Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Франке, В. С. Цендровский, Альтернативные описания физических систем, основанные на теории возмущений, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 2, 322–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8719>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 16:11:17

© 2014 г. В. А. Франке*, В. С. Цендровский*

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ОПИСАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОСНОВАННЫЕ НА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В квантовой физике теория возмущений до какого-либо конечного порядка по константе связи содержит в себе неположительно определенное скалярное произведение физических волновых функций или неунитарную эволюцию состояний. Из-за этого нельзя считать ее согласованной теорией, описывающей реальность. Эта проблема решается за счет модификации скалярного произведения волновых функций и умножения динамических переменных. Полученные решения могут быть использованы для альтернативного описания квантовых физических систем, согласующегося с экспериментом с заданной точностью.

Ключевые слова: унитарность эволюции, положительные вероятности, теория возмущений.

DOI: 10.4213/tmf8719

1. ВВЕДЕНИЕ

Некоторые физические теории проверены лишь с точностью до нескольких первых порядков по константе связи. Например, теория гравитации проверена лишь до второго порядка [1]. В классической физике расчеты по теории возмущений могут быть сделаны непротиворечивым образом, если обеспечить отщепление нефизических степеней свободы (продольных фотонов в электродинамике, продольных гравитонов в теории гравитации [2]–[4]). А в теориях, описывающих движение материальной точки, даже этого не требуется. Таким образом, если некоторая классическая теория проверена до какого-либо порядка теории возмущений, мы можем только ею, теорией возмущений, и ограничиться в описании наблюдаемых с заданной точностью.

Поэтому и в квантовой физике возникает желание ограничиться теорией возмущений, считая, что именно она может описывать наблюдаемые явления с достаточной точностью. В частности, если бы квантовая гравитация могла быть сформулирована на основе конечного ряда теории возмущений, можно было бы избежать

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: franke@pobox.spbu.ru, ccvs@mail.ru

сложностей, связанных с ее неперенормируемостью, в силу ограниченности ряда T -экспоненты. Кроме того, на этом пути могут быть найдены альтернативные теории гравитации [3].

Однако к квантовой теории, претендующей на корректное описание реальности, есть как минимум два требования: во-первых, эволюция состояния в замкнутой системе должна быть унитарной, а во-вторых, скалярное произведение любой физической волновой функции с самой собой должно быть положительным.

Убедимся сначала, что теория возмущений по константе связи (или по количеству вершин в диаграммах Фейнмана, что аналогично) не удовлетворяет либо требованию положительности скалярного произведения, либо требованию унитарности эволюции.

Рассмотрим это на простом примере квантовой механики. Пусть у нас есть исходная теория с эрмитовым гамильтонианом $H(x, \dot{x}, \alpha)$, где α – константа связи, в ней имеются волновые функции φ и скалярное произведение двух волновых функций $(\varphi'(t), \varphi(t))$. Будем использовать представление Шредингера. В этой теории скалярное произведение положительно и сохраняется во времени:

$$\frac{d}{dt}(\varphi'(t), \varphi(t)) = (iH\varphi', \varphi) + (\varphi', iH\varphi) = (\varphi', -iH\varphi) + (\varphi', iH\varphi) = 0. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим теорию возмущений по константе связи α до 1-го порядка. При этом гамильтониан H превратится в сумму $H = H_0 + \alpha H_1$ и волновые функции тоже можно представить в виде ряда $\varphi = \varphi_0 + \alpha\varphi_1$. Тогда, если после умножения двух величин появляются члены порядка α^2 , мы их отбрасываем.

Убедимся в том, что скалярное произведение волновых функций,

$$\frac{d}{dt}(\varphi'(t), \varphi(t)) = (iH\varphi', \varphi) + (\varphi', iH\varphi) = (X),$$

сохраняется со временем в главных порядках теории возмущений. Подставим φ и H в виде суммы ряда по константе связи,

$$\begin{aligned} (X) = & (iH_0\varphi'_0, \varphi_0) + (\varphi_0, iH_0\varphi_0) + \alpha((iH_0\varphi'_0, \varphi_1) + (iH_1\varphi'_0, \varphi_0) + (iH_0\varphi'_1, \varphi_0) + \\ & + (\varphi'_0, iH_1\varphi_0) + (\varphi'_0, iH_0\varphi_1) + (\varphi'_1, iH_0\varphi_0)) + \\ & + [\alpha^2((\varphi'_1, iH_0\varphi_1) + (\varphi'_1, iH_1\varphi_0) + (iH_1\varphi'_0, \varphi_1) + (iH_0\varphi'_1, \varphi_1))] = (Y), \end{aligned}$$

где член в квадратных скобках, пропорциональный α^2 , считаем несущественным. Предположив эрмитовость операторов H_0 и H_1 , сокращаем практически все члены, кроме

$$(Y) = [\alpha^2(\varphi'_1, iH_1\varphi_0) - \alpha^2(\varphi'_0, iH_1\varphi_1)]. \quad (2)$$

Так как мы пренебрегаем членами порядка α^2 , то это выражение ~ 0 . Таким образом, с заданной точностью сохраняется скалярное произведение волновых функций.

