Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, А. А. Юшканов, Магнитная восприимчивость и диамагнетизм Ландау квантовой столкновительной вырожденной плазмы, *ТМФ*, 2015, том 183, номер 3, 477–485

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8716>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:15:57

© 2015 г.

А. В. Латышев*, А. А. Юшканов*

МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ И ДИАМАГНЕТИЗМ ЛАНДАУ КВАНТОВОЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ ПЛАЗМЫ

С использованием корректного выражения электрической проводимости квантовой столкновительной вырожденной плазмы дается кинетическое описание магнитной восприимчивости и выводится формула для вычисления диамагнетизма Ландау.

Ключевые слова: квантовая столкновительная плазма, электрическая проводимость, магнитная восприимчивость, диамагнетизм Ландау.

DOI: 10.4213/tmf8716

1. ВВЕДЕНИЕ

Намагниченность электронного газа в слабых магнитных полях складывается из двух независимых частей (см., например, [1]): из парамагнитной намагниченности, связанной с собственным (спиновым) магнитным моментом электронов (*парамагнетизм Паули*), и из диамагнитной намагниченности, связанной с квантованием орбитального движения электронов в магнитном поле (*диамагнетизм Ландау*).

Диамагнетизм Ландау до сих пор рассматривался для газа свободных электронов. Было показано, что наряду с оригинальным подходом, развитым Ландау, выражение для диамагнетизма электронного газа может быть получено на основе кинетического подхода [2]–[4]. При этом кинетическим методом вычисляется поперечная диэлектрическая проницаемость, а на ее основе вычисляется величина диамагнитного отклика.

Однако такие вычисления до сих пор проводились только для бесстолкновительного случая. Дело в том, что корректное выражение для поперечной диэлектрической проницаемости квантовой плазмы было известно до сих пор только для газа свободных электронов. Известные выражения для поперечной диэлектрической проницаемости в столкновительном случае давали неверный переход к классическому случаю [5] и, соответственно, были некорректны.

*Московский государственный областной университет, Москва, Россия.
E-mail: avlatyshev@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

В работе [6] основной результат для невырожденного газа свободных электронов связывает средний орбитальный магнитный момент (термодинамическое свойство) с электрическим сопротивлением, которое характеризует транспортные свойства материала. В работе [6] обсуждалась важная проблема влияния диссипации (столкновений) на диамагнетизм Ландау.

В настоящей работе анализ этой проблемы дается с использованием точного выражения поперечной проводимости квантовой плазмы.

В работе [7] показано, что классическая система заряженных частиц (электронов), движущихся по сфере, имеет ненулевой орбитальный диамагнитный момент. При этом рассматривается диэлектрическая микросфера, покрытая тонким слоем проводящего полупроводника со специальными свойствами.

В работе [8] было впервые получено выражение для квантовой поперечной диэлектрической проницаемости вырожденной плазмы, удовлетворяющее всем необходимым требованиям совместимости.

В настоящей работе с использованием корректного выражения для поперечной проводимости [8] впервые дается кинетическое описание магнитной восприимчивости квантовой столкновительной вырожденной плазмы. Выводится формула для вычисления диамагнетизма Ландау вырожденной столкновительной плазмы.

2. МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ КВАНТОВОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ ПЛАЗМЫ

В настоящей работе мы будем использовать подход, впервые разработанный в работе [2]. Будем предполагать, что температура плазмы много меньше энергии Ферми. Поскольку для металлов энергия Ферми составляет десятки тысяч градусов Кельвина, это предположение выполняется, по сути дела, всегда.

Будем также предполагать, что электромагнитное поле достаточно слабое. Это значит, что можно линеаризовать по его величине кинетическое уравнение [2]–[4]. Подобный же подход был использован в классической работе [2].

Для учета рассеяния электронов будем использовать τ -модель (при этом частота столкновений электронов $\nu = 1/\tau$). Эта модель хорошо работает в том случае, когда доминирует рассеяние электронов на примесях [9]. Этот же подход использовался Мермином при описании квантовой продольной диэлектрической проницаемости [10].

