Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Калагов, М. Ю. Налимов, М. В. Компаниец, Ренормгрупповое исследование сверхпроводящего фазового перехода: асимптотика высоких порядков разложений и результаты трехпетлевых расчетов, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 2, 374–386

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8710>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:44:03

© 2014 г. Г. А. Калагов, М. В. Компаниец, М. Ю. Налимов

РЕНОРМГРУППОВОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА: АСИМПТОТИКА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ РАЗЛОЖЕНИЙ И РЕЗУЛЬТАТЫ ТРЕХПЕТЛЕВЫХ РАСЧЕТОВ

Методами квантово-полевой ренормализационной группы исследован фазовый переход в равновесной системе нерелятивистских ферми-частиц с взаимодействием типа “плотность–плотность” в формализме температурных функций Грина. Основное внимание уделено случаю частиц со спином больше $1/2$ или фермионных полей, имеющих по тем или иным причинам дополнительные индексы. В окрестности точки фазового перехода данная модель сведена к теории типа ϕ^4 с матричным комплексным антисимметричным полем. Определено семейство инстантонов данной модели, исследовано асимптотическое поведение квантово-полевых разложений в ней. Выполнены трехпетлевые расчеты β -функций уравнения ренормализационной группы в $(4 - \epsilon)$ -схеме. В физических размерностях пространства $D = 2, 3$ произведено пересуммирование решений уравнений ренормализационной группы на траектории инвариантных зарядов. Результаты подтверждают сделанное ранее предположение о том, что в рассматриваемой системе имеет место переход в сверхпроводящее состояние первого рода, причем при более высокой температуре, чем это предсказывается классической теорией.

Ключевые слова: температурные функции Грина, сверхпроводимость, ренормализационная группа, инстантонный анализ, борелевское суммирование.

DOI: 10.4213/tmf8710

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] в формализме температурных функций Грина исследовалась квантовая равновесная система нерелятивистских фермионов. Анализ основывался на микроскопической модели с бесструктурным локальным взаимодействием типа

“плотность–плотность” [2], [3]. Действие модели имеет вид

$$S = \psi^+ \left(\partial_t - \frac{\Delta}{2m} - \mu \right) \psi - \frac{\lambda}{2} (\psi^+ \psi)^2, \quad (1)$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r)^T$, $\psi^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_r^*)$ описывают фермионное поле при температуре T , компоненты ψ_i , ψ_i^* – комплексно-сопряженные элементы грассмановой алгебры, зависимость полей от D -мерных координат и “мнимого времени” $t \in [0, 1/T]$, а также соответствующие интегрирования подразумеваются, m – масса фермиона, Δ – оператор Лапласа, μ – химический потенциал системы, λ – положительная константа связи. На поля ψ , ψ^+ налагаются антипериодические граничные условия по t . Обычно носителями заряда в системах, демонстрирующих переход в сверхпроводящее состояние, являются электроны проводимости, им соответствует значение $r = 2$. Однако в работе [1] рассмотрен случай произвольного четного r . При этом речь может идти как о носителях заряда с высшими спинами, так и о появлении у обычных электронных полей дополнительных индексов, например индекса подрешетки и (или) индекса, соответствующего вырождению зонной структуры, как это имеет место при рассмотрении электропроводности в графенах [4].

С помощью преобразования типа Хаббарда–Стратоновича в работе [1] были введены бозонные поля χ , χ^+ , в новых переменных действие модели принимает вид

$$S = \psi^+ \left(\partial_t - \frac{\Delta}{2m} - \mu \right) \psi + \text{Tr} \chi \chi^+ + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \psi_i^* \chi_{ij} \psi_j^* + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \psi_i \chi_{ji}^* \psi_j. \quad (2)$$

Действительно, гауссово интегрирование функции e^{-S} с действием (2) по полям χ , χ^+ возвращает нас к действию (1). Поля ψ , ψ^+ грассмановы, поэтому поля χ , χ^+ можно рассматривать как комплексные антисимметричные матрицы ранга r . Эти поля, как показано в работе [1] с помощью уравнений Швингера

$$\begin{aligned} \left\langle \chi_{ij}^* - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \psi_i^* \psi_j^* \right\rangle &= \{A_{\chi^+}\}_{ij}, \\ \left\langle \chi_{ji} + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \psi_i \psi_j \right\rangle &= \{A_{\chi}\}_{ij}, \end{aligned}$$