Однако такое скалярное произведение неположительно. Рассмотрим скалярное произведение

$$(\varphi_0 + \alpha\varphi_1, \varphi_0 + \alpha\varphi_1) = (\varphi_0, \varphi_0) + \alpha((\varphi_1, \varphi_0) + (\varphi_0, \varphi_1)) + [\alpha^2(\varphi_1, \varphi_1)]. \quad (3)$$

Отбрасывая члены в квадратных скобках, получаем знаконеопределенное выражение. Если же мы хотим положительности, нам следует оставить члены в квадратных скобках в скалярном произведении или что-либо добавить. Если мы не пренебрегаем членами второго порядка по константе связи, тогда скалярное произведение становится положительным, но меняется со временем (2) и эволюция состояния неунитарна.

Поиску решения этой проблемы и посвящена настоящая работа. В разделе 2 рассматривается теория колец столбцов чисел, дополненная скалярным произведением. В разделе 3 показана связь между этой теорией и теорией возмущений по константе связи. В разделе 4 приведены примеры теории с положительным скалярным произведением. В разделе 5 исследованы возможности добиться конечности рядов T -экспоненты при положительном скалярном произведении. В разделе 6 рассмотрены некоторые физические модели и обсуждаются вопросы их спектра.

Мы рассматриваем полностью положительное скалярное произведение и так меняем структуру теории возмущений, чтобы обеспечить унитарность эволюции. Однако получаемые решения могут не иметь с теорией возмущений ничего общего, кроме схожей структуры, и можно искать решение, наиболее близкое к теории возмущений.

Варианты теории с неположительным скалярным произведением приводят к возникновению духов. Эти варианты будут рассмотрены в следующих публикациях.

В качестве конкретного пути решения выбран следующий вариант: из различных порядков величины, разлагаемой в ряд, мы формируем столбец и вводим операцию перемножения этих столбцов. Далее мы вводим скалярное произведение этих столбцов. После этого стремимся обеспечить сходство с теорией возмущений, сохранив положительность скалярного произведения и унитарность эволюции.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА КОНЕЧНЫХ РЯДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

2.1. Кольцо. Рассмотрим ассоциативное коммутативное кольцо F с единицей [5] над полем комплексных чисел. Его элементы – столбцы, состоящие из $N + 1$ комплексных чисел:

$$f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Произведение элементов задается с помощью структурных констант:

$$h = f \cdot g, \quad (5)$$

$$h_i = A_i^{j,k} f_j g_k. \quad (6)$$

Перечислим основные свойства таких колец:

а) коммутативность

$$A_i^{j,k} = A_i^{k,j}; \quad (7)$$

б) ассоциативность (в предположении, что (7) верно)

$$A_i^{j,k} A_j^{p,q} = A_i^{j,p} A_j^{k,q}; \quad (8)$$

в) существование единицы I такой, что $I \cdot f = f$ для любого f , т.е. наличие решения у уравнения

$$A_i^{j,k} I_j = \delta_i^k \quad (9)$$

относительно I .

2.2. Скалярное произведение и сопряжение. Наряду со столбцом f рассмотрим столбец f^* комплексно-сопряженных чисел. Индексы таких столбцов снабжаем точкой. Очевидно, что умножение столбцов комплексно-сопряженных чисел производится с помощью комплексно-сопряженных коэффициентов $A_m^{\dot{p},\dot{q}*}$.