Вектор намагниченности электронной плазмы $\mathbf{M}$ связан с плотностью тока $\mathbf{j}$ следующим выражением [11]: $\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$, где c – скорость света. Связь намагниченности $\mathbf{M}$ с напряженностью магнитного поля $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ дается выражением $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} = \chi \operatorname{rot} \mathbf{A}$, где χ – магнитная восприимчивость, $\mathbf{A}$ – векторный потенциал плазмы. Из двух последних равенств для плотности тока получаем

$$\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} = c \chi \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = c \chi [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}].$$

Пусть скалярный потенциал равен нулю. Векторный потенциал возьмем ортогональным направлению волнового вектора $\mathbf{q}$ ($\mathbf{qA} = 0$) в виде бегущей гармонической волны:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{qr} - \omega t)}.$$

Такое векторное поле является соленоидальным: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Следовательно, для плотности тока получаем равенство

$$\mathbf{j} = -c\chi\Delta\mathbf{A} = c\chi q^2\mathbf{A}.$$

С другой стороны, связь электрического поля $\mathbf{E}$ и векторного потенциала

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{A}$$

приводит к соотношению

$$\mathbf{j} = \sigma_{\text{tr}}\mathbf{E} = \sigma_{\text{tr}}\frac{i\omega}{c}\mathbf{A},$$

где σ_{tr} – поперечная электрическая проводимость. Для нашего случая теперь получаем следующее выражение для магнитной восприимчивости:

$$\chi = \frac{i\omega}{c^2 q^2} \sigma_{\text{tr}}. \quad (1)$$

Выражение поперечной проводимости вырожденной столкновительной плазмы определяется общей формулой [8]:

$$\sigma_{\text{tr}}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = \sigma_0 \frac{i\nu}{\omega} \left(1 + \frac{\omega J(\mathbf{q}, \omega, \nu) + i\nu J(\mathbf{q}, 0, 0)}{\omega + i\nu} \right), \quad (2)$$

где σ_0 – статическая проводимость, $\sigma_0 = e^2 N / m\nu$, N – концентрация (числовая плотность) частиц плазмы, e и m – соответственно заряд и масса электрона, ν – эффективная частота столкновений частиц плазмы,

$$J(\mathbf{q}, 0, 0) = \frac{\hbar^2}{8\pi^3 m N} \int \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{\mathcal{E}_{\mathbf{k}} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \mathbf{k}_{\perp}^2 d^3 k,$$

$$J(\mathbf{q}, \omega, \nu) = \frac{\hbar^2}{8\pi^3 m N} \int \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{\mathcal{E}_{\mathbf{k}} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)} \mathbf{k}_{\perp}^2 d^3 k,$$

$f_{\mathbf{k}} = \Theta(\mathcal{E}_{\mathbf{k}} - \mathcal{E}_{\text{F}})$, $\Theta(x)$ – функция Хевисайда, $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m$ – энергия электронов, $\mathcal{E}_{\text{F}} = mv_{\text{F}}^2 / 2$ – энергия электронов на поверхности Ферми, v_{F} – скорость электрона на поверхности Ферми, которая считается сферической, $\hbar$ – постоянная Планка, $\mathbf{k}_{\perp}^2 = \mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}\mathbf{q}/q)^2$.

Согласно (1) и (2) магнитная восприимчивость квантовой столкновительной вырожденной плазмы равна

$$\chi(\mathbf{q}, \omega, \nu) = -\frac{e^2 N}{mc^2 q^2} \left(1 + \frac{\omega J(\mathbf{q}, \omega, \nu) + i\nu J(\mathbf{q}, 0, 0)}{\omega + i\nu} \right). \quad (3)$$

Видно, что при $\omega = 0$ частота столкновений частиц плазмы ν выпадает из формулы (3). Следовательно, магнитная восприимчивость в статическом пределе не зависит от частоты столкновений плазмы и имеет следующий вид:

$$\chi(\mathbf{q}, 0, \nu) = -\frac{e^2 N}{mc^2 q^2} \left[1 + \frac{\hbar^2}{8\pi^3 m N} \int \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{\mathcal{E}_{\mathbf{k}} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \mathbf{k}_{\perp}^2 d^3 k \right]. \quad (4)$$

Из выражения (3) видно, что магнитная восприимчивость в бесстолкновительной квантовой вырожденной плазме равна

$$\chi(\mathbf{q}, \omega, 0) = -\frac{e^2 N}{mc^2 q^2} \left[1 + \frac{\hbar^2}{8\pi^3 m N} \int \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{\mathcal{E}_{\mathbf{k}} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar\omega} \mathbf{k}_{\perp}^2 d^3 k \right]. \quad (5)$$

При $\omega \rightarrow 0$ формула (5) переходит в формулу (4).