где A обозначает соответствующий источник, связаны с параметром порядка, а в точке перехода являются безмассовыми критическими модами. Интегрирование по полям ψ , ψ^+ в модели (2) позволяет построить эффективное действие S_e в терминах бозонных полей χ , χ^+ :

$$S_e = \text{Tr} \chi \chi^+ + \frac{1}{2} \text{ (diagram)} + \frac{1}{4} \text{ (diagram)} + \dots + A_{\psi} G A_{\psi^+}, \quad (3)$$

где волнистыми хвостиками обозначены поля χ , χ^+ , линии обозначают пропагаторы $\langle \psi \psi^+ \rangle$, крестик на линии соответствует полю с крестом, в петлевых вкладах в действие (3) подразумевается операция взятия следа по индексам. Существенную для дальнейшего анализа часть эффективного действия можно записать в виде гамильтониана Гинзбурга–Ландау [1]

$$S_e = \text{Tr} \chi^+ (-\Delta + \tau) \chi + \frac{g_1}{4} (\text{Tr} \chi \chi^+)^2 + \frac{g_2}{4} \text{Tr} \chi \chi^+ \chi \chi^+. \quad (4)$$

Заметим, что взаимодействие с зарядом g_1 включено в действие (4) для мультипликативной ренормируемости теории. Несложно убедиться, что соответствующие контрчлены возникают в процессе ренормировки теории начиная с простейшей однопетлевой диаграммы. Интегрирование в этом действии осуществляется лишь по D -мерным координатам, поскольку в критической области поля χ , χ^+ не зависят от t , а соответствующие интегралы порождают множитель $1/T$.

Критерий устойчивости действия (4) (условие положительной определенности члена взаимодействия) можно сформулировать в виде неравенства

$$g_2 + r g_1 > 0 \quad (5)$$

при физических значениях $g_2 > 0$. Для фермионов с $r = 4, 6, \dots$ члены действия (4) с коэффициентами g_1 , g_2 линейно независимы, однако при $r = 2$ между ними можно установить связь: при этом константы взаимодействия собираются в единый параметр $g = 2g_1 + g_2$, а модель (4) сводится к обычной $O(2)$ -симметричной теории ϕ^4 . Для проверки результатов наших вычислений мы рассматривали также случай $r = 3$, при этом модель (4) эквивалентна $O(6)$ - ϕ^4 -модели.

Теория (4) ренормируется мультипликативно. В работе [1] инфракрасное (ИК) поведение данной теории было исследовано методом ренормализационной группы (РГ). В однопетловом приближении установлено, что модель не имеет фиксированных точек при четных $r > 2$. Соответствующие g_1 , g_2 инвариантные заряды, стартуя с различных начальных значений, пересекают область устойчивости (5) действия S_e приблизительно по одной траектории. Уход траектории за границу области устойчивости обычно интерпретируется как указание на существование фазового перехода первого рода.

Известно, что существуют модели, в которых учет старших порядков теории возмущений существенно влияет на анализ устойчивости фиксированных точек. В качестве примеров можно привести так называемую S -модель критической динамики [5], киральные трехмерные модели и разнообразные спинные системы с анизотропией [6]–[11]. Поэтому естественным представляется вопрос, не возникнет ли аналогичная ситуация в рассматриваемом случае.

В разделе 2 представлены результаты вычислений РГ-функций в трехпетловом приближении. Мы решили не заниматься поиском и анализом фиксированных точек уравнения РГ в данном приближении, ограничившись анализом поведения фазовых траекторий. Как указано в работе [1], не только положение фиксированных точек и соответствующие критические индексы, но и сами уравнения на инвариантные заряды можно построить в форме стандартного ϵ -разложения, т.е. с малым параметром – величиной отклонения размерности пространства от логарифмической размерности теории ($\epsilon = 4 - D$).

Для анализа фазового портрета этих уравнений в физических размерностях пространства ($\epsilon = 1$, $\epsilon = 2$) на предмет выхода за границу (5) области устойчивости S_e необходимо проводить их пересуммирование, например, по Борелю. Такое пересуммирование требует знания асимптотики высоких порядков (АВП) ϵ -разложения. АВП найдена методами инстантонного анализа [12] в разделе 3. В рассматриваемой модели обнаружено существование нескольких инстантонов различной матричной структуры. Их структура оказывается существенной для борелевского пересуммирования при различных соотношениях зарядов g_1 и g_2 .

В разделе 4 проведено пересуммирование и решение уравнений РГ на инвариантные заряды. Численный анализ этих уравнений, проведенный в разделе 5, показывает, что характер поведения инвариантных зарядов принципиально не меняется по сравнению с результатами однопетлевых вычислений как до границы устойчивости, так и в достаточно широкой области за пределами устойчивости системы. Тем самым установлено, что фазовый переход в сверхпроводящее состояние в фермионных системах, в которых носителям заряда соответствует $r \geq 4$, скорее всего, является переходом первого рода и имеет место при более высоких температурах, чем это предсказывается традиционной теорией [2].