Введем на элементах кольца скалярное произведение – билинейную положительную форму:

$$\begin{aligned} (F, F) &\rightarrow C, \\ (f, f) &> 0 \quad \forall f \neq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Скалярное произведение будем задавать строго положительной эрмитовой матрицей B :

$$(f, g) = B^{k,l} f_k^* g_l. \quad (11)$$

Введем сопряжение для элементов кольца. Пусть задан столбец h . Тогда сопряженным столбцом будет называться такая величина $\tilde{h}$, что

$$(f, h \cdot g) = (\tilde{h} \cdot f, g) \quad (12)$$

для любых f и g . Согласно (6) и (11)

$$\begin{aligned} (f, h \cdot g) &= B^{k,l} A_l^{m,n} f_k^* h_m g_n, \\ (\tilde{h} \cdot f, g) &= B^{k,l} A_k^{\dot{m},\dot{s}*} \tilde{h}_m^* f_s^* g_l. \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая произвольность f и g , получим уравнение

$$B^{\dot{k},s} A_s^{m,n} h_m = B^{n,\dot{p}*} A_p^{\dot{m},\dot{k}*} \tilde{h}_m^*. \quad (14)$$

Чтобы обеспечить достаточную общность, будем искать решение этого уравнения в виде

$$\tilde{h}_m = D_m^{\dot{k}} (h_k^*)^*, \quad (15)$$

где D – числа, возможно комплексные.

Сделаем еще одно допущение: будем считать D одинаковым для всех столбцов. Тогда в силу произвольности h равенство (14) примет вид

$$B^{\dot{p},l} A_l^{k,n} = B^{n,\dot{s}^*} A_s^{\dot{m},\dot{p}^*} D_{\dot{m}}^{k^*}. \quad (16)$$

Здесь мы можем поменять местами то, что дано, и то, что мы ищем. В самом деле, полученная система уравнений далеко не всегда имеет решение относительно D , так как уравнений в ней больше, чем переменных. Однако мы можем считать исходными величинами D и искать подходящие A .

Потребуем, чтобы дважды сопряженный столбец был равен исходному, откуда следует, что

$$D_k^{m*} D_m^i = \delta_k^i. \quad (17)$$

Покажем, что столбец, сопряженный единичному, является единичным. Для этого рассмотрим произвольные столбцы x и y . Для них, очевидно, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, Iy) = (\tilde{I}x, y), \\ (x, y) &= (Ix, y), \end{aligned} \quad (18)$$

из которых при $y = (\tilde{I} - I)x$ следует, что

$$((\tilde{I} - I)x, (\tilde{I} - I)x) = 0. \quad (19)$$

В нашей схеме скалярное произведение является строго положительно-определенным. А значит, из полученного соотношения вытекает, что

$$(\tilde{I} - I)x = 0 \quad \forall x. \quad (20)$$

Подставив $x = I$, получаем

$$\tilde{I} = I. \quad (21)$$

2.3. Преобразования базиса. В дальнейшем мы будем проводить преобразования базиса, в котором задаются столбцы, с целью выбора наиболее удобного вида B или A . Пусть произвольная комплексная матрица Λ с ненулевым детерминантом задает преобразование. Рассмотрим четыре каких-либо столбца с различными индексами и выпишем закон преобразования

$$\begin{aligned} \Omega^k &= \Omega'^m \Lambda_m^{-1k}, \\ \Delta_k &= \Lambda_k^m \Delta'_m \\ \Phi^{\dot{k}} &= \Phi'^{\dot{m}} \Lambda_{\dot{m}}^{-1\dot{k}*}, \\ \Theta_{\dot{k}} &= \Lambda_{\dot{k}}^{\dot{m}*} \Theta'_{\dot{m}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Потребуем, чтобы скалярное произведение было инвариантом относительно таких преобразований.

Тогда тривиально проверить, что если величины f_k из F преобразуются, как указано в (22), то и остальные величины (A , B , D) будут преобразовываться аналогично в соответствии с имеющимися у них индексами. Все ранее указанные соотношения между A , B , D и I будут при этом сохраняться.

3. САМОСОГЛАСОВАННАЯ СХЕМА СТОЛБЦОВ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Итак, возникает схема столбцов, которая задается наборами чисел $A_a^{b,c}$, $B^{\dot{k},l}$, $D_p^{\dot{q}}$, I_s , подчиненных условиям

$$A_p^{q,k} = A_p^{k,j}, \quad (23)$$

$$A_p^{r,k} A_r^{m,n} = A_p^{r,m} A_r^{k,n}, \quad (24)$$

$$B^{\dot{p},q} x_p^* x_q > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad (25)$$

$$B^{\dot{m},s} A_s^{k,n} = B^{k,\dot{s}} A_s^{\dot{m},l^*} D_l^{n*}, \quad (26)$$

$$B^{\dot{p},q} = B^{q,\dot{p}*}, \quad (27)$$

$$D_p^{\dot{q}} D_q^{l*} = \delta_p^l, \quad (28)$$

$$A_m^{n,k} I_n = \delta_m^k, \quad (29)$$

$$D_s^{\dot{k}} I_k^* = I_s. \quad (30)$$

Нам потребуются не только столбцы чисел, но и столбцы операторов и столбцы функций состояния. Будем рассматривать их как элементы прямого произведения кольца столбцов чисел на множества операторов или волновых функций. При этом правила умножения остаются прежними.

