Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Э. Арутюнов, М. де Люв, С. Д. Ван Тонгерен, Точный спектр и зеркальная дуальность $(AdS_5 \times S^5)_\eta$ -суперструны, *ТМФ*, 2015, том 182, номер 1, 28–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8709>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:06:47

© 2015 г.

Г. Э. Арутюнов^{*†‡}, М. де Люв[§],
С. Дж. Ван Тонгерен[¶]

ТОЧНЫЙ СПЕКТР И ЗЕРКАЛЬНАЯ ДУАЛЬНОСТЬ $(AdS_5 \times S^5)_\eta$ -СУПЕРСТРУНЫ

Обсуждается спектр струны, распространяющейся в η -деформированном пространстве $AdS_5 \times S^5$. Для этого ее теория на мировом листе представляется в терминах интегрируемой квантовой теории поля. Точная S -матрица этой теории задается q -деформацией S -матрицы теории на мировом листе пространства $AdS_5 \times S^5$ с вещественным параметром деформации. Рассматривая зеркальные (с двойным виковским поворотом) версии этих теорий на мировом листе, с помощью термодинамического анзаца Бете можно получить их точный спектр в случае системы конечного размера. Интересно отметить, что этот класс моделей отображается сам на себя при преобразованиях зеркальной дуальности. На уровне теории струн это означает, что теории струн в калибровке светового конуса на мировом листе при некоторых частных выборах фоновой метрики переходят одна в другую при двойных виковских поворотах. Это так называемая “зеркальная двойственность”. Наши утверждения частично проверены на уровне сигма-модели при рассмотрении редуцированных действий и отвечающих им при зеркальной дуальности решений типа гигантских магнонов.

Ключевые слова: АдС-КТП-соответствие, сигма-модель, точные S -матрицы, термодинамический анзац Бете.

DOI: 10.4213/tmf8709

^{*}Institute for Theoretical Physics and Spinoza Institute, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands. E-mail: g.e.arutyunov@uu.nl

[†]Institute for Theoretical Physics, Hamburg University, Hamburg, Germany.
E-mail: gleb.arutyunov@desy.de

[‡]Внештатный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

[§]ETH Zürich, Institut für Theoretische Physik, Zurich, Switzerland.
E-mail: deleeuw@phys.ethz.ch

[¶]Institut für Mathematik und Institut für Physik, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, Germany. E-mail: svantonger@physik.hu-berlin.de

1. ВВЕДЕНИЕ

Нахождение точного спектра свободной струны, распространяющейся в заданной фоновой метрике общего вида, представляется весьма нетривиальной задачей. В частности, даже в случае максимально симметричного пространства $AdS_5 \times S^5$, возникающего в каноническом примере АдС/КТП-соответствия [1], на мировом листе возникает очень сложная теория [2]. К счастью, в случае пространства $AdS_5 \times S^5$ оказывается возможным рассматривать теорию в виде квантовой интегрируемой теории поля, что открывает возможности для ее исследования с помощью хорошо разработанных методов интегрируемых систем (см. обзоры [2], [3]).

Недавно было выдвинуто интересное предположение о том, как можно деформировать струнную сигма-модель на пространстве $AdS_5 \times S^5$ с сохранением ее классической интегрируемости [4]¹. Деформация задается вещественным параметром деформации η , что оправдывает название соответствующей модели – *η -деформированная модель*, или *струна над фоновой метрикой* $(AdS_5 \times S^5)_\eta$ ². Наш интерес к указанным моделям объясняется тем обстоятельством, что деформация нарушает суперсимметрию, равно как и все неабелевы изометрии, но все еще оставляет воодушевляющую возможность точного решения указанной модели.

Другой интересный аспект η -деформированных моделей связан с их скрытыми симметриями. Хорошо известно, что в калибровке светового конуса алгебра симметрий $AdS_5 \times S^5$ -суперструны состоит из двух копий центрально расширенных супералгебр $\mathfrak{psu}(2|2)$. Такая супералгебра допускает естественную деформацию в духе квантовой группы, обозначаемую через $\mathfrak{psu}_q(2|2)_{\text{с.е.}}$, где q представляет собой параметр деформации. Эту деформированную алгебру можно использовать при определении $\mathfrak{psu}_q(2|2)^{\oplus 2}_{\text{с.е.}}$ -инвариантной S -матрицы [13], которая, в свою очередь, может рассматриваться как q -деформация S -матрицы в калибровке светового конуса на мировом листе $AdS_5 \times S^5$ -суперструны. Связь между таким подходом, основанным на S -матрице и симметриях, и физической η -деформированной моделью была установлена недавно в работе [14], где было показано, что в пределе большого натяжения ($g \rightarrow \infty$) бозонная S -матрица в древесном приближении, возникающая из η -деформированной модели, оказывается в прекрасном согласии с q -деформированной S -матрицей, если параметр деформации удовлетворяет соотношению

$$q = e^{-\nu/g}, \quad \nu = \frac{2\eta}{1 + \eta^2}.$$

Это наблюдение свидетельствует в пользу гипотезы, что в полной квантовой теории алгебра симметрий η -деформированной модели задается двумя копиями алгебры $\mathfrak{psu}_q(2|2)$ при подходящем отождествлении q в терминах η и постоянной струнного натяжения. На основе этой гипотезы в настоящей работе мы применяем подход термодинамического анзаца Бете (ТАБ) [15] к указанной η -деформированной модели и получаем уравнения, описывающие ее спектр подобно тому, как это было

¹)Относительно более ранних и связанных с ними работ, в которых рассматриваются деформации сигма-моделей, см. [5]–[12].

²)Поскольку сам факт наличия κ -симметрии на мировом листе глубоко нетривиален и вытекает из теории струн, мы еще далеки от того, чтобы уверенно утверждать, что получаемые деформированные пространства конфигураций представляют собой настоящие струнные фоновые метрики. Тем не менее мы продолжим называть эти модели струнами.

сделано в недеформированном случае [16]–[19] и в случае параметра деформации q , лежащего на единичной окружности [20]–[22].

В отсутствие сведений о зависимости параметра деформации q от η и g в полной квантовой теории будем предполагать, что $q = e^a$, и будем считать a вещественнозначным параметром общего вида. Введем после этого второй независимый параметр $\vartheta \in [0, \pi]$ в виде подходящей функции (перенормированной) константы связи и параметра q . Таким образом, мы рассматриваем двухпараметрическое семейство моделей.

Вывод уравнений ТАБ на основное состояние требует изучения зеркально-дуальных теорий, получаемых из исходных при перестановке пространственных и временных координат, т. е. при произведении двойного виковского поворота [15]. В отличие от релятивистских интегрируемых моделей, возникающие зеркально-дуальные модели оказываются совершенно непохожими на исходные струнные модели [23] (в силу совершенно иных дисперсионных соотношений, состояний рассеяния и связанных состояний, определения физических областей и т. д.).

Наличие параметра деформации вносит новый поворот в соотношения между исходными моделями и их зеркально-дуальными версиями. Мы обнаружили, что в случае, когда исходные (деформированные) струнные модели рассматриваются как непрерывное семейство, параметризованное параметром ϑ , зеркально-дуальная модель, отвечающая струнной модели с параметром ϑ_0 , оказывается в действительности эквивалентной струнной модели с параметром $\pi - \vartheta_0$. Другими словами, струны из этого семейства оказываются эквивалентными зеркальным версиям других струн из того же семейства. Это явление мы называем *зеркальной дуальностью*. В настоящей работе приводятся аргументы в пользу существования такой струнной дуальности, появляющиеся при исследовании (точного) дисперсионного соотношения и теории рассеяния, а также при исследовании квазиклассической теории на мировом листе. В последнем случае в качестве побочного продукта исследования получаются как струнные, так и их зеркально-дуальные решения типа гигантских магнонов, которые подтверждают справедливость дисперсионных соотношений, связывающих соответствующие теории.

Что касается уравнений ТАБ, оказывается, что кроме переопределения Y -функций не происходит никаких качественных изменений по сравнению с недеформированным случаем. Имеется бесконечно много Y -функций, и все они, за исключением Y_+ и Y_- , имеют носители на цилиндре (отрезке $(-\pi, \pi]$), в то время как Y_+ и Y_- имеют носитель на отрезке $(-\vartheta, \vartheta)$. Это обстоятельство отличает деформации с вещественным параметром q от деформаций, в которых q является фазой, так как в последнем случае число Y -функций может быть конечным [20]–[22].

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приводятся необходимые физические свойства q -деформированной S -матрицы. В разделе 3 обсуждается предлагаемая параметризация исследуемой модели. Раздел 4 посвящен изложению зеркальной дуальности в теории рассеяния. В разделе 5 обсуждается зеркальная дуальность сигма-модели в квазиклассическом режиме и находятся решения типа гигантских магнонов. В разделе 6 предлагаются уравнения ТАБ для деформированной модели. Раздел 7 содержит заключение и обсуждение интересных возможностей дальнейших исследований. Необходимые технические детали собраны в приложениях А–Г.

2. S -МАТРИЦА НА МИРОВОМ ЛИСТЕ

Начнем с введения и суммирования необходимых свойств точной S -матрицы на мировом листе деформированной теории.

Как было показано в работе [14], бозонная квазиклассическая двухчастичная S -матрица на мировом листе η -деформированной сигма-модели совпадает с квазиклассическим пределом бозонной составляющей $\mathfrak{psu}_q(2|2)_{\text{c.e.}}^{\oplus 2}$ -инвариантной S -матрицы, построенной как³⁾

$$\mathbf{S}(p_1, p_2) = S_{\text{su}(2)} S \tilde{\otimes} S, \quad (2.1)$$

где S – $\mathfrak{psu}_q(2|2)_{\text{c.e.}}$ -инвариантная S -матрица [13], явный вид которой приводится в приложении A, и

$$S_{\text{su}(2)}(p_1, p_2) = \frac{1}{\sigma^2(p_1, p_2)} \frac{(x_1^+ + \xi x_2^- + \xi)(x_1^- - x_2^+)(1 - 1/x_1^- x_2^+)}{(x_1^- + \xi x_2^+ + \xi)(x_1^+ - x_2^-)(1 - 1/x_1^+ x_2^-)}. \quad (2.2)$$

Одевающая фаза σ представляет собой решение уравнений кроссинга, обсуждаемых в приложении B, что приводит к кроссинг-симметрии полной S -матрицы. Чтобы пояснить смысл параметров $x^{\pm}$ (с нижними индексами, соответствующими номерам частиц) и ξ , напомним, что в указанной картине возмущения мирового листа преобразуются под действием двух копий фундаментальных коротких представлений алгебры $\mathfrak{psu}_q(2|2)_{\text{c.e.}}$. Теперь фундаментальное представление $\mathfrak{psu}_q(2|2)_{\text{c.e.}}$ удобно параметризуется в терминах параметров x^+ и x^- , а условие укорачивания удовлетворяется, если потребовать, чтобы эти параметры удовлетворяли условию связи

$$\frac{1}{q} \left(x^+ + \frac{1}{x^+} + \xi + \frac{1}{\xi} \right) = q \left(x^- + \frac{1}{x^-} + \xi + \frac{1}{\xi} \right), \quad (2.3)$$

в котором ξ и q можно рассматривать как свободные параметры, параметризующие центрально-расширенную квантово-деформированную алгебру. Ниже мы свяжем эти параметры с натяжением струны и параметром деформации струнной фоновой метрики.

Центральные элементы U и V алгебры $\mathfrak{psu}_q(2|2)_{\text{c.e.}}$ в фундаментальном представлении связаны с энергией E и импульсом p возмущений мирового листа так же, как и в случае деформированной фазы [20], а именно:

$$V^2 = q \frac{x^+ x^- + \xi}{x^- x^+ + \xi} \equiv q^E, \quad U^2 = \frac{1}{q} \frac{x^+ + \xi}{x^- + \xi} \equiv e^{ip}. \quad (2.4)$$

Также в алгебре имеется естественная “константа связи” h , связанная с ξ и q соотношением

$$\xi(h, q) = -\frac{i}{2} \frac{h(q - q^{-1})}{\sqrt{1 - (h^2/4)(q - q^{-1})^2}}. \quad (2.5)$$

В терминах h условие укорачивания принимает вид

$$\left(\frac{V - V^{-1}}{q - q^{-1}} \right)^2 - \frac{h^2}{4} (1 - U^2 V^2) (V^{-2} - U^{-2}) = 1, \quad (2.6)$$

эквивалентный условию (2.3) с учетом соотношений (2.4) и $h(\xi, q)$.

³⁾В работе изложение и обозначения следуют обзорной статье [2], посвященной исследованию случая недеформированной струны.

2.1. Квазиклассическое приближение. Как отмечалось в разделе 1, чтобы получить соответствие с S -матрицей на мировом листе деформированной сигма-модели, параметр деформации q должен быть вещественнозначным и он должен быть связан с параметром деформации η и с *эффективным натяжением струны* g соотношением

$$q = e^{-\nu/g}, \quad \nu = \frac{2\eta}{1 + \eta^2}. \quad (2.7)$$

Это эффективное натяжение струны было введено в работе [14] в качестве удобной нормировки действия деформированной сигма-модели, которое тем самым оказывается в согласии с “алгебраической” константой связи h , введенной выше,

$$g = h, \quad (2.8)$$

по крайней мере в квазиклассическом режиме. Следует отметить, что отождествление (2.7) из работы [14], строго говоря, выполняется при всех $\nu \neq 1$, так как предельный переход $\nu \rightarrow 1$ не удастся определить непосредственно. В дальнейшем мы вернемся к обсуждению этого результата. Квазиклассическое дисперсионное соотношение успешно воспроизводится в пределе $g \rightarrow \infty$ с помощью отождествления (2.4), если произвести стандартное масштабное преобразование $p \rightarrow p/g$. Дополнительная проверка этого точного дисперсионного соотношения будет проведена в разделе 5 при построении (зеркально-дуальных) гигантских магнонов. Заметим, что в квазиклассическом приближении имеет место равенство

$$\xi = i \frac{\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}}. \quad (2.9)$$

2.2. Что происходит вне рамок квазиклассического предела? Будем предполагать, что естественное отождествление точной S -матрицы, равно как и энергии и импульса, задаваемое в терминах центральных зарядов формулами (2.4), выдерживается вне рамок квазиклассического предела, хотя при этом следует иметь в виду, что точное отождествление параметра q как функции от g и η неизвестно вне рамок квазиклассического предела, а также то, что соотношения, связывающие g и h , могут потребовать нетривиальной перенормировки⁴⁾. Важное замечание состоит в том, что хотя параметр q и должен быть вещественным для обеспечения унитарности q -деформированной S -матрицы, это условие не является достаточным. На самом деле, если ввести параметризацию

$$q = e^{-a}, \quad (2.10)$$

то S -матрица будет унитарной при

$$0 \leq h^2 \operatorname{sh}^2 a \leq 1, \quad (2.11)$$

и она теряет свойство унитарности при пересечении этой границы. Другими словами, при вещественных q q -деформированная S -матрица унитарна при мнимых ξ ,

⁴⁾Эта возможная нетривиальная зависимость параметра h от g напоминает ситуацию в случае $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ сигма-модели [24], [25]. Важно отметить, однако, что в нашем случае эффект возникает за счет введения параметра деформации η , и он соответственно должен исчезать в пределе $\eta \rightarrow 0$.