2. РГ-АНАЛИЗ

Сформулируем основные правила диаграммной техники для теории с действием (4). Отличие от скалярной модели имеется лишь в симметричных коэффициентах, петлевые интегралы здесь те же, что и в обычной скалярной теории ϕ^4 , их значения приведены, например, в [5]. Затравочный пропагатор для модели в представлении Фурье

$$\Pi_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = \frac{W_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}}{\mathbf{k}^2 + \tau},$$

$$W_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = \frac{1}{2}(\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} - \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1}),$$

где δ_{ik} – символ Кронекера. Тензор $W_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$ антисимметричен по перестановкам $i_1 \leftrightarrow i_2$ и $j_1 \leftrightarrow j_2$ и симметричен относительно перестановок $(i_1, i_2) \leftrightarrow (j_1, j_2)$. Графические изображения тензорных структур вершин и пропагатора представлены на рис. 1 (антисимметризация вершинных множителей подразумевается).

Рис. 1. Тензорные структуры вершин и пропагатора. Вершина I соответствует g_1 , вершина II – g_2 , вершина III – пропагатору.

В работе используется размерная регуляризация в пространстве $4 - \epsilon$, а в качестве схемы ренормировок – MS-схема, в которой константы ренормировки имеют вид

$$Z = 1 + \frac{Z^1}{\epsilon} + O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right),$$

где Z^1 обозначает вычет в простом полюсе по ϵ соответствующей константы ренормировки, а РГ-функции в MS-схеме имеют вид

$$\beta_j = -g_j(\epsilon + \gamma_{g_j}), \quad \gamma_{g_j} = -g_k \partial_k Z_{g_j}^1. \quad (6)$$

Трехпетлевой расчет бета-функций был выполнен на основе известных значений расходимостей графов [5]. Для вычисления тензорных свертки мы использовали программу FORM [13]. В результате получено

$$\begin{aligned} \beta_1 = & -\epsilon g_1 + \frac{1}{4}(r^2 - r + 8)g_1^2 + (r - 1)g_1 g_2 + \frac{3}{4}g_2^2 - \\ & - \frac{9}{48}(3r^2 - 3r + 14)g_1^3 - \frac{11}{4}(r - 1)g_1^2 g_2 - \frac{1}{32}(5r^2 - 15r + 92)g_1 g_2^2 - \\ & - \frac{3}{8}(r - 2)g_2^3 + \frac{1}{512}[33r^4 - 66r^3 + (955 + 480\zeta(3))r^2 - (480\zeta(3) + 922)r + \\ & + 2960 + 2112\zeta(3)]g_1^4 + \frac{1}{128}[79r^3 - 158r^2 + (1397 + 768\zeta(3))r - 1318 - \\ & - 768\zeta(3)r]g_1^3 g_2 + \frac{1}{1024}[3r^4 - 12r^3 + (576\zeta(3) + 3355)r^2 - \\ & - (1728\zeta(3) + 7568)r + 9216\zeta(3) + 14788]g_1^2 g_2^2 + \frac{1}{512}[60r^3 - 321r^2 + \\ & + (2943 + 1152\zeta(3))r - 2304\zeta(3) - 4092]g_1 g_2^3 + \frac{1}{1024}[(96\zeta(3) + 193)r^2 - \\ & - (576\zeta(3) + 891)r + 1536\zeta(3) + 1860]g_2^4, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = & -\epsilon g_2 + \frac{1}{4}(2r - 5)g_2^2 + 3g_1 g_2 - \\ & - \frac{3}{32}(r^2 - 7r + 20)g_2^3 - \frac{1}{4}(11r - 20)g_2^2 g_1 - \frac{1}{16}(5r^2 - 5r + 82)g_1^2 g_2 + \\ & + \frac{1}{1024}[26r^3 - (383 + 96\zeta(3))r^2 + (2459 + 1152\zeta(3))r - 4060 - 2688\zeta(3)]g_2^4 + \\ & + \frac{1}{128}[(96\zeta(3) + 182)r^2 - (963 + 576\zeta(3))r + 1536\zeta(3) + 1937]g_2^3 g_1 + \\ & + \frac{1}{512}[-70r^3 + 11r^2 + (6423 + 4608\zeta(3))r - 8064\zeta(3) - 10366]g_1^2 g_2^2 + \\ & + \frac{1}{256}[-13r^4 + 26r^3 + (192\zeta(3) + 355)r^2 - (368 + 192\zeta(3))r + \\ & + 3284 + 2688\zeta(3)]g_1^3 g_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где сделана замена $g_i \rightarrow g_i/16\pi^2$. Результаты вычислений были проверены по совпадению с известными результатами вычисления [5] β -функций $O(r)$ -симметричной ϕ^4 -модели при $r = 2, 3$.

