариантность относительно преобразования Галилея сводит поиск бегущих волн к решению стационарной задачи, которая описывается квазилинейной системой эллиптических уравнений. В рассматриваемом случае эти уравнения зависят от четырех безразмерных параметров λ , b , γ и c , где λ равно обратному квадрату числа Фруда, b представляет собой аналог числа Бонда для капиллярных сил и определяется предварительным напряжением пластины, параметр γ характеризует жесткость пластины на изгиб, а c – инерцию пластины.

Вековое уравнение в данном случае имеет вид

$$\sigma \cos \sigma - [\lambda - (b - c)\sigma^2 + \gamma\sigma^4] \sin \sigma = 0. \quad (1.4)$$

Это уравнение должно решаться для $\sigma \in \mathbb{C}$ (здесь $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость). Тот факт, что для каждого фиксированного значения параметров имеется лишь конечное число корней уравнения (1.4) на мнимой оси, а также то обстоятельство, что если σ есть корень, то $-\sigma$ – тоже корень, следуют из общих свойств основной системы уравнений.

Настоящая статья организована следующим образом. В разделе 2 излагается модель ледяного покрова в рамках теории классической геометрически нелинейной пластины, выводит самосогласованная система уравнений, описывающих изгибные колебания упругой пластины на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины, рассмотрена динамика длинных волн малой амплитуды. В разделе 3 изучаются свойства линейной части бесконечномерной динамической системы уравнений для бегущих волн. При помощи кратко обозначенных процедур она сводится к конечномерной динамической системе размерности два. В разделе 4 подробно рассматривается случай простого резонанса для данной системы, когда центральный спектр матрицы $\mathcal{A}(\lambda_0)$ состоит из пары собственных значений, в этом случае выписаны приведенные уравнения на центральном многообразии. Показано, что в указанном случае простой резонанс отвечает солитоноподобным решениям (классическим уединенным волнам), и сформулирован результат о грубости солитоноподобных решений. В заключительном разделе статьи приводится обсуждение.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ДИНАМИКА ДЛИННЫХ ВОЛН; СОЛИТОНЫ

Эксперименты показывают, что ледяной покров в естественных условиях ведет себя как тонкая упругая пластина [37]. В связи с этим будем рассматривать его в рамках модели упругой пластины Кирхгоффа–Лява, относительно которой приняты следующие допущения:

- существует нейтральная (серединная) поверхность, деформации растяжения или сжатия которой являются наперед заданными и не изменяются при изгибе;

Рис. 1. Фрагмент упругой пластины с локальной системой координат (ξ, ζ) . Штриховая линия обозначает серединную поверхность. В результате заданного внешнего растяжения (сжатия) в пластине возникает поле напряжений, приводящее к внутренним силам, поверхностная плотность которых имеет абсолютную величину σ_0 .

- каждое волокно упругого слоя, которое ортогонально нейтральной поверхности в недеформированном состоянии, остается прямым и ортогональным этой поверхности после деформации;
- напряженно-деформированное состояние подчиняется закону Гука, т. е. деформации малы и пластина является физически линейной.

Будем предполагать что пластина находится в предварительно напряженном состоянии, которое характеризуется горизонтальным напряжением σ_0 (см. рис. 1). Это напряжение обусловлено начальным растяжением (или сжатием, как на рисунке) серединной поверхности, которое в силу вышеизложенного остается неизменным при изгибных деформациях.

Математическое описание упругой пластины формулируется в локальной криволинейной системе координат в плоских сечениях (ξ, ζ) , жестко присоединенной к серединной поверхности пластины. В недеформированном состоянии эта система координат (с точностью до сдвига) совпадает с глобальной декартовой системой координат x, z . Координата ξ изменяется вдоль дуг окружностей, параллельных локальным фрагментам серединной поверхности, а ζ – в ортогональном направлении к серединной поверхности (см. рис. 1).

Упругий слой, в недеформированном состоянии имеющий толщину h , занимает искривленную область

$$\Omega = \{\xi \in \mathbb{R}, -h < 2\zeta < h\}$$

с границей

$$\partial\Omega = \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^- = \{\xi \in \mathbb{R}, 2\zeta = h\} \cup \{\xi \in \mathbb{R}, 2\zeta = -h\}.$$

Далее будем рассматривать изгиб пластины в плоскости (x, z) .