но не при вещественных. Интересно отметить, что квазиклассическая формулировка (2.9) в точности покрывает все (положительные) мнимые ξ , поскольку ν изменяется в пределах от нуля до единицы, но отметим также, что точка $\nu = 1$ оказывается специальной, поскольку условие унитарности при этом нарушается при произвольно большом, но конечном параметре g , и эта граница достигается с неправильной стороны в строгом пределе $g \rightarrow \infty$. В рамках предположения, что наша q -деформированная S -матрица на самом деле представляет собой точную S -матрицу деформированной сигма-модели, также оказывается понятно, что квазиклассическое соотношение (2.7) в указанном виде с $g = h$ не может быть выполнено в общем случае, поскольку тогда это соотношение приводило бы к неунитарной S -матрице при малых g . Будем считать, что точные интерполирующие выражения для $q(\eta, g)$ и $h(\eta, g)$ таковы, что такая унитарность сохраняется, но в настоящее время отсутствуют дополнительные связи, которые следует наложить для выполнения этого условия. Например, вполне возможно, что заманчиво простое квазиклассическое соотношение (2.7) выполняется при η и g общего вида, но функциональный вид $h(\eta, g)$ таков, что унитарность при этом тем не менее сохраняется, или, наоборот, что отождествление $h = g$ имеет место так же, как и в недеформированной модели, но квазиклассическое соотношение (2.7) нуждается в корректировке. Например, можно предположить, что

$$a = \operatorname{arcsch} \frac{\nu}{h}, \quad h = g, \quad (2.12)$$

а это есть не что иное, как прямое расширение квазиклассического отождествления параметров ξ и h в терминах соответствующих параметров ν и g . В отсутствие необходимых данных нам приходится рассматривать наиболее общую ситуацию, и потому будем предполагать, что q и h зависят от η и g определенным образом, согласованным с требованием унитарности. Далее мы будем работать в терминах “алгебраических” величин a ($\ln q$) и h (или ξ), которые лучше соответствуют правильным параметрам, задающим исследуемую задачу. Поскольку на квазиклассическом уровне параметр a естественным образом положителен ($0 < q < 1$), будем считать, что это условие остается справедливым в пространстве параметров. Некоторые определения более естественно обращаются для отрицательных a ($q > 1$), что будет отмечаться по мере необходимости. Также естественно уделить основное внимание случаю положительных мнимых ξ , хотя наши определения не чувствительны к знаку ξ , и некоторые концепции более элегантно выражаются, если допустить возможность существования отрицательных мнимых ξ . В разделе 3 будет показано, что эта область значений покрывает все возможные S -матрицы.

3. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ

Фундаментальные укороченные представления алгебры $\mathfrak{psu}_q(2|2)_{\text{с.е.}}$ можно отождествить с точками на торе [20], тем самым унифицируя условие укорачивания на центральные заряды. Вместо того чтобы работать с этим тором, можно также отобразить наиболее общее решение условия укорачивания на цилиндр с разрезами. Поскольку условие унитарности эквивалентно выбору чисто мнимого параметра ξ ,

удобно произвести замену переменных от унитарно-ограниченных h и a к ϑ и a , где

$$\xi = i \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \quad (3.1)$$

что сводится к параметризации

$$h \operatorname{sh} a = \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (3.2)$$

Введем теперь быстроту u с помощью соотношения

$$e^{iu} := -\frac{x + 1/x + \xi + 1/\xi}{\xi - 1/\xi}. \quad (3.3)$$

Эти быстроты принимают значения на цилиндре $\{\operatorname{Re} u \in (-\pi, \pi]\}$. С точностью до инверсии это порождает две канонические x -функции на цилиндре: “струнную” x -функцию

$$x_s(u) = -i \operatorname{cosec} \vartheta \left(e^{iu} - \cos \vartheta - (1 - e^{iu}) \sqrt{\frac{\cos u - \cos \vartheta}{\cos u - 1}} \right) \quad (3.4)$$

и “зеркально-дуальную” x -функцию⁵⁾

$$x_m(u) = -i \operatorname{cosec} \vartheta \left(e^{iu} - \cos \vartheta + (1 + e^{iu}) \sqrt{\frac{\cos u - \cos \vartheta}{\cos u + 1}} \right). \quad (3.5)$$

В этой параметризации из (2.3) получаем

$$x^\pm(u) = x(u \pm ia). \quad (3.6)$$

Эти функции имеют точки ветвления при $\pm\vartheta$ с разрезом для функции x_s , проходящим через начало отсчета и с концами в этих точках, и с разрезом для функции x_m , проходящим через точку π и с концами в этих точках. Эти две функции являются аналитическими продолжениями друг друга при переходах через разрезы, и, в частности, они совпадают в нижней половине комплексной плоскости и имеют противоположные знаки в верхней половине. Как и в недеформированном случае, нам потребуется только один тип x -функций, для того чтобы описать общее решение условия связи (2.3), выбрав пару $\{x^+, x^-\}$, заданную соответствующими условиями $\{x_{s,m}^+, x_{s,m}^-\}$, $\{x_{s,m}^+, 1/x_{s,m}^-\}$, $\{1/x_{s,m}^+, x_{s,m}^-\}$, $\{1/x_{s,m}^+, 1/x_{s,m}^-\}$. Тем не менее обе эти функции имеют смысл в силу их различной структуры разрезов и условий сопряжения

$$[x_s(u)]^* = \frac{x_s(u^*) + \xi}{x_s(u^*)\xi + 1}, \quad [x_m(u)]^* = \frac{x_m(u^*)\xi + 1}{x_m(u^*) + \xi}. \quad (3.7)$$

Отметим также, что изменение знака $\vartheta(\xi)$ просто приводит к изменению знаков x -функций, а изменение знака a просто переставляет местами значения x^+ и x^- . Производя масштабное преобразование $u \rightarrow agu$, отождествляя $\vartheta(a, g)$ с помощью (3.2) и (2.8) и совершая предельный переход $a \rightarrow 0^+$, можно явно соотнести эти функции и их области определений с их недеформированными аналогами со сдвигами аргументов на $\pm i/g$ ⁶⁾. Явные выражения для E и p , задаваемые в (2.4) в терминах u , содержатся в приложении А.

⁵⁾ При $a < 0$ более естественно обозначить обратную к этой функции через x_m .

⁶⁾ Предел $a \rightarrow 0^+$ переменной x_m задает функцию, обратную обычной недеформированной зеркально-дуальной функции, а для переменной x_s такого отличия не наблюдается.

3.1. Свойства точной S -матрицы. В дополнение к условиям (физической) унитарности, эрмитовой аналитичности и удовлетворения уравнению Янга–Бакстера, легко видеть, что на u -цилиндре наша q -деформированная S -матрица должна быть инвариантной при изменении знака $\vartheta(\xi)$ при фиксированном $a(q)^7$:

$$\mathbf{S}(u, v; \vartheta, a) \simeq \mathbf{S}(u, v; -\vartheta, a), \quad (3.8)$$

что следует из инвариантности S -матрицы при перестановке знаков x -функций. В терминах импульсов это соотношение принимает вид

$$\mathbf{S}(p_1, p_2; \vartheta, a) \simeq \mathbf{S}(p_1, p_2; -\vartheta, a). \quad (3.9)$$

Далее, отметив, что при обращении q при фиксированном ϑ происходит эффективная перестановка x^+ и x^- , легко получить, что

$$\mathbf{S}(u, v; \vartheta, a) \simeq \mathbf{S}^{-1}(u, v; \vartheta, -a), \quad (3.10)$$

всюду на струнном и зеркально-дуальном u -цилиндрах⁸. Это свойство может выглядеть немного странным в пределе $q \rightarrow 1$ (в силу наших нормировок для быстрот); заметим, однако, что импульс меняет знак при инверсии q , что позволяет представить это соотношение в виде

$$\mathbf{S}(p_1, p_2; \vartheta, a) \simeq \mathbf{S}^{-1}(-p_1, -p_2; \vartheta, -a). \quad (3.11)$$

Это соотношение в совокупности с (3.9) утверждает, что S -матрица также обращается при обращении q при фиксированном h :

$$\mathbf{S}(p_1, p_2; h, a) \simeq \mathbf{S}^{-1}(-p_1, -p_2; h, -a). \quad (3.12)$$

Эти свойства имеют вид q -деформированных обобщений свойства преобразования четности S -матрицы на мировом листе $AdS_5 \times S^5$ (см., например, [2]), но они не имеют отношения к настоящей четности на мировом листе, поскольку не оставляют q инвариантным. Соответствующее поведение нашей S -матрицы при преобразованиях четности имеет вид

$$\mathbf{S}(-p_1, -p_2; h, a) \simeq (B \otimes B) \mathbf{S}^{-1}(p_1, p_2; h, a) (B \otimes B)^{-1}, \quad (3.13)$$

где $B = A \otimes A$ с $A = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_1)$, а σ_1 – первая матрица Паули⁹. Это показывает, что спектр теории оказывается инвариантным относительно преобразования четности. Соответствующее поведение одевающей фазы при приведенных выше преобразованиях обсуждается в приложении Б.

⁷Все эти утверждения понимаются в смысле унитарной эквивалентности, обсуждаемой в приложении А.

⁸Заметим, что это преобразование включает в себя изменение знака a , а потому и преобразование, требуемое при преобразовании зеркальной симметрии в S -матрице в правой части уравнения. Так как полная S -матрица инвариантна относительно замены $x \rightarrow 1/x$, это обстоятельство не столь уж важно в данном частном аспекте. Тем не менее оно приобретает значение при идентификации зеркального импульса (см. раздел 4), что и оправдывает изменение знака в уравнении и в зеркально-дуальной теории.

⁹Не случайно это преобразование оказывается в точности преобразованием подобия, встречающимся при псевдоунитарности фазово деформированной S -матрицы [20], [22].

3.2. Дисперсионные соотношения. Если имеется выражение для точной S -матрицы на мировом листе, следующий необходимый ингредиент – это дисперсионное соотношение. Чтобы получить дисперсионное соотношение на мировом листе, распространим совместное с квазиклассическим пределом отождествление (2.4) на полную теорию, применив соотношение (2.6), что немедленно приводит к условию связи:

$$\cos^2 \frac{\vartheta}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{a\mathcal{E}}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{p}{2} = \operatorname{sh}^2 \frac{a}{2}, \quad (3.14)$$

или просто

$$\mathcal{E}(p) = \frac{2}{a} \operatorname{arcsch} \sqrt{\sec^2 \frac{\vartheta}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{a}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{p}{2}} \quad (3.15)$$

в случае положительной ветви решения для энергии. Заметим, что это дисперсионное соотношение инвариантно при смене знаков a и ϑ . Оно явно нерелятивистское и не сохраняется при преобразованиях зеркальной симметрии

$$E \rightarrow i\tilde{p}, \quad p \rightarrow i\tilde{E}, \quad (3.16)$$

где $\tilde{p}$ и $\tilde{E}$ – зеркальные образы импульса и энергии соответственно. Тем не менее это дисперсионное соотношение обладает интересными свойствами. А именно, если взять уравнение (3.14) и произвести двойной виковский поворот с одновременным масштабным преобразованием энергии и импульса $\mathcal{E} \rightarrow \pm\mathcal{E}/a$ и $p \rightarrow \pm pa$ (при всех выборах знаков), то дисперсионное соотношение при $\vartheta = \vartheta_0$ в точности совпадет с дисперсионным соотношением в нашей модели при $\vartheta = \vartheta_0 + \pi$ в отсутствие виковского поворота! Это представляет существенный интерес, так как предполагает соотношение между теориями на мировом листе с $\vartheta \in (-\pi/2, \pi/2]$ и зеркальными версиями теорий на мировом листе с $\vartheta \in (-\pi, -\pi/2] \cup (\pi/2, \pi]$ и наоборот. Обсудим это соотношение более подробно.

4. ЗЕРКАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ И ЗЕРКАЛЬНАЯ ДУАЛЬНОСТЬ

Можно параметризовать все вещественные значения импульса и (положительной) энергии, удовлетворяющие приведенным выше деформированным дисперсионным соотношениям (3.15), в терминах вещественных быстрот u , если отождествить x -функцию в соотношениях (2.4) с x_s -функцией (3.4). Налагая требование, что зеркальное преобразование (3.16) приводит к положительным зеркальным энергиям и вещественным импульсам, получим, что для удовлетворения этого условия потребуется аналитическое продолжение¹⁰⁾

$$x_s \rightarrow x_m. \quad (4.1)$$

Подчеркнем, что это зеркальное преобразование связывает модель при заданном значении ϑ с ее зеркальным образом при одном и том же значении ϑ . Получающиеся при этом значения центральных зарядов, обозначаемые через $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$, связаны

¹⁰⁾Это можно обсуждать на униформизованном торе (см. [20] или [21]), опустим здесь большинство технических деталей. Также отметим, что это преобразование включает в себя обращение x_m , если рассматривать случай $a < 0$ в текущей параметризации.

Рис. 1. Зеркальная дуальность для x -функций. Разрезы функции x_s с аргументом ϑ , сдвинутым на π (нижний рисунок), имеют ту же длину, что и для исходной функции x_m (справа). На самом деле соответствующие функции совпадают при сдвиге u (повороте) на π .

с зеркальными энергией и импульсом посредством соотношений (2.4) и зеркального преобразования (3.16), или просто

$$\tilde{V}^2 = q^{i\tilde{p}}, \quad \tilde{U}^2 = e^{-\tilde{E}}. \quad (4.2)$$

Мы видели, что на уровне дисперсионного соотношения (условия укорачивания) сдвиг ϑ на π некоторым образом связан с преобразованием зеркальной симметрии. На самом деле тот же самый сдвиг u на этом уровне эквивалентен зеркальному преобразованию! Это проиллюстрировано на рис. 1.

Явно получаем¹¹⁾

$$x_s(u + \pi)|_{\vartheta=\vartheta_0+\pi} = x_m(u)|_{\vartheta=\vartheta_0} \quad (4.3)$$

всюду на цилиндре с разрезами. Так как эти сдвиги будут часто использоваться, введем обозначения

$$f(\{u\})|_{\tilde{\vartheta}_0} \equiv f(\{u + \pi\})|_{\vartheta=\vartheta_0+\pi}, \quad f(\{u\})|_{\vartheta_0} \equiv f(\{u\})|_{\vartheta=\vartheta_0}. \quad (4.4)$$

Заметим, что при этом преобразовании “дуальности” $\xi \rightarrow 1/\xi$ получаются следующие отождествления:

$$e^{ip} = U^2 \rightarrow \tilde{V}^2 = q^{i\tilde{p}}, \quad q^E = V^2 \rightarrow \tilde{U}^2 = e^{-\tilde{E}}, \quad (4.5)$$

¹¹⁾В согласии с рис. 1 заметим, что так как введенные быстроты представляют собой периодические переменные, то точки ветвления $\pm\vartheta$ эквивалентны (или “дуальны”) точкам ветвления $\pm(\vartheta + \pi)$, и только выбранный способ проведения разреза через начало координат или через точку π различает струнную и зеркально-дуальную x -функции. При сдвиге быстроты на π разрезы струнного и зеркально-дуального решений совпадут с разрезами соответствующих зеркально-дуальной и струнной функций, взятых при дуальном значении ϑ . Все остальное представляет собой игру нормировок.

которые явно вытекают из условия укорачивания, переписанного в виде

$$q^2 \frac{x^+ x^- + \xi x^- + 1/\xi}{x^- x^+ + \xi x^+ + 1/\xi} = 1. \quad (4.6)$$

Другими словами, получаем

$$aE(u)|_{\tilde{\vartheta}_0} = \tilde{E}(u)|_{\vartheta_0}, \quad \text{в то время как} \quad p(u)|_{\tilde{\vartheta}_0} = -a\tilde{p}(u)|_{\vartheta_0}. \quad (4.7)$$

Ниже мы увидим, что знак “минус” в соотношении между импульсами окажется важен. Прежде чем продолжить вычисления, заметим, что оба преобразования четности $p \rightarrow -p$ и $\tilde{p} \rightarrow -\tilde{p}$ отвечают преобразованию $u \rightarrow -u$ с x -функциями, удовлетворяющими соотношениям

$$x_s(-u) = -\frac{x_s(u) + \xi}{x_s(u)\xi + 1}, \quad x_m(-u) = -\frac{x_m(u)\xi + 1}{x_m(u) + \xi}. \quad (4.8)$$

Переход от дисперсионных соотношений к теории рассеяния несколько более сложен, но тоже может быть проделан в явном виде.