Поскольку в однопетлевом приближении не удалось ни обнаружить ИК-устойчивых фиксированных точек, ни привести аналитического решения для инвариантных

зарядов при $r > 2$ [1], мы в дальнейшем используем численные решения полученной системы уравнений на инвариантные заряды.

Сделаем растяжение динамической переменной $\xi = \ln(\tau/M^2)$ и зарядов: $g_i \rightarrow \epsilon g_i$, $\xi \rightarrow \xi/\epsilon$ (M – ренормировочная масса, ренормированные заряды связаны с “затра- вочными” соотношениями $g_i^0 = M^\epsilon g_i Z_{gi}$). После этого уравнения на инвариантные заряды можно записать в виде разложения по ϵ :

$$\begin{aligned} \partial_\xi \bar{g}_i &= -\bar{g}_i + \sum_{N=0}^K \epsilon^N \beta_i^{(N)}(\bar{g}_1, \bar{g}_2), \quad i = 1, 2, \\ \bar{g}_i|_{\xi=0} &= g_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Явные выражения для $\beta_i^{(N)}(g_1, g_2)$ определены соответствующими порядками раз- ложений (7), (8). В рассматриваемом случае трехпетлевого приближения $K = 2$. Результаты однопетлевого счета соответствуют рассмотренным в работе [1] вкла- дам $\sim \epsilon^0$.

Для исследования уравнений типа (9) при физических значениях $\epsilon = 1$ и $\epsilon = 2$, т. е. с большим параметром разложения, воспользуемся пересуммированием имею- щихся членов уравнений. Такое пересуммирование реализуется с помощью преоб- разования Бореля, которое требует знания АВП разложения (9), т. е. информацию о поведении $\beta_i^{(N)}(g_1, g_2)$ при $N \rightarrow \infty$.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Нас интересует АВП разложений в модели (4) по паре зарядов g_1 и g_2 . Эта задача не является новой, решение похожей проблемы можно найти в работе [14], где ис- следовались АВП динамических моделей, в частности, с несколькими константами взаимодействия. Проблема упрощается тем, что реально нас интересует не АВП по- ведения по каждому заряду в отдельности, а поведение разложения по числу петель, в котором заряды можно считать пропорциональными.

Сделав переобозначение $g_i \rightarrow zg_i$ в действии (4), будем исследовать разложение по степеням z . По окончании вычислений АВП положим $z = \epsilon$ и учтем, что $\beta_i^{(N)}(g_1, g_2)$ следует поделить на ϵ для построения ϵ -разложений в уравнениях (9).

В настоящем разделе используется подход, предложенный в работе [15], который специально разработан для исследования АВП констант ренормировки в MS-схеме. Рассматриваются частично-ренормированные функции Грина, в которых осуществ- лены вычитания на расходимости всех подграфов вплоть до порядка $N - 1$. Сами ультрафиолетовые расходимости в функциях Грина в MS-схеме имеют вид полюсов по ϵ .

Нахождение АВП коэффициентов разложения $2k$ -хвостых ренормированных функций Грина в ряд по переменной z основывается на интегральной формуле Ко- ши [12]

$$G_{2k}^{(N)}(x_1, \dots, x_{2k}) = \frac{(-1)^N}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz G_{2k}(z, x_1, \dots, x_{2k})}{(-z)^{N+1}} \quad (10)$$

с последующим применением метода перевала. Здесь γ – замкнутый контур в комплексной плоскости вокруг нуля и

$$G_{2k}(z, x_1, \dots, x_{2k}) = W^{-1} \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\chi^+ \chi(x_1) \chi^+(x_2) \dots \chi(x_{2k-1}) \chi^+(x_{2k}) e^{-S_R}, \quad (11)$$

$$W = \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\chi^+ e^{-S_R},$$

S_R – ренормированное действие (4). АВП, как обычно [12], будем искать при $\tau = 0$ и $D = 4$. После подстановки (11) в (10) и растяжения переменных $g_i \rightarrow g_i/NM^\epsilon$, $\chi \rightarrow \sqrt{N}\chi$, $\chi^+ \rightarrow \sqrt{N}\chi^+$ вариационные уравнения для функционала $J = S_R + \ln(-z)$ принимают вид