Из первых двух свойств пластины Кирхгофа–Лява следует (см. рис. 1), что

$$d\xi = (R_m + \zeta) d\varphi, \quad dx = \frac{d\varphi}{R_m}, \quad (2.1)$$

так как на срединной поверхности длина дуги совпадает с длиной прямолинейного элемента срединной поверхности пластины, свободной от изгиба. Из соотношений (2.1) вытекает уравнение

$$d\xi = \left(1 + \frac{\zeta}{R_m}\right) dx. \quad (2.2)$$

Из (2.2) имеем

$$d\xi^2 = g_{11} dx^2, \quad g_{11} = \left(1 + \frac{\zeta}{R_m}\right)^2. \quad (2.3)$$

Из (2.3) получим выражение для компоненты $\epsilon_{\xi\xi}$ тензора деформаций:

$$\epsilon_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(g_{11} - 1) = \frac{\zeta}{R_m} + O\left(\frac{\zeta^2}{R_m^2}\right). \quad (2.4)$$

Далее будем предполагать, что $h/R_m \ll 1$, и принимать во внимание лишь члены порядка $O(h/R_m)$, пренебрегая членами порядка $O(h^2/R_m^2)$.

Из закона Гука следует выражение для компоненты изгибных напряжений $\sigma_{\xi\xi}$ в случае изгиба в плоскости (x, z) :

$$\sigma_{\xi\xi} = (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\epsilon_{\xi\xi} + \tilde{\lambda}\epsilon_{\zeta\zeta}, \quad (2.5)$$

где $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ – коэффициенты Ламе.

При изгибе тонкой пластины компоненты напряжений, имеющие по крайней мере один из индексов ζ , значительно меньше, чем напряжения $\sigma_{\xi\xi}$, возникающие в результате сжатий и растяжений внутри пластины [38]. Поэтому при поиске распределения внутренних напряжений в изогнутой пластине в граничных условиях можно положить равными нулю компоненты напряжений $\sigma_{\zeta\zeta} = (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\epsilon_{\zeta\zeta} + \tilde{\lambda}\epsilon_{\xi\xi}$. Отсюда имеем

$$\epsilon_{\zeta\zeta} = -\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \epsilon_{\xi\xi}. \quad (2.6)$$

Подставляя это выражение в (2.5), получим с учетом (2.4), что при чистом изгибе

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{\tilde{E}}{R_m(1 - \tilde{\nu}^2)} \zeta,$$

где $\tilde{E}$ – модуль Юнга,

$$\tilde{E} = \tilde{\mu} \frac{3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}},$$

а $\tilde{\nu}$ – коэффициент Пуассона для льда,

$$\tilde{\nu} = \frac{\tilde{\lambda}}{2(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})}.$$

Изгибающий момент M связан с радиусом кривизны R_m срединной поверхности следующими соотношениями:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \zeta \sigma_{\xi\xi}(\zeta) d\zeta = \frac{J}{R_m}, \quad J = \frac{\tilde{E}h^3}{12(1-\nu_0^2)}.$$

Мы изучаем плоскопараллельные потенциальные движения идеальной несжимаемой жидкости глубины H и плотности ρ . Жидкость занимает область

$$G = \{x \in \mathbb{R}, 0 < z < H + \eta(x)\},$$

которая имеет границу

$$\partial G = \partial G^+ \cup \partial G^- = \{x \in \mathbb{R}, z = H + \eta(x)\} \cup \{x \in \mathbb{R}, z = 0\}.$$

Массовую плотность пластины обозначим через ρ_s , поверхность раздела вода–лед задается уравнением $z = H + \eta(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Динамическое граничное условие на поверхности раздела определяется балансом сил внутри упругого слоя:

$$\begin{aligned} \partial_\xi \sigma_{\xi\xi} + \partial_\zeta \sigma_{\xi\zeta} &= 0, & \partial_\xi \sigma_{\xi\zeta} + \partial_\zeta \sigma_{\zeta\zeta} + f &= \rho_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, & (\xi, \zeta) \in \Omega, \\ \sigma_{\zeta\zeta} &= -p_0, & \sigma_{\xi\zeta} &= 0, & (\xi, \zeta) \in \partial\Omega^+, \\ \sigma_{\zeta\zeta} &= -p, & \sigma_{\xi\zeta} &= 0, & (\xi, \zeta) \in \partial\Omega^-, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $f = -\sigma_0/R_m$ – плотность силы растяжения, а p и p_0 – значения давления соответственно на поверхности раздела пластина–вода и на верхней стороне пластины (атмосферное давление).