4.1. Зеркальная дуальность теории рассеяния. Чтобы понять, как связать теорию рассеяния дуализированной струнной теории с теорией рассеяния зеркально-дуальной теории, нужно рассмотреть соответствующие этим теориям структуры связанных состояний. Как хорошо известно из исследований недеформированного случая, полюс связанного состояния струнной S -матрицы в бозонном канале (формально) отвечает нулю в фермионном канале и наоборот. Отсюда вытекает, что при зеркальной дуальности необходимо, чтобы бозонные нули и полюсы переходили соответственно в фермионные полюсы и нули. Поскольку нули и полюсы в этом контексте переходят друг в друга при изменении знака импульса (см. (4.7)), наиболее простой способ реализовать такую зеркальную дуальность между струнной и зеркально-дуальной S -матрицами состоит в том, чтобы изменить знак импульса, заменив одновременно бозоны на фермионы и наоборот. В самом деле, с учетом градуировки¹²⁾ это в точности то, что и происходит, именно:

$$(D \tilde{\otimes} D)S(p_1, p_2)(\hat{D} \tilde{\otimes} \hat{D})|_{\tilde{\vartheta}_0} = \tilde{S}(-\tilde{p}_1, -\tilde{p}_2)|_{\vartheta_0}, \quad (4.9)$$

где $D = (-1)^F M \otimes M$ и $\hat{D} = M \otimes (-1)^F M$, F – оператор числа фермионов в $\mathbb{C}^{2|2}$, а M – матричное представление перестановки (3412) в базисе $\mathbb{C}^{2|2}$. Можно получить уравнение (4.9) следующим образом. Сначала отметим, что матричная составляющая S -матрицы просто меняет знаки своих импульсных аргументов при действии D с точностью до фермионной амплитуды рассеяния a_3 , приведенной в приложении А, т. е.

$$DS(p_1, p_2)\hat{D} = a_3(p_1, p_2)S(-p_1, -p_2). \quad (4.10)$$

¹²⁾См., например, раздел 3.1.2 работы [2]. На уровне градуированной S -матрицы получается преобразование подобия с помощью градуированного тензорного произведения величин M .

Остается сравнить скалярные множители. Напомним, что

$$S_{\text{su}(2)}(p_1, p_2) = \frac{1}{\sigma^2(p_1, p_2)} \frac{(x_1^+ + \xi)(x_2^- + \xi)(x_1^- - x_2^+)(1 - 1/x_1^- x_2^+)}{(x_1^- + \xi)(x_2^+ + \xi)(x_1^+ - x_2^-)(1 - 1/x_1^+ x_2^-)}, \quad (4.11)$$

и введем естественный зеркальный скалярный множитель

$$S_{\text{sl}(2)}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{1}{\Sigma^2(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)} \frac{(x_1^- x_2^+)(x_1^+ + \xi)(x_2^- + \xi)(x_1^+ - x_2^-)(1 - 1/x_1^+ x_2^-)}{(x_1^+ x_2^- x_1^- + \xi)(x_2^+ + \xi)(x_1^- - x_2^+)(1 - 1/x_1^- x_2^+)}, \quad (4.12)$$

где

$$\Sigma(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \equiv \frac{1 - 1/x_1^+ x_2^-}{1 - 1/x_1^- x_2^+} \sigma(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \quad (4.13)$$

– скорректированная зеркальная одевающая фаза. Будем всегда отмечать аналитическое продолжение к зеркальной теории, указывая явную зависимость от $\tilde{p}$. Формально $S_{\text{sl}(2)}$ есть просто бозонная скалярная амплитуда рассеяния $S_{\text{su}(2)}$, умноженная на фермионную матричную амплитуду рассеяния $(a_3)^2$. Теперь уравнение (4.9) следует из двух копий уравнения (4.10), умноженных на $S_{\text{su}(2)}$, если выполнено условие

$$a_3^2(p_1, p_2) S_{\text{su}(2)}(p_1, p_2)|_{\tilde{\vartheta}_0} = S_{\text{su}(2)}(-\tilde{p}_1, -\tilde{p}_2)|_{\vartheta_0}, \quad (4.14)$$

или в терминах естественных величин

$$S_{\text{su}(2)}(p_1, p_2)|_{\tilde{\vartheta}_0} = S_{\text{sl}(2)}(-\tilde{p}_1, -\tilde{p}_2)|_{\vartheta_0}. \quad (4.15)$$

Сравнивая выражения (4.11) и (4.12), с учетом (4.6) и (4.8) и того факта, что ξ обращается при $\vartheta + \pi$, можно явно видеть, что это свойство выполняется, если факторизовать соответствующие одевающие фазы:

$$\sigma^2(p_i, p_j) S_{\text{su}(2)}(p_i, p_j)|_{\tilde{\vartheta}_0} = \Sigma^2(-\tilde{p}_i, -\tilde{p}_j) S_{\text{sl}(2)}(-\tilde{p}_i, -\tilde{p}_j)|_{\vartheta_0}. \quad (4.16)$$

Наиболее нетривиальным оказывается утверждение, что

$$\sigma(p_i, p_j)|_{\tilde{\vartheta}_0} = \Sigma(-\tilde{p}_i, -\tilde{p}_j)|_{\vartheta_0}, \quad (4.17)$$

которое справедливо внутри так называемой физической полосы $-ia < \text{Im } u < ia$, что легко проверить численно. Вне этой области немедленного согласия не достигается, поскольку структура разрезов этих двух объектов дополнительна по построению в силу сдвига u на π при преобразовании дуальности (на торе это сдвиг на четверть вещественного периода), и все это требует аналитического продолжения. Соответственно уравнения кроссинга оказываются совместными, если понимать их с дуальными кроссинг-преобразованиями, произведенными в противоположных направлениях на торе.

В приведенных выше рассуждениях изменение знаков импульсов могло бы заменить взятие обратных S -матриц (ср. с (3.13)), но, как представляется, это может исказить физическую картину. Разумеется, наши утверждения о зеркальной дуальности непосредственно переносятся на случай диагональных матриц.

4.2. Зеркальная дуальность уравнений Бете–Янга. Приведем уравнения Бете–Янга для деформированной струнной теории [20], [21]:

$$1 = e^{ip_i J} \prod_{i \neq k}^{K^I} S_{\text{su}(2)}(p_i, p_k) \prod_{\alpha=l, r} \prod_{i=1}^{K_{\alpha}^{II}} \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{y_i^{(\alpha)} - x_k^+}{y_i^{(\alpha)} - x_k^-} \sqrt{\frac{x_k^+}{x_k^-}}, \quad (4.18)$$

где $S_{\text{su}(2)}(p_1, p_2)$ определено в (2.2), а также набор вспомогательных уравнений Бете для каждого α :

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{i=1}^{K^I} \sqrt{q} \frac{y_k - x_i^-}{y_k - x_i^+} \sqrt{\frac{x_i^+}{x_i^-}} \prod_{i=1}^{K^{III}} \frac{\sin[(\nu_k - w_i - ia)/2]}{\sin[(\nu_k - w_i + ia)/2]}, \\ -1 &= \prod_{i=1}^{K^{II}} \frac{\sin[(w_k - \nu_i + ia)/2]}{\sin[(w_k - \nu_i - ia)/2]} \prod_{j=1}^{K^{III}} \frac{\sin[(w_k - w_j - 2ia)/2]}{\sin[(w_k - w_j + 2ia)/2]}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Эти уравнения получаются стандартным образом с помощью диагонализации трансфер-матрицы с применением (алгебраического) анзаца Бете, которая в данном случае была проведена относительно бозонного основного состояния. Здесь K^I – число возмущений мирового листа, а полный набор индексов возмущенных частиц связан напрямую с набором глобальных зарядов нашей струны, как описано в приложении А. Как обычно, переменная y связана с ν таким же образом, как переменная x связана с u в соотношении (3.3), а потому можно выбрать $y = (x_s(\nu))^{\pm 1}$ до тех пор, пока мы позволяем рассматривать обе возможности. Инвариантность относительно преобразования четности приведенных выше уравнений следует из соотношений (4.8), так что полный набор уравнений Бете–Янга меняет знак при изменении знака всех быстрот (включая ν и w).

При дуализации ожидается, что эти уравнения будут эквивалентны зеркальным уравнениям Бете–Янга

$$1 = e^{i\tilde{p}_i R} \prod_{i \neq k}^{\tilde{K}^I} S_{\text{sl}(2)}(\tilde{p}_i, \tilde{p}_k) \prod_{\alpha=l, r} \prod_{i=1}^{\tilde{K}_{\alpha}^{II}} \sqrt{q} \frac{y_i^{(\alpha)} - x_k^-}{y_i^{(\alpha)} - x_k^+} \sqrt{\frac{x_k^+}{x_k^-}}, \quad (4.20)$$

где вспомогательные уравнения Бете имеют формально такой же вид, что и уравнения (4.19), но с фермионными номерами возмущенных состояний $\tilde{K}$. Это эквивалентно бозонному случаю, за исключением того, что

$$K^{II} = \tilde{K}^I - \tilde{K}^{II} + 2\tilde{K}^{III}. \quad (4.21)$$

Чтобы увидеть, что уравнения Бете–Янга дуальны друг другу, отметим сначала, что преобразования дуальности (4.4) формально оставляют вспомогательные уравнения инвариантными (при сдвиге аргументов ν и w на π и отождествлении y с помощью $(x_m(\nu)|_{\vartheta_0})^{\pm 1}$ вместо $(x_s(\nu)|_{\tilde{\vartheta}_0})^{\pm 1}$). Чтобы установить соответствие на уровне индивидуальных состояний, нам необходимо отождествить

$$\{K\} = \{\tilde{K}\} \quad (4.22)$$

с помощью зеркальной дуальности, что оказывается не чем иным, как действием оператора D на языке диагонализированных величин. Далее, в силу уравнения (4.15) дуализация в точности переводит члены рассеяния в уравнениях (4.18) в обратные им в уравнениях (4.20) (с учетом преобразования четности (4.22)). Вместе с уравнением (4.7) для соотношения дуальности между импульсами и при учете отождествления зарядов (чисел возбуждений) это наблюдение позволяет нам заключить, что дуализированные уравнения Бете для струны оказываются не чем иным, как обратными уравнениями Бете–Янга для зеркальной теории при $\vartheta = \vartheta_0$ и указанном выше отождествлении

$$R = aJ. \quad (4.23)$$

Подчеркнем, что соотношение между импульсами в (4.7) принимается в расчет с помощью масштабирования параметра длины; само отождествление импульсов производится без проведения преобразования подобия. Если теперь учесть масштабирование энергии в (4.7), то мы придем также и к явному совпадению спектров энергий указанных теорий. Это наглядно демонстрирует, что наши струнные теории при $\vartheta = \vartheta_0 + \pi$ и их зеркально-дуальные версии при $\vartheta = \vartheta_0$ удовлетворяют идентичным дисперсионным соотношениям и свойствам рассеяния при каждом выбранном a ; тем самым они представляют собой одну и ту же теорию. Отождествление длин (4.23) будет рассмотрено ниже.

Следует сделать замечание относительно пространства физических параметров. Ранее мы показали, что (квазиклассическая) сигма-модель параметризуется положительными мнимыми ξ . Вышеприведенное преобразование дуальности может вывести ξ за пределы указанной области. Чтобы вернуться назад в эту область, можно скомбинировать преобразование (4.4) с преобразованием изменения знака $\xi \rightarrow -\xi$, оставляющим модель инвариантной (ср. уравнение (3.9)). Зеркальная дуальность при этом связывает теории при ϑ и $\pi - \vartheta$. Зеркальная дуальность такого вида может привести к появлению “некрасивого” (несущественного) отрицательного знака в соотношениях дуальности (4.3), но такой подход является более правильным при непосредственном рассмотрении теории сигма-моделей.

Также важно отметить, что с точки зрения зеркальной дуальности имеются три выделенных модели: недеформированная струна при $\vartheta = 0$, самодуальная модель при $\vartheta = \pi/2$ и “максимально” деформированная модель при $\vartheta = \pi$. Однако последняя пока еще не определена должным образом для сигма-модели. Это связано с тем обстоятельством, что при постановке задачи получения осмысленных представлений (конечных $x^\pm$) в пределах $\vartheta \rightarrow 0$ и $\vartheta \rightarrow \pi$ необходимо одновременно произвести предельный переход $q \rightarrow 1$ ($a \rightarrow 0$). При $\vartheta \rightarrow 0$ это непосредственно приводит к недеформированной модели, как показано в абзаце ниже формулы (3.7). При $\vartheta \rightarrow \pi$ такой осмысленный предельный переход можно произвести на уровне x -функций. Выбирая $x_s(uga)$ с $\vartheta = 2 \arccos g \operatorname{sh} a$ (вместо выражения (3.2)), в пределе $a \rightarrow 0$ получаем недеформированную функцию x_m . Чтобы получить осмысленный центральный заряд, необходимо масштабировать энергию и импульс на величину a (ср. с (4.7)). Таким образом, интегрируемая модель при $\vartheta = \pi$ оказывается в точности недеформированной $AdS_5 \times S^5$ зеркально-дуальной моделью. Но такой предельный переход, очевидно, сингулярен в свете масштабного преобразования длины (4.23) и с учетом масштабирования энергии, необходимого для приведения спектров теорий в соответствие друг с другом. Это наглядно показывает, что без привлечения дальнейших переопределений полей предельный переход

Рис. 2. Зеркальная дуальность деформированной струны в калибровке светового конуса. Зеркальная дуальность утверждает, что деформированные струнные теории (нижняя линия), занумерованные параметром ϑ , эквивалентны версиям тех же струнных теорий при $\pi - \vartheta$, подвергнутых двойному виковскому повороту. Эта эквивалентность, в частности, выделяет специальные случаи при $\vartheta = 0, \pi/2$ и π , заслуживающие отдельного исследования.

$\vartheta \rightarrow \pi$ сигма-модели оказывается сингулярным, и его невозможно напрямую связать с конечной зеркально-дуальной моделью в пространстве $AdS_5 \times S^5$. Тем не менее, поскольку все-таки остается возможность получить осмысленную недеформированную зеркально-дуальную модель из объемлющего подхода интегрируемой модели в пределе $\vartheta \rightarrow \pi$, интересно исследовать, до какого уровня можно распространить наше описание на теорию сигма-моделей. В общем случае зеркальная дуальность интегрируемой теории переходит в физическую эквивалентность, проиллюстрированную на рис. 2. Проверим теперь эти утверждения на уровне сигма-модели.

5. ЗЕРКАЛЬНАЯ ДУАЛЬНОСТЬ СИГМА-МОДЕЛИ

Построение зеркальной дуальности в явном виде для полной квантовой сигма-модели на световом конусе на сегодняшний день остается недостижимым. Тем не менее можно привести аргументы в пользу наличия зеркальной дуальности в сигма-модели в квазиклассическом пределе. На этом пути собираем необходимые ингредиенты, чтобы рассмотреть решения типа гигантских магнонов над нашим η -деформированным фоновым полем, которые затем применяются при проверке выполнения дисперсионных соотношений в струнной и зеркально-дуальной теориях.