Если задан набор чисел A , B , D и I , удовлетворяющий всем требованиям, то любую квантовую теорию можно корректно деформировать, заменив все встречающиеся числа, операторы и векторы состояния соответствующими столбцами (при этом оператор $a^\dagger$ заменяется на $\tilde{a}$). Ниже будет рассмотрен пример.

Легко видеть, что сохраняя в обычной теории возмущений только члены порядка не выше N по константе связи α , мы получим $A_m^{n,s} = \delta_m^{n+s}$ и $B^{\dot{p},q} = \theta(N-p-q)\alpha^{p+q}$. Такие величины A удовлетворяют перечисленным равенствам, но величины B этого вида не являются положительно-определенными. Поэтому нужно изменить B , что влечет за собой изменение A в соответствии с (26).

Также полезно сразу привести вариант этих равенств при $B^{\dot{p},q} = \delta^{\dot{p},q}$, чего при положительной величине B всегда можно добиться с помощью описанных выше преобразований. Это условие инвариантно относительно унитарных преобразований базиса. При этом верхний индекс с точкой становится эквивалентным нижнему без точки, а нижний индекс с точкой эквивалентен верхнему без точки. Мы выберем для дальнейшей работы верхние и нижние индексы без точек. Нижние с точкой заменим на верхние без точки, а верхние с точкой – на нижние без точек.

При этом условия на A, I, D приобретают следующий вид:

$$A_p^{q,k} = A_p^{k,q}, \quad (31)$$

$$A_p^{r,k} A_r^{m,n} = A_p^{r,m} A_r^{k,n}, \quad (32)$$

$$A_s^{k,n} = A_{s,l}^k D^{l,n*}, \quad (33)$$

$$D_{p,q} D^{q,l*} = \delta_p^l, \quad (34)$$

$$A_m^{n,k} I_n = \delta_m^k, \quad (35)$$

$$D_{s,k} I^{k*} = I_s. \quad (36)$$

4. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

4.1. Простой пример кольца столбцов. Мы ввели преобразования, позволяющие изменять B и, в частности, обратить B в единичную матрицу. В дальнейшем будем исходить из такого выбора B , обращаясь к другим B лишь в случае, когда это специально потребуется. При этом остается инвариантность относительно унитарных преобразований.

Рассмотрим частный случай, когда $B^{\dot{p},q} = \delta^{\dot{p},q}$ и, кроме того, $D_s^{\dot{p}} = D_{s,p} = \delta_{s,p}$, $A = A^*$.

В данном случае сохраняется инвариантность только относительно вещественных ортогональных преобразований, не нарушающих вещественности A . При этом индексы у исходных и сопряженных величин имеют одинаковую природу.

Возникающие условия на величины A приобретают вид (согласно (31)–(33))

$$A^{i,j,k} A^{k,m,n} = A^{i,m,k} A^{k,j,n}, \quad (37)$$

$$A^{i,j,k} = A^{i,k,j}, \quad (38)$$

$$A^{i,j,k} = A^{k,j,i}. \quad (39)$$

Последние два равенства приводят к тому, что все величины $A^{i,j,k}$ не меняются при любой перестановке индексов. Первое равенство означает, что матрицы $E^{(i)} = A^{m,i,n}$ коммутируют, будучи симметричными согласно (39). Коммутирующие симметричные матрицы можно одновременно диагонализировать ортогональным преобразованием. Но полученные матрицы еще не будут равны величинам A в новом базисе, так как мы преобразовали эти матрицы только по двум из трех индексов. Преобразование по третьему индексу ничего не изменит, так как сумма диагональных матриц диагональна. Итак, мы приведем величины E к диагональному виду. Но при этом матрицы B и D остаются единичными, т. е. мы не нарушим условий, первоначально введенных в этом разделе.

Возникает интересный случай: с одной стороны, величины $A^{i,j,k}$ симметричны по всем индексам, а с другой – $E^{(j)} = A^{i,j,k}$ диагональны. Это означает, что единственный возможный вид величин A следующий: при совпадающих индексах $A^{i,i,i}$ произвольно, а все остальные компоненты равны нулю. Иными словами, при перемножении двух и более столбцов они умножаются покомпонентно с некоторыми, разными для различных компонент, множителями.