Умножим первое уравнение в (2.7) на ζ и проинтегрируем по ζ , используя граничные условия. В результате получим соотношение между перерезывающей силой N и изгибающим моментом M :

$$\partial_\xi M = N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\xi\zeta} d\zeta.$$

Интегрирование второго уравнения в (2.7) дает уравнение баланса сил, действующих на пластину:

$$p = p_0 + \frac{\sigma_0 h}{R_m} - \partial_{xx}^2 M + \rho_s h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \quad (2.8)$$

Кривизна срединной поверхности выражается следующим образом [10]:

$$\frac{1}{R_m} = - \frac{\partial_{xx} \eta}{(1 + (\partial_x \eta)^2)^{3/2} - h \partial_{xx} \eta / 2}.$$

Из соотношения (2.8) следует, что уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины в присутствии упомянутых поверхностных эффектов имеют вид [16], [30]

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{zz} &= 0, & 0 < z < H + \eta(x), \\ \varphi_z &= 0, & z = 0, \\ \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + g\eta - \hat{b}\hat{\kappa}_1 + J\hat{\kappa}_2 + \hat{c}\eta_{tt} &= 0, & z = H + \eta(x), \\ \eta_t + \eta_x \varphi_x &= \varphi_z, & z = H + \eta(x), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\hat{\kappa}_1 = \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2} - h\eta_{xx}}, \quad \hat{\kappa}_2 = \partial_{xx}^2 \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2} - h\eta_{xx}},$$

нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным, g – ускорение свободного падения и

$$\hat{c} = \frac{\rho_s h}{\rho}, \quad \hat{b} = \frac{h\sigma_0}{\rho}.$$

Обозначения используемых основных размерных величин и фундаментальных констант сведены в табл. 1.

Таблица 1. Используемые обозначения основных размерных величин и фундаментальных констант.

Символ	Величина	Размерность
φ	потенциал скорости	$[L^2 T^{-1}]$
η	отклонение поверхности жидкости	$[L]$
x	горизонтальная координата	$[L]$
z	вертикальные координата	$[L]$
h	толщина льда	$[L]$
H	глубина жидкости	$[L]$
g	ускорение свободного падения	$[L T^{-2}]$
k	волновое число	$[L^{-1}]$
ω	частота	$[T^{-1}]$
σ_0	начальное напряжение в пластине	$[ML^{-1} T^{-2}]$
$\tilde{E}$	модуль Юнга	$[ML^{-1} T^{-2}]$
$\tilde{\nu}$	коэффициент Пуассона	$[]$
ρ	плотность жидкости	$[ML^{-3}]$
ρ_s	плотность льда	$[ML^{-3}]$
l	характерная длина волны	$[L]$
a	характерная амплитуда волны	$[L]$
c_0	$\sqrt{gH}$ – фазовая скорость	$[L T^{-1}]$

Дисперсионное соотношение системы (2.9) имеет вид

$$\omega^2 = \left[\frac{k \operatorname{th}(kH)}{1 + \hat{c}k \operatorname{th}(kH)} \right] \left[g + \hat{b}k^2 + \frac{J}{\rho}k^4 \right]. \quad (2.10)$$

Далее определим два безразмерных параметра

$$\varepsilon = \frac{a}{H}, \quad \epsilon = \frac{H^2}{l^2}$$

и предположим, что $\varepsilon \ll 1$ и $\epsilon \ll 1$, т. е. будем рассматривать длинные волны малой амплитуды. Из соотношения (2.10) следует асимптотическое дисперсионное соотношение для длинных волн

$$\omega = kc_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{H^2}{3} + \hat{c}H - \frac{\hat{b}}{g} \right) k^2 + \frac{g(180J + 19c_0^2 H^3 + 90c_0^2 \hat{c}H^2 + 135c_0^2 \hat{c}^2 H) - 30\hat{b}c_0^2(3\hat{c} + H) - 45\hat{b}^2}{360g^2} k^4 + O(\epsilon^3) \right]. \quad (2.11)$$

Предполагая, что безразмерные масштабы имеют один порядок, т. е. $\varepsilon \sim \epsilon$, и применяя стандартную асимптотическую процедуру разложения по малому параметру, получим в пределе длинных волн и малых амплитуд уравнение КдФ, описывающее динамику соответствующих волн:

$$\eta_t + c_0 \eta_x + \frac{3}{2} \frac{c_0}{H} \eta \eta_x + \frac{1}{2} c_0 \left(\frac{H^2}{3} + \hat{c}H - \frac{\hat{b}}{g} \right) \eta_{xxx} = 0. \quad (2.12)$$

Когда ϵ мало, но отделено от нуля, в связи с большим значением модуля Юнга для льда ($\tilde{E} \approx 5 \cdot 10^9$ н/м²) предполагают, что слагаемое $(c_0 J / 2g) k^5$ в (2.11) имеет тот же порядок величины, что и слагаемое с третьей степенью k из-за большой величины коэффициента при k^5 [16]. Тогда для длинных волн вместо (2.12) имеем асимптотическое уравнение

$$\eta_t + c_0 \eta_x + \frac{3}{2} \frac{c_0}{H} \eta \eta_x + \frac{1}{2} c_0 \left(\frac{H^2}{3} + \hat{c}H - \frac{\hat{b}}{g} \right) \eta_{xxx} + c_0 \frac{J}{2g} \eta_{xxxx} = 0. \quad (2.13)$$