Напомним, что в пределе больших g величина ξ стремится к $i\nu/\sqrt{1-\nu^2} \equiv i\kappa$, так что в квазиклассическом пределе преобразование дуальности $\xi \rightarrow -1/\xi$ эквивалентно отображению $\kappa \rightarrow 1/\kappa$. Поскольку на квазиклассическом уровне $a = -\kappa/g\sqrt{1+\kappa^2}$ и этот параметр должен оставаться фиксированным при зеркальной

дуальности, необходимо одновременно произвести масштабирование $g \rightarrow g/\varkappa$. Коротко говоря, в квазиклассическом пределе преобразование дуальности для двух независимых параметров сигма-модели сводится к преобразованию¹³⁾

$$\varkappa \rightarrow \frac{1}{\varkappa}, \quad g \rightarrow \frac{g}{\varkappa}. \quad (5.1)$$

Если вернуться к предшествующему обсуждению, это преобразование исходных параметров струнной сигма-модели должно быть эквивалентно двойному виковскому повороту координат мирового листа

$$\tau \rightarrow i\tilde{\sigma}, \quad \sigma \rightarrow -i\tilde{\tau}, \quad (5.2)$$

которое связывает между собой исходную и зеркально-дуальную теории.

Для исследования преобразований дуальности в подходе мирового листа зафиксируем однородную калибровку светового конуса, зависящую от вспомогательного параметра a_g , и найдем соответствующее действие в фиксированной калибровке. Вычисления приводятся в приложении В. Как и в недеформированном случае, действие в фиксированной калибровке имеет наиболее простой вид в случае $a_g = 1$, в котором мы получаем

$$S = \int d\tau d\sigma \left[-1 + \sqrt{\frac{G_{\phi\phi}}{G_{tt}}} \mathcal{X} + \dot{x}^\mu x'^\nu B_{\mu\nu} \right], \quad (5.3)$$

где

$$\mathcal{X} = 1 + G_{\mu\nu} \left(\frac{1}{G_{\phi\phi}} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - G_{tt} x'^\mu x'^\nu \right) - \frac{G_{tt}}{G_{\phi\phi}} (G_{\mu\nu} G_{\tau\sigma} - G_{\mu\tau} G_{\nu\sigma}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu x'^\tau x'^\sigma, \quad (5.4)$$

а x^μ , $\mu = 1, \dots, 8$, суть восемь поперечных физических полей, параметризующих η -деформированное фоновое поле. Компоненты метрики, равно как и член Веса–Зумино (поле B), входящие в (5.3) и (5.4), приводятся в приложении В. Действие (5.3) имеет довольно громоздкий вид ввиду сложности метрики. Поэтому ограничим рассмотрение согласованными редукциями выражения (5.3), которые задаются выключением всех полей, за исключением одного, или на деформированной сфере, или на деформированном пространстве AdS . В дальнейшем соответствующие редуцированные действия будут применяться при построении решений типа гигантских магнонов.

В общем случае получаем, что компоненты метрики на сфере G_{ii}^s имеют различный вид при разных i (ср. приложение В). Тем не менее явные вычисления показывают, что компонента G_{ii}^s получается одной и той же при всех i , если рассматривается теория при фиксированном параметре i и при выключении всех полей на сфере и пространстве AdS , кроме y^i . Это наглядно показывает существование единственного гигантского магнона. Такая же ситуация возникает в AdS -составляющей объемлющего пространства; вид компоненты метрики AdS G_{ii}^a не зависит от индекса i , если оставить ненулевым только одно поле z^i пространства AdS .

¹³⁾Заметим, что точка самодуальности $\vartheta = \pi/2$ на квазиклассическом уровне соответствует $\varkappa = 1$, что оставляет параметр g инвариантным.

Если только одно поле, например y^1 , остается ненулевым на сфере, после преобразования переменных $y = y^1/(1 + (y^1)^2/4)$ получим, что действие (5.3) сведется к следующему виду:

$$S^s[g, \varkappa] = g \int d\tau d\sigma \left[-1 + \sqrt{\frac{(1 + \varkappa^2 y^2) \dot{y}^2 - (1 + \varkappa^2)(1 - y^2) y'^2 + (1 - y^2)^2 (1 + \varkappa^2 y^2)}{(1 - y^2)(1 + \varkappa^2 y^2)^2}} \right]. \quad (5.5)$$

Если, наоборот, выбрать неисчезающим поле z^1 и применить переменную $z = z^1/(1 - (z^1)^2/4)$, то получим

$$S^a[g, \varkappa] = g \int d\tau d\sigma \left[-1 + \sqrt{\frac{(1 - \varkappa^2 z^2) \dot{z}^2 - (1 + \varkappa^2)(1 + z^2) z'^2 + (1 + z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)^2}{(1 + z^2)^2 (1 - \varkappa^2 z^2)}} \right]. \quad (5.6)$$

Из теории недеформированной струны известно, что решения типа гигантских магнонов в зеркально-дуальной теории обязаны своим существованием AdS-составляющей соответствующего действия [23]. С учетом этого применим преобразование двойного виковского поворота (5.2) к действию (5.6) и получим следующее действие зеркально-дуальной теории:

$$\tilde{S}^a[g, \varkappa] = g \int d\tilde{\tau} d\tilde{\sigma} \left[-1 + \sqrt{\frac{(1 + \varkappa^2)(1 + z^2) \dot{z}^2 - (1 - \varkappa^2 z^2) z'^2 + (1 + z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)^2}{(1 + z^2)^2 (1 - \varkappa^2 z^2)}} \right]. \quad (5.7)$$

Теперь мы можем сравнить действия (5.5) и (5.7). Для этого сначала применим преобразование дуальности (5.1) к действию (5.5), получим

$$S^s\left[\frac{g}{\varkappa}, \frac{1}{\varkappa}\right] = \frac{g}{\varkappa} \int d\tau d\sigma \left[-1 + \sqrt{\frac{(1 + \varkappa^{-2} y^2) \dot{y}^2 - (1 + \varkappa^{-2})(1 - y^2) y'^2 + (1 - y^2)^2 (1 + \varkappa^{-2} y^2)}{(1 - y^2)(1 + \varkappa^{-2} y^2)^2}} \right]. \quad (5.8)$$

Производя теперь полевое преобразование подобия $y = \varkappa u$ и совершая замену переменных

$$\tau \rightarrow \frac{\varkappa}{\sqrt{1 + \varkappa^2}} \tilde{\tau}, \quad \sigma \rightarrow \sqrt{1 + \varkappa^2} \tilde{\sigma}, \quad (5.9)$$

получим следующее выражение:

$$S^s\left[\frac{g}{\varkappa}, \frac{1}{\varkappa}\right] = \tilde{S}^a[g, \varkappa], \quad (5.10)$$

если при этом также происходит отождествление поля u с полем z . Точно такое же соотношение справедливо и для однополевых действий S^a и $\tilde{S}^s$. Заметим, что перестановка действий на сфере и на пространстве AdS при преобразовании зеркальной

дуальности на уровне анзаца Бете в точности отвечает переходу от градуировки “ $\mathfrak{su}(2)$ ” к градуировке “ $\mathfrak{sl}(2)$ ”. Чтобы соотнести преобразования подобия (5.9) с соответствующими преобразованиями подобия энергии и длины (4.7) и (4.23), заметим, что зеркальное преобразование времени, согласованное с интегрируемой моделью, оказывается $g\tilde{\tau}$, а не $\tilde{\tau}$, и во втором случае пространственный размер струны равен J/g . Так что этот размер был явно подвергнут масштабному преобразованию (ср. с (П.36)), которое приводит к возникновению масштабного множителя $\varkappa/g$ после дуализации. Исследуя эти редуцированные действия, получим, что в общем случае должно иметь место соотношение

$$S\left[\frac{g}{\varkappa}, \frac{1}{\varkappa}\right] = \tilde{S}[g, \varkappa], \quad (5.11)$$

которое отражает наличие струнной дуальности в квазиклассическом режиме. Доказательство этого утверждения в полной модели остается интересной открытой задачей. Нетривиальность состоит в нахождении подходящих переопределений полей, которые позволили бы отождествить дуализированное действие с зеркально отображенным. Применим теперь эти редуцированные действия для построения решений типа гигантских магнонов как в исходной, так и в зеркально-дуальной теориях.

5.1. Гигантский магнон. Чтобы найти решение типа гигантского магнона [26], рассмотрим действие (5.5) и подставим в него солитонный анзац

$$y = Q(\sigma - v\tau),$$

где v – скорость солитона. Это задает редуцированный лагранжиан L_{red} одномерной системы, в которой y' играет роль скорости частицы. Соответствующий сопряженный импульс имеет вид $\pi = \partial L / \partial y'$. Редуцированный гамильтониан записывается в виде

$$H_{\text{red}} = \pi y' - L_{\text{red}}. \quad (5.12)$$

Фиксация уровня $H_{\text{red}} = 0$, отвечающая движению в бесконечном объеме, приводит к дифференциальному уравнению

$$Q' = \frac{\sqrt{1 + \varkappa^2 Q(1 - Q^2)}}{\sqrt{1 - v^2 + \varkappa^2 - (1 + (1 + v^2)\varkappa^2)Q^2}}, \quad (5.13)$$

определяющему профиль солитона. Будем предполагать, что $|v| < 1$ и что движение происходит между двумя точками поворота

$$0 < Q < Q_{\text{max}}, \quad Q_{\text{max}} = \sqrt{\frac{1 + \varkappa^2 - v^2}{1 + \varkappa^2 + \varkappa^2 v^2}} < 1.$$

Плотность импульса на мировом листе имеет вид $\mathbf{p} = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{y}$, и на солитонном решении она сводится к выражению

$$p_y = -\frac{\sqrt{1 + \varkappa^2} Q v}{(1 - Q^2) \sqrt{1 - v^2 + \varkappa^2 - (1 + (1 + v^2)\varkappa^2)Q^2}}. \quad (5.14)$$

Это соотношение задает полный импульс на мировом листе:

$$p = -2 \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma p_y y' = 2 \int_0^{Q_{\max}} dQ |p_y| = 2 \operatorname{arctg} \frac{v\sqrt{1+\kappa^2}}{\sqrt{1+\kappa^2-v^2}}. \quad (5.15)$$

Получим энергию солитона с помощью интегрирования гамильтоновой плотности: $\mathcal{H} = p_y \dot{y} - \mathcal{L}$; в результате получаем

$$E = g \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \mathcal{H} = 2g \int_0^{Q_{\max}} dQ \frac{\mathcal{H}}{|Q'|} = \frac{2g\sqrt{1+\kappa^2}}{\kappa} \operatorname{arctg} \frac{\kappa\sqrt{1+\kappa^2-v^2}}{1+\kappa^2}. \quad (5.16)$$

Разрешая это уравнение для v в терминах p и подставляя ответ в выражение для энергии, получаем

$$E = \frac{2g\sqrt{1+\kappa^2}}{\kappa} \operatorname{arcsch} \left| \kappa \sin \frac{p}{2} \right| = \frac{2g}{\nu} \operatorname{arcsch} \frac{\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} \left| \sin \frac{p}{2} \right|, \quad (5.17)$$

что в точности дает дисперсионное соотношение (3.15) в пределе больших g .

5.2. Зеркально-дуальный гигантский магнон. Чтобы построить зеркально-дуальный гигантский магнон, повторим приведенное выше вычисление, начиная теперь с действия (5.7) и анзаца

$$z = Q(\sigma - v\tau).$$

В этом случае дифференциальное уравнение солитонного профиля, отвечающего нулевому уровню энергии редуцированного гамильтониана, имеет вид

$$Q' = \frac{\sqrt{1+\kappa^2} Q(1-\kappa^2 Q^2)}{\sqrt{1-v^2(1+\kappa^2) - (\kappa^2 + (1+\kappa^2)v^2)Q^2}}. \quad (5.18)$$

Движение происходит между двумя точками поворота

$$0 < Q < Q_{\max}, \quad Q_{\max} = \sqrt{\frac{1-(1+\kappa^2)v^2}{\kappa^2 + (1+\kappa^2)v^2}} < \frac{1}{\kappa}.$$

Полный импульс зеркально-дуального солитона на мировом листе имеет вид

$$\tilde{p} = \frac{2\sqrt{1+\kappa^2}}{\kappa} \operatorname{arctg} \left(\frac{\kappa\sqrt{1-(1+\kappa^2)v^2}}{v(1+\kappa^2)} \right), \quad (5.19)$$

а для энергии получим выражение

$$\tilde{E} = 2g \operatorname{arcsch} \sqrt{\frac{1-(1+\kappa^2)v^2}{\kappa^2 + (1+\kappa^2)v^2}}. \quad (5.20)$$

Выразив $\tilde{E}$ в терминах $\tilde{p}$, получим

$$\tilde{E} = 2g \operatorname{arcsch} \left| \frac{1}{\kappa} \sin \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}} \frac{\tilde{p}}{2} \right| = 2g \operatorname{arcsch} \left| \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\nu} \sin \frac{\nu \tilde{p}}{2} \right|. \quad (5.21)$$

При масштабном преобразовании $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\tau}/g$ это дисперсионное соотношение совпадает с пределом больших g для зеркально-дуальной версии соотношения (3.15) (при фиксированном $\tilde{p}/g$, аналогично недеформированному случаю, рассмотренному в работе [23]).

6. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНЗАЦ БЕТЕ

Как и в недеформированном случае, основное состояние деформированной струнной теории, имеющее конечный размер, можно получить из свободных энергий зеркально-дуальных моделей, и эти свободные энергии можно вычислить, применяя ТАБ. Если придерживаться струнной гипотезы, то вывод соответствующих уравнений ТАБ представляет собой процедуру из учебника (см., например, [27]). Как можно ожидать, опираясь на опыт теории представлений, в данном случае струнная гипотеза не претерпевает никаких качественных изменений при переходе от $AdS_5 \times S^5$ -зеркальной модели к рассматриваемой зеркальной модели с вещественным параметром q -деформации. В таком аспекте наша струнная гипотеза будет идентична гипотезе для $AdS_5 \times S^5$ -суперструны [16], конечно, с точностью до выбора параметризации. Вследствие этого уравнения ТАБ также качественно совпадут с уравнениями ТАБ недеформированной струны [17]–[19]. При этом очень просто объяснить изменение параметризации: частицы всех типов, размещавшиеся на прямой вещественных быстрот, теперь попадут в интервал $(-\pi, \pi]$ вещественных быстрот, а y -частицы, находившиеся на отрезке между точками ветвления ± 2 недеформированных x -функций, теперь будут размещаться между точками ветвления $\pm \vartheta$ наших x -функций¹⁴). На уровне упрощенных уравнений ТАБ [28] деформацию можно (почти полностью) произвести в особенно простом виде. Деформация при этом сводится к взятию сверток:

$$\begin{aligned} f \star h(u, v) &= \int_{-\pi}^{\pi} dt f(u, t) h(t, v), \\ f \hat{\star} h(u, v) &= \int_{-\vartheta}^{\vartheta} dt f(u, t) h(t, v), \\ f \check{\star} h(u, v) &= \int_{-\pi}^{-\vartheta} dt f(u, t) h(t, v) + \int_{\vartheta}^{\pi} dt f(u, t) h(t, v), \end{aligned} \quad (6.1)$$

если заметить, что все Y -функции теперь определены на u -цилиндре (с разрезами), и произвести замену стандартного ядра $s(u) = (4 \operatorname{ch}(\pi u/2))^{-1}$ на его аналог, обладающий свойством двойной периодичности:

$$s(u) \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{u + 2\pi n}{a}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4a \operatorname{ch}(\pi(u + 2\pi n)/2a)} \equiv \mathbf{s}(u). \quad (6.2)$$

¹⁴) Это последнее обстоятельство вытекает из обычных рассуждений, использующих свойство сопряжения x_m , если параметризовать получаемые при этом разрешенные значения y (а именно те, которые удовлетворяют соотношению $|y|^2 - 1 = (y - y^*)\xi$) и подставить их в определение быстроты (см. (3.3)). См. также обсуждение результатов, вытекающих из уравнений (П.17)–(П.21).