Заметим, что исходная величина D имеет один верхний и один нижний индекс, а потому если она единична в каком-либо базисе, то и в остальных базисах, связанных с исходным вещественными преобразованиями, тоже единична. Потому если D единична, а A и B вещественны, то мы всегда можем привести A к только что указанному виду, сделав величину B единичной и сохранив единичность D .

4.2. Общий вид величин A , B , D для случая $N = 1$. Теперь, когда мы нашли один тривиальный случай, желательно найти более сложный вариант. В общем виде вычислительная сложность оказывается слишком большой, потому мы ограничимся случаем $N = 1$. Также, мы предположим, что $B = \delta$, так как любое другое строго положительное B может быть приведено к такому виду.

Запишем независимые уравнения ассоциативности:

$$\begin{aligned} A_0^{1,1} A_1^{0,0} &= A_0^{0,1} A_1^{0,1}, \\ A_0^{0,1} A_0^{0,1} + A_0^{1,1} A_1^{0,1} &= A_0^{0,0} A_0^{1,1} + A_0^{0,1} A_1^{1,1}, \\ A_1^{0,1} A_0^{0,0} + A_1^{1,1} A_1^{0,0} &= A_1^{0,0} A_0^{0,1} + A_1^{0,1} A_1^{0,1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Их общее решение имеет следующий вид:

$$A_0^{0,0} = cs + hg, \quad (41)$$

$$A_1^{1,1} = ag - hs, \quad (42)$$

$$A_0^{0,1} = ag, \quad (43)$$

$$A_1^{0,1} = cs, \quad (44)$$

$$A_1^{0,0} = cg, \quad (45)$$

$$A_0^{1,1} = as, \quad (46)$$

где a, c, s, h, g – произвольные числа.

Теперь потребуем существования единицы I . Мы можем без потери общности считать, что $I_1 = 0$. Напишем соответствующие уравнения:

$$\begin{aligned} I_0 &\equiv k \neq 0, \\ A_p^{0,k} I_0 &= \delta_{p,k}, \\ A_0^{0,0} &= \frac{1}{k}, \\ A_1^{0,1} &= \frac{1}{k}, \\ A_0^{0,1} &= 0, \\ A_1^{0,0} &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Сопоставим их с предыдущими уравнениями. Получим $cs = 1/k$. Отсюда $c \neq 0$ и $s \neq 0$, что в совокупности с (45) приводит к $g = 0$. Итак, получаем

$$\begin{aligned}
 A_0^{0,0} &= \frac{1}{k}, \\
 A_0^{0,1} &= 0, \\
 A_0^{1,1} &= as \equiv n, \\
 A_1^{0,0} &= 0, \\
 A_1^{0,1} &= \frac{1}{k}, \\
 A_1^{1,1} &= -hs \equiv m, \\
 I_l &= \delta_{0,l}k.
 \end{aligned} \tag{48}$$

В силу произвольности a и h коэффициенты $A_0^{1,1}$ и $A_1^{1,1}$ произвольны. Теперь надо учесть уравнения, содержащие B и D . Выше мы положили $B = \delta$.

Уравнения (33) при этих условиях имеют следующее решение:

$$\begin{aligned}
 D_{0,1} &= D_{1,0} = 0, \\
 D_{0,0} &= \frac{k}{k^*}, \\
 D_{1,1} &= kn^* = \frac{A_1^{1,1*}}{A_1^{1,1}}, \\
 A_0^{1,1} &= \frac{m}{m^*k^*} = \frac{A_1^{1,1}}{A_1^{1,1*}k^*}.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Очевидно, что такая величина D автоматически удовлетворяет условиям (34) и (36). Без потери общности мы можем считать k вещественным, так как у нас есть свобода выполнять унитарные преобразования. Полагая k вещественным, видим, что $D_{0,0} = 1$. Легко проверить, что при $D_{0,0} = 1$ и вещественных m и n возникает частный случай ситуации, описанной в п. 4.1. Однако при комплексных значениях m и n модель оказывается более сложной.

5. НЕОСУЩЕСТВИМОСТЬ ПРОСТЕЙШЕГО ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Наша исходная задача состояла в том, чтобы построить модель, которая походила бы на теорию возмущений, но была бы корректной точной теорией. Возникает вопрос, можно ли при этом сохранить простоту, присущую теории возмущений, обрванной на некотором порядке по константе связи.