В работе [39] показано, что, если

$$\frac{H^2}{3} + \hat{c}H - \frac{\hat{b}}{g} < 0,$$

это уравнение имеет солитоноподобные решения, которые мало отличаются от солитонов уравнения КдФ (2.12)

3. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим бегущую волну, которая распространяется налево вдоль оси x со скоростью V . В системе координат, движущейся со скоростью V , компоненты вектора скорости частиц $\mathbf{v} = (u, v)$ удовлетворяют следующим асимптотическим условиям: $u \rightarrow V$, $v \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Произведем далее масштабные преобразования

$$(x, z) \rightarrow \left(\frac{x}{H}, \frac{z}{H} \right), \quad \eta \rightarrow \frac{\eta}{H}, \quad \mathbf{v} \rightarrow \frac{\mathbf{v}}{V}.$$

В новых безразмерных переменных, для обозначения которых будем использовать старые символы, система уравнений Эйлера для бегущих волн с учетом (2.8) имеет

ВИД

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \mathbf{0}, & \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, & (xH, zH) &\in G, \\ \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \lambda\eta - b\kappa_1 + \gamma\kappa_2 + c\partial_{xx}\eta &= \text{const}, & (xH, zH) &\in \partial G^+, \\ \partial_x\eta u - v &= 0, & v &= 0, & (xH, zH) &\in \partial G^-; \\ \mathbf{v} &\rightarrow (1, 0), & \eta(x) &\rightarrow 1 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Постоянные λ , b , γ и c определяются соотношениями

$$\lambda = \frac{gH}{V^2}, \quad b = \frac{\hat{b}}{HV^2}, \quad \gamma = \frac{J}{\rho V^2 H^3}, \quad c = \frac{\hat{c}}{H}.$$

Функции κ_j , $j = 1, 2$, выражаются по формулам

$$\kappa_1 = \frac{\partial_{xx}\eta}{(1 + (\partial_x\eta)^2)^{3/2} - \kappa \partial_{xx}\eta}, \quad \kappa_2 = \partial_{xx}^2 \frac{\partial_{xx}\eta}{(1 + (\partial_x\eta)^2)^{3/2} - \kappa \partial_{xx}\eta}, \quad \kappa = \frac{h}{H}.$$

По сравнению с работой [35], где рассматривались капиллярно-гравитационные волны, в (3.1) появляется дополнительное слагаемое $\gamma\kappa_2$; кроме того, знак постоянной b может быть теперь любым.

Определим новые “полулагранжевы” координаты $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$ по формуле $y = \psi(x, z) = z + \Psi$, где $\psi(x, z)$ обозначает функцию тока, нормированную при помощи среднего расхода $Q = VH$. Кроме того, произведем отображение поля скоростей $\mathbf{v} = (u, v) = (1 + U, \mathcal{V})$ на векторное поле $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ [32]:

$$w_1 = \frac{(1 + U)^2 + \mathcal{V}^2 - 1}{2}, \quad w_2 = \frac{\mathcal{V}}{1 + U},$$

где U , $\mathcal{V}$ предполагаются малыми, а $\partial_z\Psi = U$, $\partial_x\Psi = -\mathcal{V}$. Оба этих преобразования являются обратимыми, как отображения $G \rightarrow G' = \mathbb{R} \times (0, 1)$. В новых переменных система уравнений (3.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \partial_x \mathbf{s} &= \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{w}), & y &= 1, \\ \partial_x \mathbf{w} &= \mathcal{K}(\mathbf{w}) \partial_y \mathbf{w}, & x, y &\in G', \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\mathbf{s} = (s, s_1, s_2)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $f_j(\mathbf{s}, \mathbf{w}) = s_j$ для $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned} f_3(\mathbf{s}, \mathbf{w}) &= \frac{1}{\gamma(1 + s^2)^{3/2}} (\sqrt{1 + s^2} + s^2 \sqrt{1 + s^2} - \kappa s_1^2)^2 \times \\ &\times \left(-\lambda([\hat{g}] - 1) - w_1(1) - cs_1 + \frac{bs_1}{(1 + s^2)^{3/2} - \kappa s_1} + P \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \gamma \{ -3\sqrt{1 + s^2}(-1 + 3s^2 + 4s^4)s_1^3 - 3(\kappa + 2\kappa s^2)s_1^4 + 9s(1 + s^2)^{5/2}s_1s_2 + \\ &+ 3\kappa s(1 + s^2)s_1^2s_2 - 2\kappa(1 + s^2)^2s_2^2 \} \cdot \{ \sqrt{1 + s^2}(\sqrt{1 + s^2} + s^2\sqrt{1 + s^2} - \kappa s_1)^3 \}^{-1}, \end{aligned}$$

$$s = w_2(1), \quad \hat{g} = \frac{(1 + w_2^2)^{1/2}}{(1 + 2w_1)^{1/2}} \quad [\hat{g}] = \int_0^1 \hat{g} dy$$

и

$$\mathcal{K}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w_2 \hat{g}^{-1} & -\hat{g}^{-3} \\ \hat{g} & w_2 \hat{g}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Отклонение поверхности η дается формулой $\eta = 1 - [w_1] + \dots$.