$$-\Delta\chi + \frac{zg_1}{2}\chi \text{Tr} \chi\chi^+ + \frac{zg_2}{2}\chi\chi^+\chi = 0,$$

$$-\Delta\chi^+ + \frac{zg_1}{2}\chi^+ \text{Tr} \chi\chi^+ + \frac{zg_2}{2}\chi^+\chi\chi^+ = 0, \quad (12)$$

$$\int d\mathbf{x} \left\{ \frac{zg_1}{4} (\text{Tr} \chi\chi^+)^2 + \frac{zg_2}{4} \text{Tr} \chi\chi^+ \chi\chi^+ \right\} = -1.$$

Учет контрчленов $Z_i - 1$ в вариационных уравнениях приводит лишь к поправкам порядка $1/N$ к решениям системы (12) (см. [12], [15]). Первые два уравнения различаются эрмитовым сопряжением, поэтому достаточно рассматривать лишь одно из них. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что антисимметричные поля χ и χ^+ приведены к пфафовой форме, т. е. имеют вид блочно-диагональных матриц с $p = r/2$ блоками

$$\chi = \begin{pmatrix} s_1\sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2\sigma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s_p\sigma \end{pmatrix}, \quad \chi^+ = \begin{pmatrix} -s_1^*\sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -s_2^*\sigma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -s_p^*\sigma \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Также предполагается, что функции $s_j(\mathbf{x})$, где $j = 1, \dots, p$, принимают значения в комплексной плоскости, т. е. $s_j: \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{C}$. Дифференциальные уравнения (12) сводятся к системе дифференциальных уравнений на функции $s_j(\mathbf{x})$:

$$-\Delta s_i(\mathbf{x}) + zg_1 \sum_{k=1}^p |s_k(\mathbf{x})|^2 s_i(\mathbf{x}) + \frac{zg_2}{2} |s_i(\mathbf{x})|^2 s_i(\mathbf{x}) = 0. \quad (15)$$

Для построения решений этой системы при $D = 4$ выберем известный анзац

$$s_i(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_i y^{-1}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 + y^2}, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, \quad (16)$$

пропорциональный решению аналогичных уравнений для скалярной теории ϕ^4 [12]. Произвольные параметры y , $\mathbf{x}_0$ – радиус и центр инстантона соответственно – отражают дилатационную и трансляционную инвариантность теории. При вычислениях эта инвариантность, как и в работе [12], учитывается с помощью трюка Фаддеева–Попова, который фиксирует произвол для каждого инстантона ($\mathbf{x}_0 = 0$, $y = 1$) и вводит интегрирования с корректной мерой по $\mathbf{x}_0$, y . Подстановка формулы (16) в уравнения (15) приводит к системе алгебраических уравнений на константы α_i :

$$8\alpha_i + zg_1 \sum_{k=1}^p |\alpha_k|^2 \alpha_i + \frac{zg_2}{2} |\alpha_i|^2 \alpha_i = 0. \quad (17)$$

Видно, что нетривиальными решениями являются инстантоны, у которых может быть $m = 0, \dots, p-1$ нулевых блоков с $|\alpha_i| = 0$ и $n = p, \dots, 1$ ненулевых блоков с $|\alpha_i|^2 = -16/(2n zg_1 + zg_2)$, причем $n + m = p$. Фаза чисел α_i не фиксируется и является произвольным параметром наряду с $\mathbf{x}_0$ и y . Кроме произвольных параметров y , $\mathbf{x}_0$ и n фазовых параметров существует инвариантность относительно унитарных преобразований $U(r)$, с помощью которых матрицы были приведены к пфафовой форме. Тем самым общее число нулевых мод определяется выражением $r^2 - 2r + n + 5$, что влияет на показатель степени N в исследуемой АВП. Для установления точки стационарности z_{st} воспользуемся интегральным условием (12), откуда получаем

$$z_{\text{st}}(n) = -\frac{4n}{3} \frac{1}{2ng_1 + g_2}. \quad (18)$$

Определение АВП функций Грина по известным инстантону (16) и стационарному значению параметра разложения (18) является стандартной процедурой [12], [15]. Как и в работе [15], по рассчитанной методом инстантонного анализа АВП вычета в простом полюсе $G_4^{1(N)}/\epsilon$ была определена АВП разложений β -функций рассматриваемой теории

$$\beta_i^{(N)}(g_1, g_2) = \text{const}_i \cdot N! N^{b_n} (-a)^N (1 + O(N^{-1})), \quad (19)$$