Чтобы ответить на этот вопрос, выясним, существует ли такой столбец θ , который в некоторой степени дает 0. Если существует, тогда мы можем принять его в качестве столбца, заменяющего константу связи, тем самым точно обращая в нуль высшие порядки разложения T -экспоненты при расчете процессов.

Если такой столбец есть, то, положив $\gamma = \theta^M$, где M – соответствующим образом подобранная степень, получим равенство $\gamma^2 = 0$, или

$$A_k^{i,j} \gamma_i \gamma_j = 0 \quad (50)$$

для всех k , при $\gamma \neq 0$.

Посредством преобразований (22) мы можем обратить положительную эрмитову матрицу B в единичную. После этого у нас останется еще возможность совершать унитарные преобразования. С их помощью мы оставим у γ только последний элемент, а у I – нулевой и последний (что всегда возможно):

$$B^{i,j} = \delta^{i,j}, \quad (51)$$

$$\gamma_i = \delta_{i,N} \gamma_N, \quad (52)$$

$$I_i = \delta_{i,0} I_0 + \delta_{i,N} I_N. \quad (53)$$

Подставим γ вида (52) в (50). Получим равенство

$$A_i^{N,N} = 0. \quad (54)$$

Свернув его с $A_j^{k,i}$, с учетом (32) найдем

$$0 = A_i^{j,k} A_j^{N,N} = A_i^{j,N} A_j^{k,N}. \quad (55)$$

Подставим теперь I из равенства (53) в (35):

$$A_i^{0,l} I_0 + A_i^{N,l} I_N = \delta_i^l. \quad (56)$$

Полагая $l = N$, в силу (54) получаем

$$I_0 \neq 0, \quad (57)$$

$$A_i^{0,N} = \delta_i^N I_0^{-1}. \quad (58)$$

Для дальнейших рассуждений введем индексы α, β , пробегающие значения от 1 до $N - 1$.

В силу (55), (54) и (58) имеем

$$0 = A_N^{\beta,k} A_k^{N,N} = A_N^{N,k} A_k^{\beta,N}, \quad (59)$$

$$0 = I_0^{-1} A_0^{\beta,N} + A_N^{N,\alpha} A_\alpha^{\beta,N}, \quad (60)$$

$$A_0^{\beta,N} = -I_0 A_N^{N,\alpha} A_\alpha^{\beta,N}. \quad (61)$$

Теперь рассмотрим (33):

$$A_\beta^{N,l*} D_l^{N*} = A_N^{\beta,N}. \quad (62)$$

Используя (54) и (58), придем к равенству

$$A^{\beta}_{N,\alpha} {}^* D_N^{\alpha} {}^* = A_N^{\beta,N}. \quad (63)$$

И аналогично в силу (33), (54) и (58) получим

$$A^0_{N,\alpha} {}^* D_N^{\alpha} {}^* = A_N^{0,N} = I_0^{-1}. \quad (64)$$

Подставляя (61), а затем (63) в последнее равенство, получаем соотношение

$$-1 = I_0 {}^* I_0 A_N^N {}^* A_N^{N,\alpha}. \quad (65)$$

Очевидно, это невыполнимо. Поэтому столбца θ с нужными свойствами не существует, и точная модель, столь же простая, как оборванная теория возмущений, не может быть построена в рамках описанной схемы. Тем не менее схема представляет некоторый интерес, так как позволяет деформировать квантовые теории, хотя и без существенного упрощения.

6. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

6.1. Функции и производные. При рассмотрении большинства гамильтонианов возникает задача дифференцирования по динамической переменной. В приведенном ниже примере гармонического осциллятора в качестве динамической переменной выступает координата. При переходе к теории со столбцами вместо координаты-числа возникает координата-столбец. В то же время гамильтониан содержит производную по координате. Поэтому актуальна задача нахождения производной по столбцу.

Будем искать вид оператора производной из следующих соображений:

$$f(x + \delta x) - f(x) = \partial_x f \cdot \delta x + O(\delta x^2), \quad (66)$$

где x , δx , f , $\partial_x f$ – столбцы, причем f_i являются функциями компонент x_k .

Покажем, что не для любой гладкой функции компонент аргумента-столбца может быть найден соответствующий вид оператора $\partial_x f$.