Выведем формулу для вычисления магнитной восприимчивости квантовой столкновительной вырожденной плазмы.

После очевидной линейной замены переменных формула для интеграла $J(\mathbf{q}, \omega, \nu)$ преобразуется к виду

$$J = \frac{\hbar^2}{8\pi^3 m N} \int \frac{(\mathcal{E}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \mathcal{E}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - 2\mathcal{E}_{\mathbf{k}}) f_{\mathbf{k}} \mathbf{k}_{\perp}^2 d^3 k}{[\mathcal{E}_{\mathbf{k}} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)][\mathcal{E}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}} - \hbar(\omega + i\nu)]}. \quad (6)$$

Введем безразмерные переменные

$$z = \frac{\omega + i\nu}{k_F v_F} = x + iy, \quad x = \frac{\omega}{k_F v_F}, \quad y = \frac{\nu}{k_F v_F}, \quad Q = \frac{q}{k_F}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu) &= 2\mathcal{E}_F Q \left(K_x - \frac{z}{Q} - \frac{Q}{2} \right), \\ \mathcal{E}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}} - \hbar(\omega + i\nu) &= 2\mathcal{E}_F Q \left(K_x - \frac{z}{Q} + \frac{Q}{2} \right), \\ \mathcal{E}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \mathcal{E}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - 2\mathcal{E}_{\mathbf{k}} &= 2\mathcal{E}_F Q^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что для вырожденной плазмы $k_F^3 = 3\pi^2 N$, на основании (6) получаем

$$J(Q, z) = \frac{3}{8\pi} \int \frac{f_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_{\perp}^2 d^3 K}{(K_x - z/Q)^2 - (Q/2)^2}, \quad (7)$$

где

$$f_{\mathbf{K}} = \Theta(1 - \mathbf{K}^2), \quad \mathbf{K}_{\perp}^2 = K_y^2 + K_z^2.$$

Теперь формула (3) для магнитной восприимчивости записывается в виде

$$\chi(Q, x, y) = -\frac{e^2 v_F}{3\pi^2 \hbar c^2 Q^2} \left(1 + \frac{xJ(Q, z) + iyJ(Q, 0)}{x + iy} \right). \quad (8)$$

Здесь согласно (7)

$$\begin{aligned} J(Q, z) &= \frac{3}{16} \int_{-1}^1 \frac{(1 - \tau^2)^2 d\tau}{(\tau - z/Q)^2 - (Q/2)^2} = -\frac{5}{8} + \frac{3z^2}{4Q^2} + \frac{3Q^2}{32} + \\ &+ \frac{3}{16Q} \left[\left(1 - \frac{z^2}{Q^2} \right)^2 + \frac{Q^4}{16} - \frac{Q^2}{2} + \frac{3z^2}{2} \right] \ln \frac{(1 - Q/2)^2 - (z/Q)^2}{(1 + Q/2)^2 - (z/Q)^2} - \\ &- \frac{3zQ}{32} \left[1 + \frac{4}{Q^2} \left(1 - \frac{z^2}{Q^2} \right) \right] \ln \frac{(1 - z/Q)^2 - (Q/2)^2}{(1 + z/Q)^2 - (Q/2)^2}, \\ J(Q, 0) &= -\frac{5}{8} + \frac{3Q^2}{32} + \frac{3(4 - Q^2)^2}{256Q} \ln \left(\frac{2 - Q}{2 + Q} \right)^2. \end{aligned}$$