Определим вектор $\mathbf{u} = (\mathbf{s}, \mathbf{w})^t$ и рассмотрим его как образ при отображении $\mathbb{R} \ni x \rightarrow X = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{L}^2(0, 1)$, где $\mathbb{L}^2(0, 1) = L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$, а $L^2(0, 1)$ обозначает пространство квадратично-интегрируемых функций на интервале $(0, 1)$. Система (3.2) может быть переписана в виде, аналогичном (1.1):

$$\partial_x \mathbf{u} = \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}, c) \mathbf{u} + \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}, c, \mathbf{u}), \quad (3.3)$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, b, \gamma)$.

Оператор $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}, c)$ определяется по действию на вектор-функцию $\mathbf{u}$:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}, c) \mathbf{u} = \{s_1, s_2, \gamma^{-1}((b - c)s_1 - w_1(1) + \lambda[w_1]), -\partial_y w_2, \partial_y w_1\},$$

а нелинейная вектор-функция $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}, c, \mathbf{u})$ имеет вид

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}, c, \mathbf{u}) = \{\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{u}), \mathcal{K}(\mathbf{w}) \partial_y \mathbf{w}\} - \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}, c) \mathbf{u}.$$

Область $D(\mathcal{A})$ определения оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}, c)$ задается как

$$D(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{H}^1(0, 1) \cap \{w_2(0) = 0, w_2(1) = s\},$$

где $\mathbb{H}^1(0, 1) = H^1(0, 1) \times H^1(0, 1)$ и $H^1(0, 1)$ – пространство функций, квадратично-интегрируемых на интервале $(0, 1)$ вместе со своими производными.

Образ оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}, c)$ является линеаризацией вектора $(\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{w}), \mathcal{K}(\mathbf{w}) \partial_y \mathbf{w})$ в точке $\mathbf{w} = 0$ при фиксированных значениях параметров $(\lambda, b, \gamma) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}^+$. Система уравнений (3.2) и соответствующая ей система (3.3) обратимы по отношению к изометрии $\mathcal{R} = \text{diag}(-1, 1, -1, 1, -1)$.

Легко видеть, что вектор-функция $\mathcal{G}$ отображает $D(\mathcal{A})$ в гильбертово пространство $Y = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{L}^2(0, 1)$, которое является замкнутым подпространством X .

В заключение приведем явный вид сопряженного оператора

$$\mathcal{A}^*(\boldsymbol{\lambda}, c, \mathbf{u}) = (-w_1(1), s + (b - c)w_2(1), s_1, -\partial_y w_2 + \lambda w_2(1), \partial_y w_1),$$

имеющего область определения

$$D(\mathcal{A}^*) = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{H}^1(0, 1) \cap \{s_2 = \gamma w_2(1), w_2(0) = 0\}.$$

4. СОЛИТОНОПОДОБНЫЕ СТРУКТУРЫ, ИХ ГРУБОСТЬ

Можно показать, что неограниченный замкнутый в X оператор $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}, c)$ имеет компактную резольвенту и, следовательно, его спектр состоит из собственных значений, каждое из которых имеет конечную кратность [30]. Эти собственные значения являются корнями уравнения (1.4). Вследствие вещественности $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}, c)$ и обратимости уравнений (3.3) спектр оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}, c)$ симметричен относительно вещественной и мнимой осей в комплексной плоскости спектрального параметра. Из общей теории [32] и теоремы о резольвентных оценках, доказанной в [30], следует, что все ограниченные решения уравнений (3.2), лежащие в достаточно малой окрестности нулевого решения, можно найти из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые связаны с центральной частью спектра оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}, c)$, состоящей из конечного числа мнимых собственных значений. Следовательно, множество

Рис. 2. Динамика собственных значений центрального спектра оператора $\mathcal{A}(\lambda, c)$ при изменении параметра μ .

нетривиальных решений уравнений (3.2) будет изменяться качественно только при тех значениях параметров, при которых изменяется упомянутая центральная часть спектра.

Чтобы найти значения $(\lambda_0, b_0, \gamma_0)$ в пространстве параметров $(\lambda, b, \gamma) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ и фиксированное значение $c \in \mathbb{R}^+$, при которых наступают бифуркации, необходимо определить те значения, при которых уравнение (1.4) имеет мнимые корни кратности больше единицы, иными словами, происходят резонансы (собственные значения оператора $\mathcal{A}(\lambda, c)$ приходят на мнимую ось парами).