Из общих принципов дифференцирования функций многих аргументов получаем

$$f_i(x + \delta x) - f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j + O(\delta x^2). \quad (67)$$

Приравнивая правые части равенств (66) и (67) и сокращая на δx , находим

$$A_i^{j,k} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}. \quad (68)$$

В правой части этого равенства стоит, вообще говоря, произвольная матрица, а в левой части – матрица особого класса. Поэтому для произвольной функции f от элементов аргумента-столбца это уравнение невыполнимо, и производную с указанными свойствами построить не удастся. Тем не менее для более узких классов функций построение возможно.

Рассмотрим столбец вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_i = K_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (69)$$

где $K_{i,j}$ – некоторые числа, и потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$A_i^{j,k} K_{j,l} \frac{\partial}{\partial x_l} x_k = I_i, \quad (70)$$

т. е.

$$A_i^{j,k} K_{j,k} = I_i. \quad (71)$$

Здесь уравнений меньше, чем неизвестных (K), а потому в общем виде система разрешима не единственным образом. Например, мы можем положить $K_{i,j} = I_i I_j$.

Также очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = \frac{\partial}{\partial x} f \cdot g + f \frac{\partial}{\partial x} g. \quad (72)$$

Легко видеть, что действие такой производной на функции типа

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{(i)} x^i, \quad (73)$$

где $f_{(i)}$ – столбцы чисел, одинаково при разных K .

На функции же других типов действие может быть разным в зависимости от выбора K , и могут не выполняться соотношения (66). Заметим, что хотя в теории без столбцов функции вида (73) достаточно общие, в теории со столбцами это очень специальный класс функций.

Мы не проверили, что нет более общего класса функций-столбцов, дифференцируемых в смысле (66). Но для дальнейших рассуждений нам достаточно двух утверждений:

- 1) нельзя построить производную в смысле (66) для произвольной гладкой функции от компонент аргумента;
- 2) для функций, имеющих вид ряда (73) по аргументу, производная существует.

6.2. Собственные значения операторов. В любой квантовой теории стоит задача поиска собственных функций и собственных значений операторов, соответствующих наблюдаемым величинам. Обычно собственное значение является числом. Однако в рассматриваемой теории возможны два варианта: во-первых, мы можем по аналогии с теорией возмущений считать собственное значение столбцом, а затем каким-либо образом получать из него одну наблюдаемую на эксперименте величину, а во-вторых, мы можем считать собственные числа обычными числами.

Рассмотрим оба эти подхода. В первом случае собственное значение является столбцом и уравнение на собственные значения выглядит следующим образом:

$$\widehat{M}\psi = m\psi, \quad (74)$$

где m умножается на ψ с помощью A . При этом подходе, однако, возникает проблема однозначности собственных значений. При некоторых ψ может существовать такой столбец m' , что $m'\psi = 0$ при всех значениях аргументов функции ψ . Тем самым собственное значение-столбец m становится неоднозначным с точностью до m' . Например, в теории возмущений все функции, у которых нулевой порядок равен нулю, обладают этим свойством. Но в теории возмущений мы обычно исключаем такие функции из рассмотрения, теряя тем самым некоторую область гильбертова пространства. И оставшееся множество функций-столбцов гильбертовым пространством уже не является.

Но есть и другая сторона этой проблемы. На эксперименте мы всегда измеряем собственное значение-число, а не столбец. Но при подходе (74) мы получаем собственное значение-столбец. Для применения построенной теории к описанию эксперимента мы вынуждены образовать из собственного значения-столбца одно число. Естественным путем это осуществимо с помощью сворачивания с каким-либо другим, заранее выбранным, столбцом, как это происходит в теории возмущений, где мы имеем столбец результатов, полученных в различных порядках по константе связи α , и сворачиваем его:

$$m_{\Sigma} = \sum_{k=0}^N \alpha^k m_k, \quad (75)$$

здесь m_{Σ} – наблюдаемое значение.

Здесь важно, чтобы собственное значение-столбец было единственным. Иначе нам придется выбрать столбец, с которым мы сворачиваем, таким, чтобы при сворачивании с m' он давал ноль. Для одного столбца m' это обеспечить возможно, но если имеются другие m' (например, для других собственных волновых функций), то придется выбрать этот столбец перпендикулярным ко всем m' . Как только столбцов m' станет больше $N + 1$, мы не сможем выбрать ненулевой столбец для сворачивания. Потому существование ненулевых столбцов m' недопустимо, а как это обеспечить в общем случае, неизвестно.

Другим подходом является использование в качестве собственного значения одного числа m :

$$M\psi = m\psi, \quad (76)$$

где столбец $m\psi$ состоит из компонент столбца ψ , умноженных на m .