где const_i – некоторые числовые константы, $b_n = (r^2 - 2r + n + 11)/2$ и $a = \max_n |a(n)|$, $a(n) = -1/z_{\text{st}}(n)$. Из равенства (18) видно, что $a(n)$ меняются вместе с g_i , поэтому главный вклад в асимптотику (19) дает наибольшее по модулю значение $a(n)$, остальные вносят экспоненциально малый вклад и должны быть отброшены. Результат (19) показывает, что ряд в правой части (9) является расходящимся в классическом смысле, поэтому при учете многопетлевых вкладов необходимо использовать методы пересуммирования. Вследствие факториального роста коэффициентов наиболее эффективным является метод Бореля или его обобщение – метод Бореля–Леруа.

4. ПЕРЕСУММИРОВАНИЕ

Общая идеология пересуммирования по Борелю–Леруа [16], [17] заключается в следующем: пусть некая величина, в нашем случае $\beta(z)_i$, представима степенным рядом по z с коэффициентами, имеющими при $N \rightarrow \infty$ вид (19),

$$\beta(z)_i = \sum_{N \geq 0} z^N \beta_i^{(N)}, \quad (20)$$

тогда ей сопоставляется функция $B(z)$, определяемая следующим равенством:

$$B(z)_i = \sum_{N \geq 0} B_i^{(N)} z^N, \quad B_i^{(N)} = \frac{\beta_i^{(N)}}{\Gamma(N + b_0 + 1)}, \quad (21)$$

где $\Gamma(N)$ – гамма-функция Эйлера, b_0 – произвольный параметр. Обратное преобразование, позволяющее восстановить функцию $\beta(z)_i$ по ее образу $B(z)$, задано формулой

$$\beta(z)_i = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{b_0} B(zt)_i. \quad (22)$$

Таким образом, знание асимптотики (19) вместе с некоторыми предположениями об аналитических свойствах функции $B(z)$ позволяет пересуммировать ряд (20). Нетрудно заметить, что при $N \rightarrow \infty$ коэффициенты $B_i^{(N)} \sim (-a)^N N^{b_n - b_0}$. Это означает, что такой ряд сходится в круге, радиус которого определяется величиной a , следовательно, функция $B(z)$ является аналитической в этой области.

Известны разные схемы преобразования Бореля–Леруа, использующие различные параметры в качестве подгоночных [16], [17]. Мы будем использовать так называемую схему конформного преобразования Бореля–Леруа, как наиболее точно контролируруемую с точки зрения знания АВП. Она содержит минимум свободных параметров и приводит к наиболее точным результатам (см., например, [18]). Особенность нашей задачи заключается в том, что положение полюсов борелевского образа исследуемых β -функций зависит от соотношения зарядов g_1 и g_2 , т.е. от конкретной точки в плоскости (g_1, g_2) , в которой рассматривается система.

Рассмотрим случай $r = 4$, что физически соответствует, например, фермионам со спином $3/2$. Существуют два типа инстантонов: с одним ненулевым блоком $a(1) = (3/4)(2g_1 + g_2)$ и с двумя ненулевыми блоками $a(2) = (3/8)(4g_1 + g_2)$. С эволюцией инвариантных зарядов согласно уравнениям (9) параметры $a(1)$, $a(2)$ меняются не только по абсолютной величине, но и по знаку. Им соответствуют разные области в плоскости (g_1, g_2) , с различными свойствами сходимости ряда для $B(z)$.

Область I: если инвариантные заряды удовлетворяют условию $8\bar{g}_1 + 3\bar{g}_2 > 0$, то $|a(1)| > |a(2)|$. Ближайшая к нулю сингулярность располагается в точке $z = -R_1 = -1/a(1)$.

Область II: если инвариантные заряды удовлетворяют условию $8\bar{g}_1 + 3\bar{g}_2 \leq 0$, то $|a(2)| > |a(1)|$. В этом случае ближайшая сингулярность располагается уже на положительной полуоси в точке $z = R_2 = 1/|a(2)|$.

Таким образом, вся плоскость $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ разделена прямой $8\bar{g}_1 + 3\bar{g}_2 = 0$. Выше этой границы аналитические свойства борелевского образа определяются наиболее вырожденным инстантоном, т.е. инстантоном с одним ненулевым блоком, а ниже границы – невырожденным инстантоном.

Пусть инвариантные заряды находятся в области I. Именно здесь находятся физические стартовые значения инвариантных зарядов, т.е. ренормированные заряды модели (4). При этом контур интегрирования в (22) пересекает область аналитичности функции $B(z)$ в точке R_1 . Проблема аналитического продолжения во внешность круга сходимости решается методом конформного отображения [16], [17].