Положим $\sigma = iq$, тогда (1.4) можно переписать в виде

$$q \operatorname{cth} q = \lambda + (b - c)q^2 + \gamma q^4. \quad (4.1)$$

Двойной корень должен удовлетворять уравнению

$$\operatorname{cth} q - q \operatorname{sh}^{-2} q = 2(b - c)q + 4\gamma q^3. \quad (4.2)$$

Рассмотрим случай, когда двойным корнем уравнения (4.1) является $q = 0$. При $\lambda = \lambda_0 = 1$ и произвольных b_0, c и γ_0 выполняются соотношения (4.1), (4.2). Солитоноподобные решения существуют только в случае $b_0 > 1/3 + c$. При этом $q = 0$ – единственное решение уравнения (4.1), в то время как при $b_0 - c < 1/3$ имеет место пара дополнительных простых корней $\pm q, q \neq 0$.

Таким образом, при $\lambda_0 = 1, b_0 > 1/3 + c, \gamma_0 \in \mathbb{R}^+$ имеем собственные значения в центральном спектре, которые имеют кратность два, и один независимый параметр определяет бифуркацию коразмерности 1. Движение центральных собственных значений в рассматриваемом случае изображено на рис. 2

Будем полагать, что $\lambda_0 \rightarrow \lambda$, где в невозмущенном состоянии $\lambda_0 = (\lambda_0, b_0, \gamma_0)$, а в актуальном состоянии $\lambda = (\lambda, b, \gamma)$, $\lambda = \lambda_0 + \mu$, $\mu \ll 1$. В рассматриваемом случае единственным мнимым собственным значением оператора $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\lambda_0, c)$ является двукратное нулевое собственное значение, и размерность пространства X_0 (и тем самым размерность центрального многообразия) равна двум. Канонический базис в X_0 состоит из собственного ϕ_0 и присоединенного ϕ_1 векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих нулевому собственному числу: $\mathcal{A}\phi_0 = 0, \mathcal{A}\phi_1 = \phi_0$. Далее имеем $\mathcal{R}\phi_0 = \phi_0$. Тогда из равенств $\mathcal{R}\mathcal{A}\phi_1 = \mathcal{R}\phi_0 = -\mathcal{A}\mathcal{R}\phi_1$ немедленно следует $\mathcal{R}\phi_1 = -\phi_1$ и, таким образом,

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{A}^*$, сопряженный $\mathcal{A}$, имеет один собственный ψ^1 и один присоединенный ψ^0 векторы:

$$\mathcal{A}^*\psi^1 = 0, \quad \mathcal{A}^*\psi^0 = \psi^1, \quad \langle \phi_i, \psi^j \rangle = \delta_i^j,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ здесь и далее обозначает скалярное произведение в пространстве X , а δ_i^j – символ Кронекера.

При помощи векторов ψ^i , $i = 0, 1$, задается проектор π_0 на центральное многообразие:

$$\mathbf{u}_0 = \pi_0 \mathbf{u} = \sum_j \langle \mathbf{u}, \psi^j \rangle \phi_j.$$

Размерность образа проекции равна двум. Здесь

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -y \end{pmatrix}, \quad \psi^0 = v \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \\ b_0 + (y^2 - 1)/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^1 = v \begin{pmatrix} -(b_0 - c) \\ 0 \\ \gamma_0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix},$$

где $v = (b_0 - c - 1/3)^{-1}$.

Полагая $\mathbf{u}_0 = a_0 \phi_0 + a_1 \phi_1$, получим приведенные уравнения на центральном многообразии:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= a_1 + O(\mu^2 |\mathbf{a}|, \mathbf{a}^3), \\ \dot{a}_1 &= v \left(\mu a_0 - \frac{3}{2} a_0^2 + \frac{a_1^2}{4} \right) + O(\mu^2 |\mathbf{a}|, |\mathbf{a}^3|), \quad \mathbf{a} = (a_0, a_1). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Производя замену

$$a_0 = \mu \beta_0(\varsigma), \quad a_1 = \mu \nu \beta_1(\varsigma), \quad \varsigma = \nu x, \quad \nu = \mu^{1/2} v^{1/2}, \quad (4.4)$$

получим в нулевом порядке по μ

$$\begin{aligned} \partial_\varsigma \beta_0 &= \beta_1, \\ \partial_\varsigma \beta_1 &= \operatorname{sgn} \mu \left(\beta_0 - \frac{3}{2} \beta_0^2 \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Легко видеть, что эти уравнения полностью согласуются с их нестационарным размерным аналогом (2.12).