Этот подход обеспечивает выполнение обычных соотношений в гильбертовом пространстве и корректность построенной теории. Но он, однако, не обеспечивает полного сходства этой теории с теорией возмущений. Возникающий спектр в общем виде может не иметь ничего общего со спектром исходной теории. Тем не менее далее мы остановимся лишь на втором подходе, а первый путь оставим для дальнейшего исследования.

6.3. Итерации гармонического осциллятора. Резкое упрощение существующих теорий оказалось невозможным при выбранном подходе. Тем не менее мы построили некоторую модель столбцов, позволяющую модифицировать исходную теорию. Из изложенного выше следует только, что мы не можем обрезать ряды T -экспоненты.

Выясним на примере, какими свойствами будут обладать возникающие теории. Рассмотрим гармонический осциллятор. Его гамильтониан в x -представлении равен

$$H = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + \omega^2 x^2). \quad (77)$$

Переходя к столбцам, оставим ω синглетным числом, а x заменим на столбец, состоящий из компонент x_i . С учетом приведенного вида производной по динамической переменной (см. (69)) мы можем построить гамильтониан:

$$\begin{aligned} H_i &= \frac{1}{2} \left(-A_i^{j,k} K_{j,m} K_{k,n} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_n} + \omega^2 A_i^{j,k} x_j x_k \right), \\ (H\psi)_i &= \frac{1}{2} \left(-A_i^{p,s} A_p^{j,k} K_{j,m} K_{k,n} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_n} + \omega^2 A_i^{p,s} A_p^{j,k} x_j x_k \right) \psi_s. \end{aligned} \quad (78)$$

В соответствии с п. 6.2 мы будем использовать обычное определение собственного значения:

$$(H\psi)_i = E\psi_i, \quad (79)$$

где E – число.

Сразу же встает вопрос о вырождении уровней энергии: у нас стало больше собственных значений, будут ли они дополнительно вырождены по сравнению с исходной теорией? Чтобы ответить на этот вопрос, выясним, какие вообще у нас возникли инвариантности. Относительно преобразований базиса гамильтониан не инвариантен, а только ковариантен. Относительно различных выборов $K_{i,j}$ имеет место та же ситуация, так как волновая функция-столбец вовсе не должна иметь вид (73), и, следовательно, инвариантности, порождающей вырождение уровней, не будет.

Таким образом, возникает расщепление уровней энергии по сравнению с исходной теорией.

Второй особенностью такой модели является зависимость результата от выбора K .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы пришли к выводу, что путем замены скалярного произведения и закона умножения мы можем получить новую теорию, схожую по своей структуре с теорией возмущений исходной теории, но обладающую двумя важными свойствами: скалярное произведение в ней положительно определено и развитие состояния во времени унитарно. Это позволяет альтернативным образом описывать физику исследуемого явления с заданной точностью. Однако сохранить простоту теории возмущений до какого-либо конечного порядка N , в которой имеется заведомо конечное число расходящихся диаграмм, оказывается невозможно.

Полученный результат можно использовать для незначительных модификаций исходной теории. Преимущества такого подхода в том, что мы можем варьировать теорию многими способами, выбирая тот, который более подходит с феноменологической точки зрения. При этом отличие величин A и B в такой теории от величин A и B в теории возмущений будет порядка α^{N+1} .

В пределе бесконечного N мы можем получить теорию, эквивалентную исходной теории в теории возмущений до бесконечного порядка.

Благодарности. Авторы выражают благодарность А. А. Андрианову за помощь в подготовке статьи. Работа выполнена на кафедре физики высоких энергий и элементарных частиц физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета и поддержана РФФИ (грант № 13-02-00127_a).

Список литературы

- [1] C. M. Will, *Living Rev. Relativ.*, **4** (2001), 2001-4, 97 pp., arXiv: gr-qc/0103036.
- [2] S. Deser, *Class. Quant. Grav.*, **4**:4 (1987), L99–L105.
- [3] V. A. Kostelecký, R. Potting, *Phys. Rev. D*, **79**:6 (2009), 065018, 21 pp., arXiv: 0901.0662.
- [4] Р. Ф. Фейман, Ф. Б. Мориниго, У. Г. Вагнер, *Фейнмановские лекции по гравитации*, Янус-К, М., 2000.
- [5] А. Г. Куроп, *Лекции по общей алгебре*, Наука, М., 1973.

Поступила в редакцию 29.05.2014