3. ДИАМАГНЕТИЗМ ЛАНДАУ КВАНТОВОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Диамагнетизм Ландау в бесстолкновительной плазме обычно определяется как магнитная восприимчивость в статическом пределе для однородного внешнего магнитного поля. Таким образом, величину диамагнетизма Ландау можно найти с помощью формулы (1), вычислив два некоммутативных предела (обоснование этого подхода можно найти в [2], [3]):

$$\chi_L = \lim_{q \rightarrow 0} \left[\lim_{\omega \rightarrow 0} \chi(q, \omega, \nu) \right]_{\nu=0}. \quad (9)$$

В бесстолкновительной плазме выражение (9) должно приводить к известной формуле диамагнетизма Ландау:

$$\chi_L = -\frac{1}{3} \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right)^2 \frac{p_F m}{\pi^2 \hbar^3} = -\frac{e^2 v_F}{12\pi^2 \hbar c^2}. \quad (10)$$

Выведем с помощью выражения (8) формулу диамагнетизма Ландау (10). При $z = iy = 0$ из формулы (8) для магнитной восприимчивости квантовой бесстолкновительной вырожденной плазмы получаем выражение

$$\begin{aligned} \chi(Q) &= -\frac{e^2 v_F}{3\pi^2 \hbar c^2 Q^2} \left[1 + \frac{3}{8\pi} \int \frac{f_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_{\perp}^2 d^3 K}{K_x^2 - (Q/2)^2} \right] = \\ &= -\frac{e^2 v_F}{3\pi^2 \hbar c^2 Q^2} \left[1 + \frac{3}{16} \int_{-1}^1 \frac{(1 - \tau^2)^2 d\tau}{\tau^2 - (Q/2)^2} \right], \end{aligned}$$

или в явном виде

$$\chi(Q) = -\frac{e^2 N}{mc^2 k_F^2 Q^2} \left[\frac{3}{8} + \frac{3}{32} Q^2 + \frac{3(Q^2 - 4)^2}{128Q} \ln \left| \frac{2 - Q}{2 + Q} \right| \right]. \quad (11)$$

Замечая, что при малых Q

$$\frac{1}{Q} \ln \frac{1 - Q/2}{1 + Q/2} = -1 - \frac{Q^2}{12} - \dots,$$

на основании (11) находим известное выражение для диамагнетизма Ландау вырожденного электронного газа:

$$\chi_L = \lim_{Q \rightarrow 0} \chi(Q) = -\frac{e^2 k_F}{12\pi^2 mc^2} = -\frac{e^2 v_F}{12\pi^2 c^2 \hbar}. \quad (12)$$

Рис. 1. Диамагнитная восприимчивость в случае $\omega = 0$ в бесстолкновительной плазме ($\nu = 0$).

Поделив (11) на (12), получаем относительную магнитную восприимчивость для квантовой бесстолкновительной плазмы в статическом пределе (см. рис. 1):

$$\frac{\chi(Q)}{\chi_L} = \frac{4}{Q^2} \left[\frac{3}{8} + \frac{3}{32} Q^2 + \frac{3(Q^2 - 4)^2}{128Q} \ln \left| \frac{2 - Q}{2 + Q} \right| \right].$$

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Перепишем формулу (8) в виде

$$\frac{\chi(Q, z)}{\chi_L} = \frac{4}{Q^2} \left(1 + \frac{xJ(Q, z) + iyJ(Q, 0)}{x + iy} \right). \quad (13)$$

Будем использовать эту формулу для графического исследования магнитной восприимчивости.

Из рис. 1 видно, что в квантовой бесстолкновительной плазме ($\nu = 0$) в статическом пределе ($\omega = 0$) магнитная восприимчивость является монотонно убывающей до нуля функцией волнового числа.

На рис. 2, 3 представлены зависимости магнитной восприимчивости бесстолкновительной плазмы от волнового числа (рис. 2) и от безразмерной частоты колебаний электромагнитного поля x (рис. 3).

Из рис. 2 видно, что магнитная восприимчивость является монотонно убывающей функцией волнового числа при всех значениях частоты колебаний электромагнитного поля. При этом для всех $x < 1$ значения магнитной восприимчивости тем больше, чем больше величина частоты колебаний электромагнитного поля.