Уравнения (4.5) обладают первым интегралом

$$\operatorname{sgn} \mu \beta_1^2 - (\beta_0^2 - \beta_0^3) = H_0.$$

Для $\mu > 0$, $H_0 = 0$ имеет место солитоноподобное решение уравнений (4.5) $\beta_0 = \operatorname{ch}^{-2} \varsigma / 2$. Это решение описывает классическую уединенную волну понижения уровня. Форма свободной поверхности задается формулой

$$\eta = 1 - a_0(x) + O(\mu^2) = 1 - \mu \operatorname{ch}^{-2} \frac{\nu x}{2} + O(\mu^2). \quad (4.6)$$

Параметр γ не возникает в членах низшего порядка по μ . Производя замену, обратную (4.4), получим

$$\alpha_0 = \mu\beta_0 = \mu \operatorname{ch}^{-2} \frac{\nu x}{2}.$$

Имеет место следующий результат о грубости солитонных решений “обрезанной системы” (4.5) (см., например, работу [40]).

ЛЕММА 1. *Для достаточно малых μ_0 и $\mu \in (0, \varepsilon_0]$ существует семейство солитоноподобных решений a_0 приведенной системы (4.3). Более того,*

$$|a_0 - \alpha_0| \leq C\mu e^{-\chi|\varsigma|},$$

где C, χ – постоянные и $C > 0, 0 < \chi < 1$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Доказано существование солитоноподобных решений, отвечающих семейству уединенных волн понижения поверхности, полной системы уравнений (2.9), которая описывает распространение волн в жидкости конечной глубины под ледяным покровом. Ледяной покров моделируется упругой пластиной Кирхгоффа–Лява и имеет значительную толщину, так что инерция пластины учитывается при формулировке модели. Упомянутое семейство уединенных волн параметризовано скоростью распространения волны, и его существование доказано для скоростей, достаточно близких к характеристической фазовой скорости $\sqrt{gH}$. Уединенные волны, в свою очередь, ответвляются от состояния покоя и находятся в некоторой его окрестности. Иными словами, доказано существование уединенных волн понижения поверхности вода–лед достаточно малой амплитуды.

Доказательство проводится путем проекции искомой системы уравнений на центральное многообразие (имеющее в данном случае размерность два) с дальнейшим анализом конечномерной приведенной динамической системы на центральном многообразии. Редукция на центральное многообразие, т. е. возможность обратить второе из уравнений (1.2) (существование ограниченного обратного оператора $(\partial_x - \mathcal{A}_1)^{-1}$ в подходящих функциональных пространствах [32]) обусловлена справедливостью в данном случае резольвентных оценок [30], которые по сути являются свойствами убывания резольвенты замкнутого неограниченного оператора $\mathcal{A}$.

Приведенная система на центральном многообразии (4.3) приближается далее “обрезанной системой” (в безразмерной форме имеющей вид (4.5)), которая является интегрируемой и допускает солитонное решение. И, наконец, устанавливается тот факт, что солитонное решение приближенной системы аппроксимирует солитонное решение приведенной системы (4.3), которая локально эквивалентна полной системе.

В настоящей статье учитывается инерция ледяного покрова, которая игнорировалась прежде. Это необходимо делать, когда еще возможно приближение ледяного покрова упругой пластиной, но при этом пренебрежение толщиной пластины по сравнению с глубиной жидкости является грубым. Пример, когда толщина покрова составляет примерно 10% от глубины жидкости (что характерно, например, для средних рек и озер, где глубина достигает 10 м, а толщина ледяного покрова составляет до 1 м) проиллюстрирован рис. 3. При этом видно, что при учете инерции

Рис. 3. Сравнительная форма уединенных волн понижения поверхности раздела вода–лед (4.6): $c = 0.1$ – жирная линия, $c = 0$ (инерция ледяного покрова не учитывается) – тонкая линия. Здесь $\mu = 0.05$, $b_0 = 0.53$.

ледяного покрова эффективная длина уединенной волны существенно уменьшается по сравнению с безынерционным приближением. Это указывает на необходимость учета инерции ледяного покрова для водоемов средней и малой глубины.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 12-05-00889 и 14-01-00466).