Разумеется, $\mathbf{s}$ – это просто подходящим образом нормированная эллиптическая функция Якоби dn :

$$\mathbf{s}(u) = \frac{K(m')}{2\pi a} \operatorname{dn}(u), \quad (6.3)$$

с вещественным периодом 2π и мнимым периодом $4a$, где $K(m')$ – эллиптический интеграл с соответствующим дополнительным эллиптическим модулем¹⁵⁾.

6.1. Уравнения. Энергии основных состояний деформированных струн задаются формулой

$$E(J) = - \int_{-\pi}^{\pi} du \sum_Q \frac{1}{2\pi} \frac{d\tilde{p}^Q}{du} \ln(1 + Y_Q), \quad (6.4)$$

где $\tilde{p}^Q$ – импульс зеркального связанного состояния Q -частицы, определенный в приложении Г вместе с другими ядрами, используемыми в следующих ниже формулах, а Y -функции Y_Q суть решения упрощенных уравнений ТАБ:

$$\begin{aligned} \ln Y_Q &= \ln Y_{Q+1} Y_{Q-1} \star \mathbf{s} + \ln \left(1 + \frac{1}{Y_{Q-1|vw}^{(1)}} \right) \left(1 + \frac{1}{Y_{Q-1|vw}^{(2)}} \right) - \\ &\quad - \ln(1 + Y_{Q-1})(1 + Y_{Q+1}) \star \mathbf{s} \end{aligned} \quad (6.5)$$

при $Q > 1$, в то время как при $Q = 1$ имеем

$$\ln Y_1 = \sum_a \ln \left(1 - \frac{1}{Y_{-}^{(\alpha)}} \right) \hat{\star} \mathbf{s} - \ln \left(1 + \frac{1}{Y_2} \right) \star \mathbf{s} - \check{\Delta} \star \mathbf{s}, \quad (6.6)$$

где

$$\begin{aligned} \check{\Delta} &= L\check{\mathcal{E}} + \sum_a \ln \left(1 - \frac{1}{Y_{-}^{(\alpha)}} \right) \left(1 - \frac{1}{Y_{+}^{(\alpha)}} \right) \star \check{K} + 2 \ln(1 + Y_Q) \star \check{K}_Q^{\Sigma} + \\ &\quad + \sum_a \ln \left(1 - \frac{1}{Y_{M|vw}^{(\alpha)}} \right) \star \check{K}_M. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Функции $Y_{\pm}$ (для y -частиц, связанных с $(x_m(u))^{\mp 1}$), появляющиеся ниже, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \ln \frac{Y_{+}^{(\alpha)}}{Y_{-}^{(\alpha)}} &= \ln(1 + Y_Q) \star K_{Qy}, \\ \ln Y_{-}^{(\alpha)} Y_{+}^{(\alpha)} &= - \ln(1 + Y_Q) \star K_Q + 2 \ln(1 + Y_Q) \star K_{xv}^{Q1} \star \mathbf{s} + 2 \ln \frac{1 + Y_{1|vw}^{(\alpha)}}{1 + Y_{1|w}^{(\alpha)}} \star \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

¹⁵⁾ Чтобы явно соотнести нормировки, заметим, что $K(m') = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \pi/2 \operatorname{ch}(\pi^2 l/a)$.

$Y_{M|(v)w}$ -функции удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \ln Y_{M|vw}^{(\alpha)} &= \ln(1 + Y_{M+1|vw}^{(\alpha)})(1 + Y_{M-1|vw}^{(\alpha)}) \star s - \ln(1 + Y_{M+1}) \star s + \\ &\quad + \delta_{M,1} \ln\left(\frac{1 - Y_-^{(\alpha)}}{1 - Y_+^{(\alpha)}}\right) \hat{\star} s, \\ \ln Y_{M|w}^{(\alpha)} &= \ln(1 + Y_{M+1|w}^{(\alpha)})(1 + Y_{M-1|w}^{(\alpha)}) \star s + \delta_{M,1} \ln\left(\frac{1 - 1/Y_-^{(\alpha)}}{1 - 1/Y_+^{(\alpha)}}\right) \hat{\star} s, \end{aligned} \quad (6.9)$$

в которых $Y_{0|(v)w} = 0$.

Как обычно, можно определить оператор s^{-1} , который теперь действует следующим образом:

$$f \circ s^{-1}(u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(u + ia - i\epsilon) + f(u - ia + i\epsilon), \quad (6.10)$$

так что

$$(f \star s) \circ s^{-1}(u) = f(u), \quad u \in (-\pi, \pi]. \quad (6.11)$$

Применяя s^{-1} к приведенным выше уравнениям ТАБ (6.5), (6.6), (6.8), (6.9), непосредственно получим Y -систему¹⁶⁾.

6.2. Энергия основного состояния. Поскольку полная алгебра симметрий нашей деформированной струнной теории неизвестна на сегодняшний день, преждевременно обсуждать, относится ли основное состояние к классу защищенных состояний (в самом деле, в недеформированном случае это утверждение основывается на симметрии относительно алгебры $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$, одной лишь симметрии относительно преобразований светового конуса $\mathfrak{psu}(2|2)^{\oplus 2}$ оказывается недостаточно). Тем не менее можно задаться вопросом, имеют ли уравнения ТАБ для основного состояния простое и естественное решение с нулевой энергией. Мы покажем, что ответ на этот вопрос положительный. Поскольку ядра нормированы (на подходящих отрезках) идентично соответствующим недеформированным ядрам, а химические потенциалы, возникающие в результате твистов, входят в уравнения ТАБ [29], [30] (см. также [22]) также идентично недеформированному случаю, можно непосредственно применить подход работы [31] (см. также работу [30]), что приводит к заключению о существовании решения уравнений ТАБ для основного состояния со всеми $Y_Q = 0$, тем самым обладающего нулевой энергией, задаваемой теми же постоянными Y -функциям, что и в недеформированном случае. Поэтому можно утверждать, что основное состояние остается защищенным состоянием в наших деформированных теориях.

Теперь можно рассмотреть дуальность для параметра длины (4.23) с точки зрения ТАБ. Как обсуждалось в работе [31], в недеформированном случае аналитичность Y -функций уравнений ТАБ приводит к условиям квантования J (обратной зеркальной температуры), что находится в согласии с представлением о связи этой температуры с квантованным угловым моментом. Это происходит, поскольку Y -функции содержат множитель $e^{-J\bar{E}}$, который оказывается мероморфным только

¹⁶⁾ В случае недеформированной струны никакой Y -системы уравнений не существует для Y_+ , а для получения Y -системы уравнений для Y_- необходимо применить тождества $K_-^{Qy} \circ s^{-1} = K_{xv}^{Q1} + \delta_{Q,1}$ и $K_M \circ s^{-1} = K_{M1} + \delta_{M,1}$.

на торе с целым или полуцелым J . Хотя это и не обсуждалось в работе [31], описание в терминах ТАБ термодинамики бесконечно длинных ($J \rightarrow \infty$) (недеформированных) струн также должно естественным образом приводить к квантованию обратной струнной температуры R , что и происходит благодаря множителям e^{-RE} . Эти условия квантования величин R и J относительно соответствующих энергий E и $\bar{E}$ находятся в замечательном согласии с дуальностью параметра длины (4.23), описываемой соотношением (4.7). Коротко говоря, зеркальная дуальность в картине ТАБ означает, что термодинамика определенных типов струн связана с энергиями основных состояний (спектрами) струн других типов, а соответствующие условия квантования, появляющиеся благодаря условиям аналитичности, оказываются в точности совместными.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены уравнения ТАБ для основного состояния струны над фоновой метрикой пространства $(AdS_5 \times S^5)_\eta$. Наша конструкция базируется на предположении, что q -деформированная матрица рассеяния, полученная с помощью наложения требования инвариантности относительно действия квантовой группы, оказывается точной S -матрицей для струн в пространстве $(AdS_5 \times S^5)_\eta$ при конечном значении константы связи. В процессе исследования зеркально-дуальной теории, полученной из исходной теории с помощью двойного виковского поворота, было выявлено интересное преобразование дуальности. Это преобразование связывает зеркально-дуальную теорию при фиксированном значении параметра деформации ϑ со струнной теорией при $\pi - \vartheta$. Это свойство выполняется на уровне дисперсионных соотношений, S -матриц и уравнений Бете–Янга. Указанная дуальность также совместна с квазиклассическим пределом. Это наблюдение получает дополнительные аргументы в пользу своей справедливости в лице построенных нами решений типа гигантских магнонов для деформированных струнных и зеркально-дуальных теорий. Интересно, что в духе подхода Замолотчикова зеркальная дуальность приводит к тому, что спектры некоторых струн можно исследовать с помощью термодинамических свойств других струн, что поднимает вопрос о том, возможно ли в данном контексте найти место в нашей конструкции для такого понятия, как температура Хагедорна, и можно ли применить это понятие для получения новых интересных взаимосвязей в исследуемой теории.

Имеются несколько направлений дальнейших исследований. Прежде всего, интересно понять, как преобразования дуальности действуют на уровне полной сигма-модели, т. е. в отсутствие ограничения на случай единственного нетривиального поля. Наиболее сложная задача при этом состоит в построении таких переопределений полей, которые позволили бы выразить дуализованное струнное действие в виде зеркально-дуального действия. Далее, наш анализ решений типа гигантских магнонов можно расширить на случай возмущений конечных размеров, что позволит получить представление о поправках конечного размера к дисперсионным соотношениям в режиме сильной связи. Также представляется возможным применить недавно развитый метод квантовой спектральной кривой [32]–[34] к указанным моделям, получив тем самым дополнительные сведения о спектре возмущений конечного размера. В частности, представляется весьма заманчивым про-

лить свет на возможный функциональный вид функции $q(\eta, g)$, входящей в точную S -матрицу η -деформированной модели. Также, как уже было отмечено, будет крайне интересно, если предельный переход $\vartheta \rightarrow \pi$ можно каким-либо познаваемым способом реализовать на уровне сигма-модели, так как этот предел тесно связан с зеркально-дуальной моделью пространства $AdS_5 \times S^5$.

Наконец, построенная деформация классической сигма-модели лежит в общем классе деформаций, описываемых решениями классического уравнения Янга–Бакстера. Среди этих деформаций присутствуют деформации так называемого жордановского типа. Недавно эти деформации появились в контексте струнной сигма-модели в работах [35], [36]. Представляется интересным попытаться обобщить наши рассуждения на случай таких жордановских деформаций. Разумеется, было бы крайне заманчиво, если бы такие деформации можно было бы перенести на другую сторону АдС/КТП-соотношения.

Добавление в корректуру. После завершения этой работы и представления ее в докладе [37] появилась интересная работа [38], в которой обсуждается предельный переход $\varkappa \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow 1$) деформированной геометрии фонового поля. В этой работе также было показано, что при подходящих масштабных преобразованиях деформированная геометрия оказывается T -дуальна геометрии пространства $dS_5 \times H^5$, которая может быть получена из пространства $AdS_5 \times S^5$ с помощью двойного виковского поворота. Чтобы избежать неверного истолкования, подчеркнем, что этот двойной виковский поворот производится в пространстве полевых конфигураций, а потому априори отличается от виковских поворотов координат мирового листа, обсуждаемых в данной работе. Разумеется, в калибровке светового конуса оба эти понятия перепутываются, но отметим, что $AdS_5 \times S^5$ зеркальная теория унитарна, в то время как авторы работы [38] отмечают проблемы с унитарностью, возникающие в их подходе. На данный момент времени наше понимание утверждения о виковских поворотах работы [38] сводится к тому, что там речь идет просто об аналитическом продолжении пространств H^5 и dS_5 на соответствующие пространства AdS_5 и S^5 . Отметим также, что возможная неунитарность, отмеченная в работе [38] (обсуждаемая там на с. 7), вероятно, объясняется естественным образом с нашей точки зрения (см. обсуждение сразу после уравнения (2.11)). С учетом интересной природы предельного перехода $\nu \rightarrow 1$ ($\vartheta \rightarrow \pi$), обсуждаемого выше, представляется весьма интересным произвести дальнейшее исследование соотношения между результатами работы [38] и настоящей работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

S -матрица

Представим необходимые формулы для $\mathfrak{psu}_q(2|2)_{\text{с.е.}}$ -инвариантной S -матрицы. Символ E_{ij} обозначает (4×4) -матрицу с единицей на месте матричного элемента (i, j) и нулевыми остальными матричными элементами. Введем следующее определение:

$$E_{kilj} = (-1)^{\epsilon(l)\epsilon(k)} E_{ki} \otimes E_{lj}, \quad (\text{П.1})$$

где $\epsilon(i)$ – четность индекса, равная нулю для $i = 1, 2$ (бозоны) и единице для $i = 3, 4$ (фермионы). Матрицы E_{kij} используются при написании инвариантов по отношению к действию двух копий алгебры $\mathfrak{su}_q(2)$. Если ввести

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= E_{1111} + \frac{q}{2}E_{1122} + \frac{1}{2}(2 - q^2)E_{1221} + \frac{1}{2}E_{2112} + \frac{q}{2}E_{2211} + E_{2222}, \\
\Lambda_2 &= \frac{1}{2}E_{1122} - \frac{q}{2}E_{1221} - \frac{1}{2q}E_{2112} + \frac{1}{2}E_{2211}, \\
\Lambda_3 &= E_{3333} + \frac{q}{2}E_{3344} + \frac{1}{2}(2 - q^2)E_{3443} + \frac{1}{2}E_{4334} + \frac{q}{2}E_{4433} + E_{4444}, \\
\Lambda_4 &= \frac{1}{2}E_{3344} - \frac{q}{2}E_{3443} - \frac{1}{2q}E_{4334} + \frac{1}{2}E_{4433}, \\
\Lambda_5 &= E_{1133} + E_{1144} + E_{2233} + E_{2244}, \\
\Lambda_6 &= E_{3311} + E_{3322} + E_{4411} + E_{4422}, \\
\Lambda_7 &= E_{1324} - qE_{1423} - \frac{1}{q}E_{2314} + E_{2413}, \\
\Lambda_8 &= E_{3142} - qE_{3214} - \frac{1}{q}E_{4132} + E_{4231}, \\
\Lambda_9 &= E_{1331} + E_{1441} + E_{2332} + E_{2442}, \\
\Lambda_{10} &= E_{3113} + E_{3223} + E_{4114} + E_{4224},
\end{aligned} \tag{П.2}$$

то $\mathfrak{psu}_q(2|2)_{\text{с.е.}}$ -инвариантную S -матрицу можно записать в виде

$$S_{12}(p_1, p_2) = \sum_{k=1}^{10} a_k(p_1, p_2) \Lambda_k \tag{П.3}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1, \quad a_2 = -q + \frac{2x_1^-(1 - x_2^-x_1^+)(x_1^+ - x_2^+)}{qx_1^+(1 - x_1^-x_2^-)(x_1^- - x_2^+)}, \quad a_3 = \frac{U_2V_2}{U_1V_1} \frac{x_1^+ - x_2^-}{x_1^- - x_2^+}, \\
a_4 &= -q \frac{U_2V_2}{U_1V_1} \frac{x_1^+ - x_2^-}{x_1^- - x_2^+} + \frac{2U_2V_2}{qU_1V_1} \frac{x_2^-(x_1^+ - x_2^+)(1 - x_1^-x_2^+)}{x_2^+(x_1^- - x_2^+)(1 - x_1^-x_2^-)},
\end{aligned} \tag{П.4}$$

$$\begin{aligned}
a_5 &= \frac{x_1^+ - x_2^+}{\sqrt{q}U_1V_1(x_1^- - x_2^+)}, \quad a_6 = \frac{\sqrt{q}U_2V_2(x_1^- - x_2^-)}{x_1^- - x_2^+}, \\
a_7 &= i \frac{(x_1^+ - x_1^-)(x_1^+ - x_2^+)(x_2^+ - x_2^-)}{\sqrt{q}U_1V_1(1 - x_1^-x_2^-)(x_1^- - x_2^+)\gamma_1\gamma_2}, \quad a_8 = i \frac{U_2V_2x_1^-x_2^-(x_1^+ - x_2^+)\gamma_1\gamma_2}{q^{\frac{3}{2}}x_1^+x_2^+(x_1^- - x_2^+)(x_1^-x_2^- - 1)}, \\
a_9 &= \frac{(x_1^- - x_1^+)\gamma_2}{(x_1^- - x_2^+)\gamma_1}, \quad a_{10} = \frac{U_2V_2(x_2^- - x_2^+)\gamma_1}{U_1V_1(x_1^- - x_2^+)\gamma_2}.
\end{aligned} \tag{П.5}$$

Центральные заряды задаются формулами (2.4), а параметры γ_i имеют вид

$$\gamma_i = q^{1/4} \sqrt{i(x_i^- - x_i^+) U_i V_i}. \quad (\text{П.6})$$

Важно отметить, что зависимость S -матрицы от переменных γ_i , $i = 1, 2$, имеет калибровочно-подобный вид. В самом деле, вводя диагональную матрицу $\Gamma_i = \text{diag}(1, 1, \gamma_i, \gamma_i)$, получим

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2] S_{12}^{\gamma_i=1}(z_1, z_2) [\Gamma_1^{-1} \otimes \Gamma_2^{-1}] = S_{12}(z_1, z_2), \quad (\text{П.7})$$

где через $S_{12}^{\gamma_i=1}$ обозначена приведенная выше S -матрица с параметрами γ_1 и γ_2 , равными единице. Это означает, что на уровне спектра можно забыть о факторах γ , т. е. мы получаем свойство, на которое опиралось обсуждение свойств инвариантности и обращения S -матрицы в разделе 3, поскольку эти свойства зависят от выбора ветвей решений в терминах факторов γ . Заметим, что при совпадающих аргументах S -матрица переходит в (градуированную) перестановку.