Из рис. 3 видно, что магнитная восприимчивость как функция частоты колебаний поля имеет максимум, который с ростом Q сдвигается вправо.

На рис. 4, 5 представлены зависимости действительной (рис. 4) и мнимой (рис. 5) частей магнитной восприимчивости от величины безразмерной частоты колебаний поля в случае $Q = 0.5$.

Рис. 2. Магнитная восприимчивость бесстолкновительной плазмы: кривые 1, 2, 3, 4 отвечают значениям параметра $x = 0, 0.01, 0.1, 1$.

Рис. 3. Магнитная восприимчивость бесстолкновительной плазмы, кривые 1, 2, 3 отвечают значениям параметра $Q = 0.45, 0.50, 0.55$.

Из рис. 4 видно, что действительная часть имеет максимум, который смещается вправо с ростом частоты столкновений частиц плазмы. Независимо от частоты столкновений частиц плазмы с ростом частоты колебаний электромагнитного поля величина действительной части магнитной восприимчивости выходит сверху на свою асимптотику

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left(\frac{\chi(Q, x, y)}{\chi_L} \right) = \frac{4}{Q^2}.$$

Рис. 4. Действительная часть диамагнитной восприимчивости в случае $Q = 0.5$, кривые 1, 2, 3 отвечают значениям параметра $y = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$.

Рис. 5. Мнимая часть диамагнитной восприимчивости в случае $Q = 0.5$, кривые 1, 2, 3 отвечают значениям параметра $y = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$.

Не приводя соответствующих графиков, сообщим, что с уменьшением величины волнового числа максимум магнитной восприимчивости сдвигается влево и становится резким при малых значениях частоты столкновений частиц плазмы. С ростом частоты столкновений максимум начинает сглаживаться и пропадает.

Из рис. 5 видно, что мнимая часть магнитной восприимчивости как функция безразмерной частоты колебаний электромагнитного поля имеет минимум. Этот минимум сдвигается влево с ростом частоты столкновений частиц плазмы. С ростом безразмерной частоты колебаний электромагнитного поля мнимая часть магнитной восприимчивости выходит снизу на свою асимптотику $\text{Im}(\chi/\chi_L) = 0$. Отметим, что

минимум мнимой части не пропадает ни с ростом частоты столкновений частиц плазмы, ни с ростом безразмерного волнового числа.

Отметим, что чем меньше частота столкновений частиц плазмы, тем больше значения действительной и мнимой частей магнитной восприимчивости.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе дано кинетическое описание магнитной восприимчивости квантовой столкновительной вырожденной плазмы с использованием ранее выведенной корректной формулы для электрической проводимости квантовой плазмы. Используется влияние столкновений частиц плазмы на магнитную восприимчивость. Тем самым дается ответ на вопрос о влиянии диссипации на диамагнетизм Ландау, поставленный в работе [6]. Для бесстолкновительной плазмы с помощью кинетического подхода выведена известная формула диамагнетизма Ландау.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. 5: *Статистическая физика. Часть 1*, Физматлит, М., 1995.
- [2] Ю. Климонтович, В. П. Силин, *ЖЭТФ*, **23** (1952), 151–160.
- [3] Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, *УФН*, **70**:2 (1960), 247–286.
- [4] В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Атомиздат, М., 1961.
- [5] K. L. Kliewer, R. Fuchs, *Phys. Rev.*, **181**:2 (1969), 552–558.
- [6] S. Dattagupta, A. M. Jayannavar, N. Kumar, *Current Sci.*, **80**:7 (2001), 861–863.
- [7] N. Kumar, K. V. Kumar, *Europhys. Lett.*, **86**:1 (2009), 17001, 5 pp., arXiv: 0811.3071.
- [8] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ТМФ*, **175**:1 (2013), 132–143.
- [9] А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, М., 1987.
- [10] N. D. Mermin, *Phys. Rev. B*, **1**:5 (1970), 2362–2363.
- [11] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 8: *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1992.

Поступила в редакцию 23.05.2014,
после доработки 2.12.2014