Обычно конформное отображение комплексной плоскости выбирают в виде [16]

$$u(z) = \frac{\sqrt{1+az} - 1}{\sqrt{1+az} + 1} \Leftrightarrow z(u) = \frac{4u}{a(u-1)^2}. \quad (23)$$

Равенство $u(z) = O(z)$ при $z \rightarrow 0$ позволяет разложить ряд (21) по переменной u :

$$\begin{aligned} B(z)_i &= \sum_{N \geq 0} B_i^{(N)} z^N = \sum_{N \geq 0} U_i^{(N)} u^N, \\ U_i^{(0)} &= B_i^{(0)}, \quad U_i^{(N)} = \sum_{m=1}^N B_i^{(m)} \left(\frac{4}{a}\right)^m C_{N+m-1}^{N-m}, \quad N \geq 1, \end{aligned} \quad (24)$$

тогда конформное преобразование Бореля приобретает вид

$$\beta(z)_{g_i} = \sum_{N \geq 0} U_i^{(N)} \int_0^\infty dt t^{b_0} e^{-t} u(zt)^N. \quad (25)$$

Произвольный параметр пересуммирования b_0 из соображения ускорения сходимости рядов принято фиксировать условием $b_0 = b_n + 3/2$ [16], [17].

5. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Пользуясь полученной асимптотической формулой (19) для коэффициентов ϵ -разложения и выражением (25), можно окончательно написать пересуммированные РГ-уравнения на инвариантные заряды:

$$\begin{aligned} \partial_\xi \bar{g}_i &= -\bar{g}_i + \sum_{N=0}^K U_i^{(N)} \int_0^\infty dt t^{b_0} e^{-t} u(\epsilon t)^N, \\ \bar{g}_i|_{\xi=0} &= g_i. \end{aligned} \quad (26)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае $U_i^{(N)}$ и $u(t)$ являются функциями $\bar{g}_i$.

Численное решение системы (26) осуществлялось следующим образом. Выбрав начальную точку в плоскости зарядов (g_1, g_2) , определяем соответствующий радиус сходимости или значение a и производим в соответствии с изложенным в разделе 4 пересуммирование правых частей уравнений (26). Затем, пользуясь конечно-разностным методом, находим новые значения инвариантных зарядов, для которых повторяем процедуру пересуммирования. И так далее.

Рис. 2. Траектории инвариантных зарядов с различными начальными условиями при $D = 3$ (а) и $D = 2$ (б). Линии L соответствуют $8\bar{g}_1 + 3\bar{g}_2 = 0$. Заштрихованная часть соответствует области, в которой устойчивость действия нарушается.

В качестве примера исследовались решения системы (26) при $r = 4$. На рис. 2 приведены две траектории, соответствующие различным начальным данным при $D = 3$ (рис. 2а) и при $D = 2$ (рис. 2б). Область положительной определенности действия (4) не закрашена. При некотором значении ξ_0 траектории выходят из этой области практически по одной линии. Предъявленное на рисунках поведение слабо зависит от рассматриваемой размерности пространства. Численный анализ уравнений (26) при различных параметрах r, ϵ позволяет заключить, что и в трехпетлевом приближении в области (5) нами не обнаружено ИК-устойчивых фиксированных точек уравнения РГ. Кроме того, на уровне численного исследования видно, что решение задачи Коши (26) является устойчивым: небольшое варьирование начальных данных не приводит к существенному изменению поведения траекторий, поэтому здесь можно говорить о некой универсальности, несмотря на отсутствие в системе фиксированных точек. Полученные решения будут справедливы, пока верно представление (25), т. е. во всей области I. Далее, когда заряд попадает в область II, сингулярность $B(z)$ переходит на положительную полуось, т. е. на контур интегрирования. Это уже не позволяет использовать конформное преобразование Бореля в форме (25).

Сравнение результатов однопетлевого (1), двухпетлевого (2) и трехпетлевого (3) расчетов приведено на рис. 3а для $D = 3$ и рис. 3б для $D = 2$. Из представленных графиков видно, что хотя трехпетлевые вычисления и не обеспечивают достаточно большую точность, особенно при $\epsilon = 2$, тем не менее характер поведения траекторий с пересечением границы устойчивости системы неуклонно сохраняется.