А.1. Числа возмущений. Приведем также соотношение между ненарушенными изометриями нашей деформированной модели и числами возмущений, возникающими в уравнениях Бете–Янга (4.18), (4.19). Эти числа возмущений связаны с глобальными сохраняющимися зарядами следующим образом:

$$\begin{aligned} J_1 &= J, & J_2 &= \frac{q_l + q_r}{2}, & J_3 &= \frac{q_l - q_r}{2}, \\ H_1 &= H, & H_2 &= \frac{s_l + s_r}{2}, & H_3 &= \frac{s_l - s_r}{2}, \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

где

$$q_\alpha = K^{\text{I}} - K_\alpha^{\text{II}}, \quad s_\alpha = K_\alpha^{\text{II}} - 2K_\alpha^{\text{III}}. \quad (\text{П.9})$$

Здесь J_i суть сохраняющиеся $U(1)$ -заряды, становящиеся угловыми моментами на сфере S^5 в пределе снятия деформации, а H_2 и H_3 – аналогичные величины на деформированном пространстве AdS (переменные s_α могут играть роль спинов). Величину H можно интерпретировать как энергию пространства конфигураций, связанную с энергией мирового листа E соотношением $H = E - J$.

А.2. Импульс и энергия. Энергия и импульс сигма-модели для деформированной струны выражаются в терминах u следующим образом:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{i} \ln \frac{\sin((u + ia)/2) \frac{1 + \sqrt{(\cos(u + ia) - \cos \vartheta)/(\cos(u + ia) - 1)}}{\sin((u - ia)/2) \frac{1 + \sqrt{(\cos(u - ia) - \cos \vartheta)/(\cos(u - ia) - 1)}}}, \\ H &= \frac{1}{a} \ln \frac{\cos((u + ia)/2) - i \sin((u + ia)/2) \sqrt{(\cos(u + ia) - \cos \vartheta)/(\cos(u + ia) - 1)}}{\cos((u - ia)/2) - i \sin((u - ia)/2) \sqrt{(\cos(u - ia) - \cos \vartheta)/(\cos(u - ia) - 1)}}. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

 q -Деформированная одевающая фаза

Как было показано в (2.2), одевающая фаза должна удовлетворять уравнению кроссинга

$$\sigma(z_1, z_2)\sigma(z_1, z_2 - \omega_2) = q^{-1} \frac{(x_1^+ + \xi)(x_1^- - x_2^+)(1 - 1/x_1^+ x_2^+)}{(x_1^- + \xi)(x_1^- - x_2^-)(1 - 1/x_1^+ x_2^-)}, \quad (\text{П.11})$$

которое в силу свойства унитарности эквивалентно уравнению

$$\sigma(z_1 + \omega_2, z_2)\sigma(z_1, z_2) = q^{-1} \frac{(x_2^- + \xi)(x_1^- - x_2^+)(1 - 1/x_1^+ x_2^+)}{(x_2^+ + \xi)(x_1^- - x_2^-)(1 - 1/x_1^+ x_2^-)}. \quad (\text{П.12})$$

Чтобы получить естественную деформацию одевающей фазы $AdS_5 \times S^5$ [39], будем следовать методу работы [40], что уже было произведено в контексте деформированной фазы в работе [41] (см. также приложение D работы [21]). Недеформированная одевающая фаза обычно записывается в виде [42]

$$\sigma(z_1, z_2) \equiv e^{i\theta_{12}} = \exp[i(\chi(x_1^+, x_2^+) - \chi(x_1^-, x_2^+) - \chi(x_1^+, x_2^-) + \chi(x_1^-, x_2^-))], \quad (\text{П.13})$$

где обе частицы лежат в области струны, а функция χ задается формулой [43]

$$\begin{aligned} \chi(x_1, x_2) = \Phi(x_1, x_2) &\equiv i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z - x_1} \times \\ &\times \oint_{|w|=1} \frac{dw}{2\pi i} \frac{1}{w - x_2} \ln \frac{\Gamma(1 + (ig/2)(u(z) - u(w)))}{\Gamma(1 - (ig/2)(u(z) - u(w)))}. \end{aligned}$$

В картине, описанной в работе [40], отношение Γ -функций возникало как решение разностного уравнения, в то время как контуры интегрирования появлялись в качестве значений x_s -функций вдоль их разрезов на u -плоскости. В контексте q -деформации деформированное разностное уравнение можно решить естественным образом с помощью подстановки отношения функций Γ_{q^2} [41], и хотя контуры интегрирования остаются теми же самыми в контексте деформации фазы, в нашем подходе контуры интегрирования модифицируются¹⁷⁾. В результате функция Φ в рассматриваемом случае будет задаваться формулой

$$\Phi(x_1, x_2) = i \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z - x_1} \oint_C \frac{dw}{2\pi i} \frac{1}{w - x_2} \ln \frac{\Gamma_{q^2}(1 + (i/2a)(u(z) - u(w)))}{\Gamma_{q^2}(1 - (i/2a)(u(z) - u(w)))}, \quad (\text{П.14})$$

в которой быстроты масштабируются в соответствии с нашими обозначениями, а переменные z и w пробегают вдоль контура, задаваемого решением уравнения

$$\mathcal{C}: |y|^2 - 1 + (y^* - y)\xi = 0. \quad (\text{П.15})$$

¹⁷⁾Разумеется, для некоторых (большинства) внешних аргументов эти деформированные контуры могут быть гомотопически-эквивалентными единичным окружностям. Тем не менее только наличие модифицированных контуров интегрирования приводит к красивой аналитической структуре, аналогичной структуре модели с недеформированной одевающей фазой.

Эту окружность радиуса $\sqrt{1 - \xi^2}$ с центром, сдвинутым на ξ , можно параметризовать в виде

$$y = \sqrt{1 - \xi^2} e^{i\varphi} + \xi, \quad (\text{П.16})$$

или можно просто подставить полярные координаты (для $-y$), что дает

$$y = \left(\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \phi} - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \phi \right) \frac{e^{i\phi}}{\cos(\vartheta/2)}. \quad (\text{П.17})$$

Быстрота вдоль этого контура при этом дается выражениями

$$\begin{aligned} u(y(\varphi)) &= i \ln \frac{1 + i \sin(\vartheta/2) e^{i\varphi}}{1 - i \sin(\vartheta/2) e^{-i\varphi}}, \\ u(y(\phi)) &= -2 \arcsin(\sin(\vartheta/2) \cos \phi), \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

что следует из ее определения (3.3). Обе эти параметризации сводятся непосредственно к стандартной параметризации окружности, а после масштабного преобразования – к быстроте в пределе $\vartheta \rightarrow 0$.

Отметим, что численное несоответствие, отмеченное в работе [14], между квазиклассическим разложением этой одевающей фазы и явными вычислениями в рамках сигма-модели для $\nu > 1/\sqrt{2}$ было обязано своим появлением неудачному выбору ветви решения, полученного при комбинации разностей быстрот, входящих в формулу (П.14) под знаком простого логарифма в силу их определения (3.3). Хотя это и непросто обнаружить при использовании единичных окружностей в качестве контуров интегрирования, в терминах деформированных контуров можно явно увидеть, что разрез для функции простого логарифма происходит при $\nu > 1/\sqrt{2}$. В таких исправленных обозначениях достигается полное соответствие с фазой рассеяния квазиклассической сигма-модели.

Б.1. Свойства одевающей фазы. Одевающая фаза обладает двумя простыми свойствами, непосредственно вытекающими из интегрального представления для функции Φ в области соответствия “струна–струна”, продолжаемого во внешность этой области с помощью аналитического продолжения [44]. Во-первых, функция Φ инвариантна при изменении знака ξ :

$$\Phi(x_1, x_2, -\xi, q) = \Phi(x_1, x_2, \xi, q). \quad (\text{П.19})$$

Чтобы это показать, заметим просто, что как x -функции, так и контур интегрирования меняют знак при изменении знака ξ . Поэтому после замены переменных в $\Phi(x_1, x_2, -\xi, q)$ от z и w к $\tilde{z} = -z$ и $\tilde{w} = -w$ и при последующем отождествлении x_1, x_2 и u (ср. (3.3)) в терминах соответствующих переменных в левой части соотношения мы приходим в точности к функции $\Phi(x_1, x_2, \xi, q)$. Отсюда немедленно следует, что полная одевающая фаза инвариантна относительно изменения знака ξ . Во-вторых, функция Φ меняет знак при обращении q :

$$\Phi\left(x_1, x_2, \xi, \frac{1}{q}\right) = -\Phi(x_1, x_2, \xi, q). \quad (\text{П.20})$$

Это следует из соотношения, связывающего $\Gamma_{q^{-2}}$ и Γ_{q^2} :

$$\Gamma_{q^{-2}}(z) = q^{-z^2+3z-2}\Gamma_{q^2}(z), \quad (\text{П.21})$$

а также из наблюдения, что помимо этого аргументы двух функций Γ_{q^2} эффективно переставляются, что приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \Phi\left(x_1, x_2, \xi, \frac{1}{q}\right) &= i \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z - x_1} \times \\ &\times \oint \frac{dw}{2\pi i} \frac{1}{w - x_2} \left(\ln \frac{\Gamma_{q^2}(1 - (i/2a)(u(z) - u(w)))}{\Gamma_{q^2}(1 + (i/2a)(u(z) - u(w)))} - i(u(z) - u(w)) \right), \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

где, как всегда, $a = \ln q$. Первая часть этого интеграла есть не что иное, как $-\Phi(x_1, x_2, \xi, q)$, а интеграл от дополнительного члена $u(z) - u(w)$ равен нулю, поскольку контур интегрирования по переменной w от функции $u(z)$ полностью стягивается, как и контур интегрирования по переменной z от функции $u(w)$. Разумеется, в одевающей фазе аргументы функций Φ зависят от q , но так как x^+ и x^- переставляются при обращении параметра q , то это не оказывает влияния на комбинацию факторов, входящую в выражение для одевающей фазы (ср. (П.13)), а это означает, что это выражение инвертируется при инверсии q . Другое свойство одевающей фазы утверждает, что она обращается при преобразовании четности, т.е.

$$\sigma(-u, -v; h, a) = \sigma^{-1}(u, v; h, a). \quad (\text{П.23})$$

В силу довольно сложных свойств q -деформированных x -функций при преобразованиях четности это утверждение оказывается нетривиальным. Тем не менее все еще нетрудно заметить, что уравнение кроссинга обращается при преобразовании четности с преобразованием кроссинга, производимым при этом, разумеется, в противоположном направлении на торе. Соотношение (П.23) достаточно легко проверить численно.

Б.2. Зеркально-дуальная одевающая фаза. Чтобы получить зеркально-дуальную одевающую фазу из приведенных выше выражений, необходимо аналитически продолжить функции χ вовне струнной области или, иными словами, через разрезы области определения x -функций. На уровне x -переменных это различие прослеживается в зависимости от того, где лежат соответствующие функции – внутри или вовне $\mathcal{C}$. Занумеруем эти области $\mathcal{R}$ нижним индексом для каждой частицы; этот нижний индекс принимает значение 0, если обе ассоциированные с ним переменные x^- и x^+ лежат внутри, и значение 1, если x^- лежит внутри, а x^+ – вовне. Прямая вещественнозначных импульсов в зеркальной теории содержится в области $\mathcal{R}_{1,1}$, и эта область представляет для нас главный интерес, остальные случаи рассматривать не будем.

В терминах приведенных выше интегральных представлений при перемещении от $\mathcal{R}_{0,0}$ к $\mathcal{R}_{1,0}$ или $\mathcal{R}_{0,1}$ полюс подынтегрального выражения при $z = x_1$ (или соответственно $w = x_2$) пересекает контур интегрирования. Более точно, разрыв функции Φ по первому аргументу задается выражением

$$\Psi(x_1, x_2) \equiv i \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z - x_2} \ln \frac{\Gamma_{q^2}(1 + (i/2a)(u_1 - u(z)))}{\Gamma_{q^2}(1 - (i/2a)(u_1 - u(z)))}. \quad (\text{П.24})$$

Разрыв по второму аргументу имеет аналогичный вид. Эта функция Ψ имеет разрывы по своему первому и второму аргументам, и, в частности, чтобы добраться до $\mathcal{R}_{1,1}$ от $\mathcal{R}_{1,0}$, необходимо добавить

$$i \ln \frac{\Gamma_{q^2}(1 + (i/2a)(u_1 - u_2))}{\Gamma_{q^2}(1 - (i/2a)(u_1 - u_2))}. \quad (\text{П.25})$$

В целом аналитическое продолжение к $\mathcal{R}_{1,1}$ приводит к появлению следующей функции χ :

$$\begin{aligned} \chi(x_1^+, x_2^+) &= \Phi(x_1^+, x_2^+) + \Psi(x_2^+, x_1^+) - \Psi(x_1^+, x_2^+) + \\ &\quad + i \ln \frac{\Gamma_{q^2}(1 + (ig/2)(x_1^+ + 1/x_1^+ - x_2^+ - 1/x_2^+))}{\Gamma_{q^2}(1 - (ig/2)(x_1^+ + 1/x_1^+ - x_2^+ - 1/x_2^+))}, \\ \chi(x_1^+, x_2^-) &= \Phi(x_1^+, x_2^-) - \Psi(x_1^+, x_2^-), \\ \chi(x_1^-, x_2^+) &= \Phi(x_1^-, x_2^+) + \Psi(x_2^+, x_1^-), \\ \chi(x_1^-, x_2^-) &= \Phi(x_1^-, x_2^-). \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

Следует отметить, что получаемая при этом зеркальная одевающая фаза не унитарна, в то время как полный зеркальный скалярный фактор и, в частности, подправленная зеркальная одевающая фаза должны быть унитарны. С помощью этих выражений нетрудно проверить выполнение зеркальной дуальности для одевающей фазы в виде соотношения (4.17) в численном виде.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Действие в фиксированной калибровке

Зафиксируем однородную калибровку светового конуса и найдем соответствующее действие в фиксированной калибровке. В случае пространства $AdS_5 \times S^5$ это было проделано в работе [45], мы же применим другой метод.