Список литературы

- [1] J. J. Stoker, *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*, Wiley Interscience, New York, 1957.
- [2] D. G. Duffy, *Cold Reg. Sci. Tech.*, **20**:1 (1991), 51–64.
- [3] D. G. Duffy, *Cold Reg. Sci. Tech.*, **24**:1 (1996), 29–39.
- [4] А. В. Марченко, А. Ю. Семенов, *Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидк. и газа*, 1994, № 4, 185–189.
- [5] А. В. Марченко, Е. Г. Морозов, С. В. Музылев, А. С. Шестов, *Океанология*, **50**:1 (2010), 23–31.
- [6] С. В. Музылев, *Океанология*, **46**:4 (2006), 500–506.
- [7] R. M. S. M. Schulkes, R. J. Hosking, A. D. Sneyd, *J. Fluid Mech.*, **180** (1987), 297–318.
- [8] V. A. Squire, *Cold Reg. Sci. Tech.*, **10**:1 (1984), 59–68.
- [9] E. O. Tuck, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **23**:4 (1982), 403–415.
- [10] L. K. Forbes, *J. Fluid Mech.*, **169** (1986), 409–428.
- [11] L. K. Forbes, *J. Fluid Mech.*, **188** (1988), 491–508.
- [12] I. Bakhholdin, A. Pichev, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **23**:3 (2003), 291–304.
- [13] А. Т. Ильичев, *Изв. РАН. Сер. Мех. жидк. и газа*, 2000, № 2, 3–27.
- [14] А. Т. Ильичев, А. В. Марченко, *Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидк. и газа*, 1989, № 1, 88–95.
- [15] А. Т. Ильичев, А. В. Марченко, *ПММ*, **61**:2 (1997), 190–201.
- [16] А. В. Марченко, *ПММ*, **52**:2 (1988), 230–235.
- [17] А. В. Марченко, Н. Р. Сибгатуллин, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1986, № 4, 94–97.
- [18] А. В. Марченко, Н. Р. Сибгатуллин, *Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидк. и газа*, 1987, № 6, 57–64.

- [19] E. Parau, F. Dias, *J. Fluid. Mech.*, **437**:1 (2001), 325–336.
- [20] L. Brevdo, A. Il'ichev, *Z. Angew. Math. Phys.*, **49**:3 (1998), 401–419.
- [21] L. Brevdo, A. Il'ichev, *Cold Reg. Sci. Tech.*, **33**:1 (2001), 77–89.
- [22] L. Brevdo, A. Il'ichev, *Eur. J. Mech. A: Solids*, **25**:3 (2006), 509–525.
- [23] J. Strathdee, W. H. Robinson, E. M. Haines, *J. Fluid Mech.*, **226** (1991), 37–61.
- [24] С. В. Музылев, “Волны в океане под ледяным покровом: основы теории и модельные задачи”, *Современные проблемы динамики океана и атмосферы*, К 100-летию со дня рождения проф. П. С. Линейкина, ред. А. В. Фролов, Ю. Д. Реснянский, ТРИАДА ЛТД, М., 2010, 315–345.
- [25] R. G. Chowdhury, B. N. Mandal, *Fluid Dynam Res.*, **38**:4 (2006), 224–240.
- [26] D. Q. Lu, S. Q. Dai, *Arch. Appl. Mech.*, **76**:1–2 (2006), 49–63.
- [27] D. Q. Lu, S. Q. Dai, *Intern. J. Eng. Sci.*, **46**:11 (2008), 1183–1193.
- [28] А. А. Савин, А. С. Савин, *Изв. РАН. Сер. Мех. жидк. и газа*, **47**:2 (2012), 3–10.
- [29] А. Т. Ильичёв, А. А. Савин, А. С. Савин, *Докл. РАН*, **444**:2 (2012), 156–159.
- [30] А. Т. Ильичев, *Уединенные волны в моделях гидромеханики*, Физматлит, М., 2003.
- [31] K. Kirchgässner, *J. Differ. Equ.*, **45**:1 (1982), 113–127.
- [32] A. Mielke, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **10**:1 (1988), 51–66.
- [33] A. Vanderbauwhede, G. Iooss, “Center manifold theory in infinite dimensions”, *Dynamics Reported*, Expositions in Dynamical Systems, **1**, eds. C. K. R. T. Jones, U. Kirchgraber, H.-O. Walther, Springer, Berlin, Heidelberg, 1992, 125–163.
- [34] M. Hărăguș-Courcelle, A. Il'ichev, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **17** (1998), 739–768.
- [35] G. Iooss, K. Kirchgässner, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A*, **122**:3–4 (1992), 267–299.
- [36] G. Iooss, M. C. Pérouème, *J. Differ. Equ.*, **102**:1 (1993), 62–88.
- [37] A. Müller, R. Ettema, “Dynamic response of an icebreaker hull to ice breaking”, *Proceedings of the 7th IAHR International Symposium on Ice*, v. 2 (Hamburg, Germany, 27–30 August, 1984), Ice Engineering Department, Hamburg, 1984, 287–296.
- [38] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, М., 1987.
- [39] А. Т. Il'ichev, A. Yu. Semenov, *Theoret. Comput. Fluid Dynam.*, **3**:6 (1992), 307–326.
- [40] Y. B. Fu, A. T. Il'ichev, *IMA J. Appl. Math.*, **75**:2 (2010), 257–268.

Поступила в редакцию 13.05.2014,
после доработки 8.07.2014