Ситуация принципиально не меняется при $r > 4$. Например, при $r = 6$ в теории появляются уже три типа инстантонов. В этом случае плоскость (g_1, g_2) будет делиться на большее число областей, чем при $r = 4$. Отметим лишь, что до границы

Рис. 3. Траектории инвариантных зарядов с различным числом учтенных петель диаграмм при $D = 3$ (а) и $D = 2$ (б).

устойчивости и в некоторой ее окрестности при любых r главный вклад в асимптотику вносит наиболее вырожденный инстантон с $n = 1$. Можно полагать, что если фазовый переход первого типа действительно имеет место, то он происходит вблизи границы устойчивости. По этой причине пересуммирование достаточно проводить лишь с $a = a(1)$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование АВП квантово-полевых разложений теории с взаимодействием типа ϕ^4 с матричным антисимметричным полем. Найдены инстантоны. Обнаружена необычная ситуация, когда АВП меняется в зависимости от соотношения зарядов.

Анализ рассматриваемой модели нерелятивистских ферми-частиц с взаимодействием типа “плотность–плотность” и дополнительными индексами полей носителей зарядов (или связанных со старшими спинами, или обусловленных существованием различных подрешеток, или возникающих из-за вырождения зонной структуры) показывает, что приведенные в работе [1] результаты однопетлевого счета качественно не меняются при учете еще двух порядков теории возмущений. Инвариантные заряды по-прежнему выходят за границу области устойчивости действия, что, как и в [6]–[11], следует считать указанием на то, что в системе имеет место фазовый переход первого рода, причем при более высокой температуре, чем это предсказано общеизвестной теорией [2] для фазовых переходов второго рода.

Более того, результаты численного счета, как и в однопетлевом приближении [1], указывают на квазиуниверсальность (в смысле слабой зависимости от начальных данных) поведения фазовых траекторий и, следовательно, температуры фазового перехода. Это происходит несмотря на отсутствие ИК-устойчивых фиксированных точек уравнения РГ, влияющих на поведение в окрестности точки фазового перехода. Отметим, что упомянутые выше результаты получены для реальных размерностей пространства $D = 3$, $D = 2$.

Мы надеемся более детально исследовать фазовый переход в рассматриваемой модели в последующих работах.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 1.2-02-00874-а) и СПбГУ (грант № 11.38.636.2013).

Список литературы

- [1] М. В. Комарова, М. Ю. Налимов, Ю. Хонконен, *ТМФ*, **176**:1 (2013), 89–97.
- [2] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Добросвет, М., 2006.
- [3] А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике*, Изд-во ЛГУ, Л., 1976.
- [4] M. I. Katsnelson, *Graphene: Carbon in Two Dimensions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
- [5] А. Н. Васильев, *Квантовополева ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.
- [6] P. Calabrese, P. Parruccini, A. I. Sokolov, *Phys. Rev. B*, **68**:9 (2003), 094415, 8 pp.
- [7] P. Calabrese, E. V. Orlov, P. Parruccini, A. I. Sokolov, *Phys. Rev. B*, **67**:2 (2003), 024413, 9 pp., arXiv: cond-mat/0207187.
- [8] P. Calabrese, P. Parruccini, A. I. Sokolov, *Phys. Rev. B*, **66**:18 (2002), 180403, 4 pp., arXiv: cond-mat/0205046.
- [9] P. Calabrese, P. Parruccini, A. I. Sokolov, *Phys. Rev. B*, **68**:9 (2003), 094415, 8 pp., arXiv: cond-mat/0304154.
- [10] S. A. Antonenko, A. I. Sokolov, K. B. Varnashev, *Phys. Lett. A*, **208**:1–2 (1995), 161–164, arXiv: cond-mat/9803377.
- [11] S. A. Antonenko, A. I. Sokolov, *Phys. Rev. B*, **49**:22 (1994), 15901–15912, arXiv: cond-mat/9809306.
- [12] Л. Н. Липатов, *ЖЭТФ*, **72**:2 (1977), 411–427.
- [13] J. A. M. Vermaseren, *New features of FORM*, arXiv: math-ph/0010025.
- [14] J. Honkonen, M. V. Komarova, M. Yu. Nalimov, *Nucl. Phys. B*, **714**:3 (2005), 292–306, arXiv: hep-th/0412256.
- [15] М. В. Комарова, М. Ю. Налимов, *ТМФ*, **126**:3 (2001), 409–426.
- [16] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [17] H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 -Theories*, World Sci., Singapore, 2001.
- [18] М. Ю. Налимов, В. А. Сергеев, Л. Сладкофф, *ТМФ*, **159**:1 (2009), 96–108.

Поступила в редакцию 17.05.2014,
после доработки 29.05.2014