Начнем с рассмотрения действия общего вида

$$S = -\frac{g}{2} \int_{-r}^r d\sigma d\tau (\gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N G_{MN} - \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N B_{MN}), \quad (\text{П.27})$$

где G_{MN} и B_{MN} – соответствующие фоновая метрика и поле B . Действие можно переписать в терминах переменных светового конуса в виде

$$S = \int_{-r}^r d\sigma d\tau \left(p_+ \dot{x}^+ + p_- \dot{x}^- + p_\mu \dot{x}^\mu + \frac{\gamma^{01}}{\gamma^{00}} C_1 + \frac{1}{2g\gamma^{00}} C_2 \right). \quad (\text{П.28})$$

Здесь C_1 и C_2 имеют вид

$$\begin{aligned} C_1 &= p_- x'^- + p_+ x'^+ + p_\mu x'^\mu, \\ C_2 &= G^{--} p_-^2 + 2G^{+-} p_+ p_- + G^{++} p_+^2 + \\ &\quad + g^2 G_{--} x'^- x'^- + 2g^2 G_{+-} x'^+ x'^- + g^2 G_{++} x'^+ x'^+ + \mathcal{H}_x, \end{aligned} \quad (\text{П.29})$$

где мы учли, что для фоновой метрики рассматривается случай, когда $B^{+-} = 0$. Инвариантность относительно диффеоморфизмов приводит к появлению связей Вирасоро $C_i = 0$. Компоненты светового конуса обратной метрики имеют вид

$$G^{++} = \frac{G_{--}}{G_{++}G_{--} - G_{+-}^2}, \quad G^{+-} = -\frac{G_{+-}}{G_{++}G_{--} - G_{+-}^2}, \quad G^{--} = \frac{G_{++}}{G_{++}G_{--} - G_{+-}^2},$$

и величина $\mathcal{H}_x$ – это часть, которая зависит только от поперечных полей,

$$\mathcal{H}_x = G^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + g^2 x'^\mu x'^\nu G_{\mu\nu} - 2gp_\mu x'^\rho G^{\mu\nu} B_{\nu\rho} + g^2 x'^\lambda x'^\rho B_{\mu\lambda} B_{\nu\rho} G^{\mu\nu}. \quad (\text{П.30})$$

Теперь наложим калибровку светового конуса:

$$x^+ = \tau, \quad p_- = 1. \quad (\text{П.31})$$

Тогда гамильтонова плотность $\mathcal{H} = -p_+$ вытекает из связи $C_2 = 0$:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{G^{++}} [G^{+-} + \sqrt{(G^{+-2} - G^{++}G^{--}) - G^{++}(g^2 G_{--} x' - x'^- + \mathcal{H}_x)}]. \quad (\text{П.32})$$

Запишем этот гамильтониан в виде

$$\mathcal{H} = \frac{G^{+-}}{G^{++}} + \frac{1}{G^{++}} \sqrt{\mathcal{W}}, \quad (\text{П.33})$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & (G^{+-2} - G^{++}G^{--}) - G^{++}[(G^{\mu\nu} + g^2 G_{--} x'^\mu x'^\nu) p_\mu p_\nu + \\ & + g^2 x'^\mu x'^\nu G_{\mu\nu} - 2gp_\mu x'^\rho G^{\mu\nu} B_{\nu\rho} + g^2 x'^\lambda x'^\rho B_{\mu\lambda} B_{\nu\rho} G^{\mu\nu}]. \end{aligned}$$

Далее, гамильтоновы уравнения движения для x^μ имеют вид

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu} = -\frac{1}{\sqrt{\mathcal{W}}} [(G^{\mu\nu} + g^2 G_{--} x'^\mu x'^\nu) p_\nu - g x'^\rho G^{\mu\nu} B_{\nu\rho}].$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$M^{\mu\nu} p_\nu = -\sqrt{\mathcal{W}} \dot{x}^\mu + g G^{\mu\tau} x'^\sigma B_{\tau\sigma}, \quad (\text{П.34})$$

где введена матрица M с матричными элементами

$$M^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} + g^2 G_{--} x'^\mu x'^\nu.$$

Из формулы (П.34) выразим канонические импульсы в терминах скоростей:

$$p_\mu = -M_{\mu\nu}^{-1} (\sqrt{\mathcal{W}} \dot{x}^\nu - g G^{\nu\tau} x'^\sigma B_{\tau\sigma}). \quad (\text{П.35})$$

При подстановке этого выражения для импульса обратно в выражение для $\mathcal{W}$ получим уравнение для $\mathcal{W}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & (G^{+-2} - G^{++}G^{--}) - G^{++}[\mathcal{W} M_{\mu\nu}^{-1} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \\ & - g^2 M_{\mu\nu}^{-1} G^{\mu\tau} G^{\nu\sigma} x'^\alpha x'^\beta B_{\tau\alpha} B_{\sigma\beta} + g^2 x'^\mu x'^\nu G_{\mu\nu} + g^2 x'^\lambda x'^\rho B_{\mu\lambda} B_{\nu\rho} G^{\mu\nu}], \end{aligned}$$

решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & \frac{1}{1 + G^{++} M_{\mu\nu}^{-1} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} [(G^{+-2} - G^{++}G^{--}) - \\ & - G^{++}(-g^2 M_{\mu\nu}^{-1} G^{\mu\tau} G^{\nu\sigma} x'^\alpha x'^\beta B_{\tau\alpha} B_{\sigma\beta} + g^2 x'^\mu x'^\nu G_{\mu\nu} + g^2 x'^\lambda x'^\rho B_{\mu\lambda} B_{\nu\rho} G^{\mu\nu})]. \end{aligned}$$

Таким образом, лагранжиан в фиксированной калибровке имеет вид

$$\mathcal{L} = p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{H} = -\frac{G^{+-}}{G^{++}} + gM_{\mu\nu}^{-1}G^{\nu\tau}\dot{x}^\mu x'^\sigma B_{\tau\sigma} - \frac{1}{G^{++}}(1 + G^{++}M_{\mu\nu}^{-1}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)\sqrt{\mathcal{W}}.$$

Наконец, матрицу M можно обратить с помощью формулы Шермана–Моррисона:

$$M_{\mu\nu}^{-1} = G_{\mu\nu} - g^2 G_{--} \frac{G_{\mu\tau}G_{\nu\sigma}x'^\tau x'^\sigma}{1 + g^2 G_{--}G_{\tau\sigma}x'^\tau x'^\sigma}.$$

Эту формулу можно использовать для приведения лагранжиана к виду

$$\mathcal{L} = -\frac{G^{+-}}{G^{++}} - \frac{1}{G^{++}}(1 + G^{++}M_{\mu\nu}^{-1}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)\sqrt{\mathcal{W}} + g\dot{x}^\mu x'^\nu B_{\mu\nu},$$

где

$$\mathcal{W} = (G^{+-2} - G^{++}G^{--}) \frac{1 + g^2 G_{--}G_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu}{1 + G^{++}M_{\mu\nu}^{-1}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}.$$

Чтобы рассматривать пространственные и временные переменные в едином формате, произведем преобразование подобия $\sigma \rightarrow g\sigma$, так что в результате последнего упрощения действие в фиксированной калибровке примет вид

$$S = g \int_{-r/g}^{\tau/g} d\tau d\sigma \mathcal{L}, \quad (\text{П.36})$$

где

$$\mathcal{L} = -\frac{G^{+-}}{G^{++}} - \sqrt{-\frac{\mathcal{X}}{G^{++}G_{--}}} + \dot{x}^\mu x'^\nu B_{\mu\nu} \quad (\text{П.37})$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = & 1 + G^{++}G_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + G_{--}G_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu + \\ & + G^{++}G_{--}(G_{\mu\nu}G_{\tau\sigma} - G_{\mu\tau}G_{\nu\sigma})\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu x'^\tau x'^\sigma. \end{aligned} \quad (\text{П.38})$$

Эти выражения описывают действие в фиксированной калибровке для произвольного фонового поля (G_{MN}, B_{MN}) с полем B , имеющим нулевые компоненты светового конуса. Заметим, что в пределе $r \rightarrow \infty$ константа связи g входит в действие в виде общего масштабного множителя. Более того, часть лагранжиана, содержащая поле B , равно как и последний член в выражении (П.38), оказываются инвариантными при двойных виковских поворотах. Наконец, нетрудно видеть, что при выборе плоской метрики в пространстве Минковского действие сводится к стандартному действию для восьми свободных бозонов.

Теперь уже можно более точно указать общий вид действия в фиксированной калибровке для струны на η -деформированном пространстве $AdS_5 \times S^5$. До фиксации калибровки лагранжиан на световом конусе, отвечающий действию (П.30), имел вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{g}{2}\gamma^{\alpha\beta}[G_{++}\partial_\alpha x^+\partial_\beta x^+ + 2G_{+-}\partial_\alpha x^+\partial_\beta x^- + G_{--}\partial_\alpha x^-\partial_\beta x^- + \\ & + G_{ij}^a\partial_\alpha z^i\partial_\beta z^j + G_{ij}^s\partial_\alpha y^i\partial_\beta y^j] + \mathcal{L}^{\text{WZ}}. \end{aligned} \quad (\text{П.39})$$

Здесь $x^\mu \in \{z^i, y^i\}$, где z^i и y^i , $i = 1, \dots, 4$, – поперечные координаты соответственно деформированного пространства AdS и пятимерной сферы, а $\mathcal{L}^{\text{WZ}}$ – член Весса–Зумино, содержащий вклад поля B . Координаты светового конуса $x^\pm$ задаются выражениями

$$x^+ = (1 - a_g)t + a_g\phi, \quad x^- = \phi - t, \quad (\text{П.40})$$

в которых a_g – параметр обобщенной калибровки светового конуса. Компоненты метрики с индексами координат светового конуса имеют вид

$$\begin{aligned} G_{++} &= G_{\phi\phi} - G_{tt}, & G_{+-} &= a_g G_{tt} + (1 - a_g) G_{\phi\phi}, \\ G_{--} &= (1 - a_g)^2 G_{\phi\phi} - a_g^2 G_{tt} \end{aligned} \quad (\text{П.41})$$

и

$$\begin{aligned} G^{++} &= a_g^2 G_{\phi\phi}^{-1} - (1 - a_g)^2 G_{tt}^{-1}, & G^{+-} &= a_g G_{\phi\phi}^{-1} + (1 - a_g) G_{tt}^{-1}, \\ G^{--} &= G_{\phi\phi}^{-1} - G_{tt}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{П.42})$$

Ниже собраны другие компоненты метрики, включая G_{tt} и $G_{\phi\phi}$, а также член Весса–Зумино.

В.1. Метрика и член Весса–Зумино. Пусть координаты z_i , $i = 1, \dots, 4$, и t параметризуют деформированное пространство AdS, а координаты y_i , $i = 1, \dots, 4$, и угол ϕ параметризуют деформированную пятимерную сферу. Введем следующие вспомогательные функции для AdS-составляющей:

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{(1 + \kappa^2)^{1/2}(1 + z^2/4)^2}{(1 - z^2/4)^2 - \kappa^2 z^2}, & G_{zz} &= \frac{(1 + \kappa^2)^{1/2}(1 - z^2/4)^2}{(1 - z^2/4)^4 + \kappa^2 z^2(z_3^2 + z_4^2)}, \\ G_a^{(1)} &= \frac{\kappa^2 G_{tt} G_{zz}}{(1 + \kappa^2)^{1/2}} \frac{z_3^2 + z_4^2 + (1 - z^2/4)^2}{(1 - z^2/4)^2(1 + z^2/4)^2}, & G_a^{(2)} &= \frac{\kappa^2 G_{zz}^2}{(1 - z^2/4)^4}. \end{aligned} \quad (\text{П.43})$$

Соответствующие выражения для сферической составляющей имеют вид

$$\begin{aligned} G_{\phi\phi} &= \frac{(1 + \kappa^2)^{1/2}(1 - y^2/4)^2}{(1 + y^2/4)^2 + \kappa^2 y^2}, & G_{yy} &= \frac{(1 + \kappa^2)^{1/2}(1 + y^2/4)^2}{(1 + y^2/4)^4 + \kappa^2 y^2(y_3^2 + y_4^2)}, \\ G_s^{(1)} &= \frac{\kappa^2 G_{\phi\phi} G_{yy}}{(1 + \kappa^2)^{1/2}} \frac{y_3^2 + y_4^2 - (1 + y^2/4)^2}{(1 - y^2/4)^2(1 + y^2/4)^2}, & G_s^{(2)} &= \frac{\kappa^2 G_{yy} y^2}{(1 + y^2/4)^4}. \end{aligned} \quad (\text{П.44})$$

В формулах выше $z^2 \equiv z^i z^i$ и $y^2 = y^i y^i$. В терминах этих вспомогательных функций компоненты светового конуса деформированной метрики AdS принимают вид

$$\begin{aligned} G_{11}^a &= G_{zz} + G_a^{(1)} z_1^2, & G_{33}^a &= G_{zz} + G_a^{(1)} z_3^2 + G_a^{(2)} z_4^2, \\ G_{22}^a &= G_{zz} + G_a^{(1)} z_2^2, & G_{44}^a &= G_{zz} + G_a^{(1)} z_4^2 + G_a^{(2)} z_3^2, \\ G_{12}^a &= G_{21}^a = z_1 z_2 G_a^{(1)}, & G_{34}^a &= G_{43}^a = z_3 z_4 (G_a^{(1)} - G_a^{(2)}), \end{aligned}$$

и аналогично для деформированной сферы:

$$\begin{aligned} G_{11}^s &= G_{yy} + G_s^{(1)} y_1^2, & G_{33}^s &= G_{yy} + G_s^{(1)} y_3^2 + G_s^{(2)} y_4^2, \\ G_{22}^s &= G_{yy} + G_s^{(1)} y_2^2, & G_{44}^s &= G_{yy} + G_s^{(1)} y_4^2 + G_s^{(2)} y_3^2, \\ G_{12}^s &= G_{21}^s = y_1 y_2 G_s^{(1)}, & G_{34}^s &= G_{43}^s = y_3 y_4 (G_s^{(1)} - G_s^{(2)}). \end{aligned}$$

Наконец, член Весса–Зумино задается выражением $\mathcal{L}^{\text{WZ}} = \mathcal{L}_a^{\text{WZ}} + \mathcal{L}_s^{\text{WZ}}$, где

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_a^{\text{WZ}} &= 2g\kappa(1 + \kappa^2)^{1/2}\epsilon^{\alpha\beta} \frac{(z_3^2 + z_4^2)\partial_\alpha z_1 \partial_\beta z_2}{(1 - z^2/4)^4 + \kappa^2 z^2(z_3^2 + z_4^2)}, \\ \mathcal{L}_s^{\text{WZ}} &= -2g\kappa(1 + \kappa^2)^{1/2}\epsilon^{\alpha\beta} \frac{(y_3^2 + y_4^2)\partial_\alpha y_1 \partial_\beta y_2}{(1 + y^2/4)^4 + \kappa^2 y^2(y_3^2 + y_4^2)}.\end{aligned}\quad (\text{П.45})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

S -матрицы и интегральные ядра

Приведем выражения для энергии, импульса и фазы рассеяния, которые используются в ядрах, входящих в наши уравнения ТАБ. Энергия и импульс зеркально-дуальных связанных состояний Q -частиц определяются выражениями

$$\tilde{E}_Q(u) = -\ln \frac{1}{q} \frac{x^+ + \xi}{x^- + \xi}, \quad \tilde{p}^Q(u) = -ia \ln q \frac{x^+ x^- + \xi}{x^- x^+ + \xi}, \quad (\text{П.46})$$

в которых $x^\pm$ суть x -функции $x_m(u \pm iQa)$ зеркальных связанных состояний. Это можно получить с применением операции слияния $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ (ср. (4.2)). Затем базисная S -матрица S_1 и, в более общем виде, ее формы слияния S_M и S_{MN} задаются выражениями

$$\begin{aligned}S_M(u - v) &= \frac{\sin[(u - v - iMa)/2]}{\sin[(u - v + iMa)/2]}, \\ S_{MN}(u - v) &= S_{M+N}(u - v) S_{|M-N|}(u - v) \prod_{m=1}^{\min(M, N)-1} S_{|M-N|+2m}^2(u - v).\end{aligned}\quad (\text{П.47})$$

Производя процесс слияния матрицы рассеяния для частиц $y^\pm$ с фундаментальными частицами над связанным состоянием Q -частицы, непосредственно получим

$$\begin{aligned}S_-^{yQ}(u, v) &= q^{Q/2} \frac{x(u) - x^-(v)}{x(u) - x^+(v)} \sqrt{\frac{x^+(v)}{x^-(v)}}, \\ S_+^{yQ}(u, v) &= q^{Q/2} \frac{1/x(u) - x^-(v)}{1/x(u) - x^+(v)} \sqrt{\frac{x^+(v)}{x^-(v)}},\end{aligned}\quad (\text{П.48})$$

где $x^\pm$ – параметры зеркального связанного состояния Q -частицы; $x^\pm(v) = x_m(v \pm iQa)$. Аналогично можно определить S -матрицы для рассеяния зеркальных связанных состояний с y -частицами:

$$\begin{aligned}S_-^{Qy}(u, v) &= q^{Q/2} \frac{x^-(u) - x(v)}{x^+(u) - x(v)} \sqrt{\frac{x^+(u)}{x^-(u)}}, \\ S_+^{Qy}(u, v) &= q^{Q/2} \frac{x^-(u) - 1/x(v)}{x^+(u) - 1/x(v)} \sqrt{\frac{x^+(u)}{x^-(u)}}.\end{aligned}\quad (\text{П.49})$$

Производя процесс слияния этой S -матрицы над составляющими y -корнями $M|vw$ -струны, получим [20]

$$S_{xv}^{QM}(u, v) \equiv q^Q \frac{x^-(u) - x^+(v)}{x^+(u) - x^+(v)} \frac{x^-(u) - x^-(v)}{x^+(u) - x^-(v)} \frac{x^+(u)}{x^-(u)} \prod_{i=1}^{M-1} S_{Q+M-2i}(u - v), \quad (\text{П.50})$$

где $x^\pm(v) = x(v \pm iMa)$ и $x^\pm(u) = x(u \pm iQa)$. Версия слияния основного скалярного множителя, $S_{\text{sl}(2)}^{QP}$, оказывается более сложной, но совершенно аналогичной такой версии в случае деформации фазы, и ее можно получить из выражений работы [21] (см. также [22]) с помощью масштабных преобразований быстрот и замены $|q| = 1$ на $q \in \mathbb{R}$ в нужных местах.

Г.1. Ядра. Определим теперь ядра интегрирований. Начнем с ядер

$$K_M(u) \equiv \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{du} \ln S_M(u) = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{sh } Ma}{\text{ch } Ma - \cos u}, \quad (\text{П.51})$$

$$K_{MN}(u) \equiv \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{du} \ln S_{MN}(u) = K_{M+N} + K_{|M-N|} + 2 \sum_{j=1}^{\min(M,N)-1} K_{|M-N|+2j}. \quad (\text{П.52})$$

Эти ядра обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} K_N(\delta_{N,M} - I_{NM} \star \mathbf{s}) &= \mathbf{s} \delta_{M,1}, \\ K_{ML}(\delta_{L,N} - I_{LN} \star \mathbf{s}) &= \mathbf{s} I_{M,N}, \end{aligned} \quad (\text{П.53})$$

где величина $\mathbf{s}$ была определена в (6.2). Эти свойства явно следуют из разложения Фурье. Далее имеем

$$\begin{aligned} K_{xv}^{QM}(u, v) &\equiv \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{du} \ln S_{xv}^{QM}(u, v), \\ K_{vwx}^{MQ}(u, v) &\equiv -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{du} \ln S_{xv}^{QM}(v, u), \\ K_\beta^{Qy}(u, v) &\equiv \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{du} \ln S_\beta^{Qy}(u, v), \\ K_\beta^{yQ}(u, v) &\equiv \beta \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{du} \ln S_\beta^{Qy}(v, u). \end{aligned} \quad (\text{П.54})$$

Удобно рассмотреть линейные комбинации последних двух ядер, а именно:

$$\begin{aligned} K_-^{Qy}(u, v) - K_+^{Qy}(u, v) &\equiv K_{Qy}(u, v) = K\left(u + \frac{iQ}{g}, v\right) - K\left(u - \frac{iQ}{g}, v\right), \\ K_-^{Qy}(u, v) + K_+^{Qy}(u, v) &= K_-^{yQ}(u, v) - K_+^{yQ}(u, v) = K_Q(u, v), \\ K_-^{yQ}(u, v) + K_+^{yQ}(u, v) &\equiv K_{yQ}(u, v) = K\left(u, v + \frac{iQ}{g}\right) - K\left(u, v - \frac{iQ}{g}\right), \end{aligned} \quad (\text{П.55})$$

где

$$K(u, v) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{du} \ln \frac{x(u) - 1/x(v)}{x(u) - x(v)}, \quad (\text{П.56})$$

а K_Q определяется формулой (П.51). Можно явно проверить, что более сложные ядра обладают свойствами, сходными с базисными свойствами, приведенными выше, а именно:

$$\begin{aligned} K_{xv}^{QN}(\delta_{N,M} - I_{NM} \star \mathbf{s}) &= \delta_{Q-1,M} \mathbf{s} + \delta_{M,1} K_{Qy} \hat{\star} \mathbf{s}, \\ K_{vwx}^{MP}(\delta_{P,Q} - I_{PQ} \star \mathbf{s}) &= \delta_{M+1,Q} \mathbf{s} + \delta_{Q,1} \tilde{K}_M \star \mathbf{s}, \\ K_{yP}(\delta_{P,Q} - I_{PQ} \star \mathbf{s}) &= \delta_{Q,1} (2\tilde{K} \star \mathbf{s} + \mathbf{s}), \\ K_P(\delta_{P,Q} - I_{PQ} \star \mathbf{s}) &= \delta_{Q,1} \mathbf{s}. \end{aligned} \quad (\text{П.57})$$

Ядро $\bar{K}$ определено следующим образом:

$$\bar{K}(u, v) = \theta(|u| - r) \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{du} \ln \frac{x(u) - 1/x_s(v)}{x(u) - x_s(v)}, \quad (\text{П.58})$$

$$\check{K}_M(u, v) \equiv \bar{K}(u + iMa, v) + \bar{K}(u - iMa, v).$$

Детальные выражения для одевающего ядра $K_{sl(2)}^{QP}$, претерпевшего процесс слияния, равно как и для связанного с ним ядра $\check{K}_Q^\Sigma$, можно явно получить из случая с деформированной фазой [20]–[22] при выполнении необходимых замен.

Хотя мы не приводим явные выражения в настоящей работе, канонические уравнения ТАБ можно непосредственно записать с использованием приведенных выше ядер в духе обсуждения в разделе 6.

Благодарности. Авторы глубоко признательны Н. Бейсерту, Р. Борсато и С. Фролову за ценные обсуждения, а также Р. Борсато и С. Фролову за ценные замечания по тексту работы. Работа С. Дж. Ван Тонгерена была поддержана Einstein Foundation Berlin в рамках исследовательского проекта “Gravitation and High Energy Physics”, а также People Programme (Marie Curie Actions) в рамках European Union’s Seventh Framework Programme FP7/2007-2013/ (REA соглашение № 317089). Работа Г. Э. Арутюнова была поддержана Netherlands Organization for Scientific Research (NWO) (грант VICI 680-47-602). Работа Г. Э. Арутюнова также является частью ERC Advanced Grant Research Programme № 246974, “Supersymmetry: a window to non-perturbative physics”, а также поддержана D-ITP Cosortium – программой NWO, финансируемой Dutch Ministry of Education, Culture and Science (OCW). Работа М. де Люва частично поддержана Swiss National Science Foundation (грант № 200021-137616).

Список литературы

- [1] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**:2 (1998), 231–252; *Internat. J. Theor. Phys.*, **38**:4 (1999), 1113–1133, arXiv: hep-th/9711200.
- [2] G. Arutyunov, S. Frolov, *J. Phys. A*, **42**:25 (2009), 254003, 121 pp., arXiv: 0901.4937.
- [3] N. Beisert, C. Ahn, L. F. Alday et al., *Lett. Math. Phys.*, **99**:1–3 (2012), 3–32, arXiv: 1012.3982.
- [4] F. Delduc, M. Magro, B. Vicedo, *Phys. Rev. Lett.*, **112**:5 (2014), 051601, 5 pp., arXiv: 1309.5850.
- [5] И. В. Чередник, *ТМФ*, **47**:2 (1981), 225–229.
- [6] С. Klimcik, *JHEP*, **12** (2002), 051, 23 pp., arXiv: hep-th/0210095.
- [7] С. Klimcik, *J. Math. Phys.*, **50**:4 (2009), 043508, 11 pp., arXiv: 0802.3518.
- [8] F. Delduc, M. Magro, B. Vicedo, *JHEP*, **11** (2013), 192, 36 pp., arXiv: 1308.3581.
- [9] I. Kawaguchi, T. Matsumoto, K. Yoshida, *JHEP*, **04** (2012), 115, 21 pp., arXiv: 1201.3058.
- [10] I. Kawaguchi, T. Matsumoto, K. Yoshida, *JHEP*, **06** (2012), 082, 26 pp., arXiv: 1203.3400.
- [11] K. Sfetsos, *Nucl. Phys. B*, **880** (2014), 225–246, arXiv: 1203.3400.
- [12] T. J. Hollowood, J. L. Miramontes, *Symplectic deformations of integrable field theories and AdS/CFT*, arXiv: 1403.1899.
- [13] N. Beisert, P. Koroteev, *J. Phys. A*, **41**:25 (2008), 255204, 47 pp., arXiv: 0802.0777.
- [14] G. Arutyunov, R. Borsato, S. Frolov, *JHEP*, **04** (2014), 002, 24 pp., arXiv: 1312.3542.
- [15] A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **342**:3 (1990), 695–720.

- [16] G. Arutyunov, S. Frolov, *JHEP*, **03** (2009), 152, 17 pp., arXiv:0901.1417.
- [17] G. Arutyunov, S. Frolov, *JHEP*, **05** (2009), 068, 29 pp., arXiv:0903.0141.
- [18] D. Bombardelli, D. Fioravanti, R. Tateo, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:37 (2009), 375401, 20 pp., arXiv:0902.3930.
- [19] N. Gromov, V. Kazakov, A. Kozak, P. Vieira, *Lett. Math. Phys.*, **91**:3 (2010), 265–287, arXiv:0902.4458.
- [20] G. Arutyunov, M. de Leeuw, S. J. van Tongeren, *JHEP*, **10** (2012), 090, 56 pp., arXiv:1208.3478.
- [21] G. Arutyunov, M. de Leeuw, S. J. van Tongeren, *JHEP*, **02** (2013), 012, 50 pp.
- [22] S. J. van Tongeren, *Integrability of the $AdS_5 \times S^5$ superstring and its deformations*, arXiv:1310.4854.
- [23] G. Arutyunov, S. Frolov, *JHEP*, **12** (2007), 024, 72 pp., arXiv:0710.1568.
- [24] T. Nishioka, T. Takayanagi, *JHEP*, **08** (2008), 001, 18 pp., arXiv:0806.3391.
- [25] D. Gaiotto, S. Giombi, X. Yin, *JHEP*, **04** (2009), 066, 18 pp., arXiv:0806.4589.
- [26] D. M. Hofman, J. M. Maldacena, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:41 (2006), 13095–13118, arXiv:hep-th/0604135.
- [27] F. H. L. Essler, H. Frahm, F. Göhmann, A. Klümper, V. E. Korepin, *The One-Dimensional Hubbard Model*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [28] G. Arutyunov, S. Frolov, *JHEP*, **11** (2009), 019, 16 pp., arXiv:0907.2647.
- [29] C. Ahn, Z. Bajnok, D. Bombardelli, R. I. Nepomechie, *JHEP*, **12** (2011), 059, arXiv:1108.4914.
- [30] M. de Leeuw, S. J. van Tongeren, *Nucl. Phys. B*, **860**:3 (2012), 339–76, arXiv:1201.1451.
- [31] S. Frolov, R. Suzuki, *Phys. Lett. B*, **679**:1 (2009), 60–64, arXiv:0906.0499.
- [32] N. Gromov, V. Kazakov, S. Leurent, D. Volin, *Phys. Rev. Lett.*, **112**:1 (2014), 011602, 5 pp., arXiv:1305.1939.
- [33] A. Cavaglià, D. Fioravanti, N. Gromov, R. Tateo, *Phys. Rev. Lett.*, **113**:2 (2014), 021601, 5 pp., arXiv:1403.1859.
- [34] N. Gromov, G. Sizov, *Phys. Rev. Lett.*, **113**:12 (2014), 121601, 5 pp., arXiv:1403.1894.
- [35] I. Kawaguchi, T. Matsumoto, K. Yoshida, *Jordanian deformations of the $AdS_5 \times S^5$ superstring*, arXiv:1401.4855.
- [36] I. Kawaguchi, T. Matsumoto, K. Yoshida, *JHEP*, **06** (2014), 146, 25 pp., arXiv:1402.6147.
- [37] S. J. van Tongeren, “The exact spectrum of a string on really deformed $AdS_5 \times S^5$ ”, talk at Strong Coupled Gauge Theories (King’s College London, February 10–14, 2014).
- [38] B. Hoare, R. Roiban, A. A. Tseytlin, *On deformations of $AdS_n \times S^n$ supercosets*, arXiv:1403.5517.
- [39] N. Beisert, B. Eden, M. Staudacher, *J. Stat. Mech.*, **1**:1 (2007), P01021, 21 pp., arXiv:hep-th/0610251.
- [40] D. Volin, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:37 (2009), 372001, 7 pp., arXiv:0904.4929.
- [41] B. Hoare, T. J. Hollowood, J. L. Miramontes, *JHEP*, **03** (2012), 015, 34 pp., arXiv:1112.4485.
- [42] G. Arutyunov, S. Frolov, M. Staudacher, *JHEP*, **10** (2004), 016, 21 pp., arXiv:hep-th/0406256.
- [43] N. Dorey, D. M. Hofman, J. M. Maldacena, *Phys. Rev. D*, **76**:2 (2007), 025011, 18 pp., arXiv:hep-th/0703104.
- [44] G. Arutyunov, S. Frolov, *J. Phys. A*, **42**:42 (2009), 425401, 40 pp., arXiv:0904.4575.
- [45] T. Klose, T. McLoughlin, R. Roiban, K. Zarembo, *JHEP*, **03** (2007), 094, 49 pp., arXiv:hep-th/0611169.