Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Катаев, К. В. Степаньянц, β -Функция Новикова–Шифмана–Вайнштейна–Захарова в суперсимметричных теориях при различных регуляризациях и перенормировочных предписаниях, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 3, 475–486

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8721>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:23:44

© 2014 г.

А. Л. Катаев*, К. В. Степаньянц†

β -ФУНКЦИЯ
НОВИКОВА–ШИФМАНА–ВАЙНШТЕЙНА–ЗАХАРОВА
В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯХ
И ПЕРЕНОРМИРОВОЧНЫХ ПРЕДПИСАНИЯХ

Дан краткий обзор вычислений квантовых поправок, связанных с точной β -функцией Новикова–Шифмана–Вайнштейна–Захарова (НШВЗ) в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях. Особое внимание уделяется схемной зависимости результатов. Объясняется, как соотношение НШВЗ получается для ренорм-групповых функций, определенных в терминах голой константы связи, в случае, если теория регуляризуется высшими производными. Также описывается построение специального перенормировочного предписания, которое дает соотношение НШВЗ для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированной константы связи, точно во всех порядках для абелевых суперсимметричных теорий, регуляризованных высшими производными. В неабелевом случае обсуждается схемная зависимость β -функции НШВЗ (для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированной константы связи). Показано, что в этом случае β -функция НШВЗ приводит к определенному схемно-независимому равенству.

Ключевые слова: суперсимметрия, перенормировка, β -функция.

DOI: 10.4213/tmf8721

Посвящается 75-летию академика А. А. Славнова

1. ВВЕДЕНИЕ

$\mathcal{N} = 1$ суперсимметричные калибровочные теории интересны как с теоретической, так и с феноменологической точки зрения. Точная β -функция Новикова–Шифмана–Вайнштейна–Захарова (НШВЗ) связывает β -функцию этих теорий с аномальной размерностью суперполей материи. Для теорий, содержащих киральные

*Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия. E-mail: kataev@ms2.inr.ac.ru

†Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: stepan@m9com.ru

суперполя материи, соотношение НШВЗ имеет следующий вид:

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2(3C_2 - T(R) + C(R)_i^j \gamma_j^i(\alpha)/r)}{2\pi(1 - C_2\alpha/2\pi)}, \quad (1)$$

переменная α в этом соотношении играет роль аргумента. В зависимости от определения ренормгрупповых функций этим аргументом может быть либо перенормированная константа связи, либо голая константа связи. В формуле (1) используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \text{tr}(T^A T^B) &\equiv T(R)\delta^{AB}, & (T^A)_i^k (T^A)_k^j &\equiv C(R)_i^j, \\ f^{ACD} f^{BCD} &\equiv C_2 \delta^{AB}, & r &\equiv \delta_{AA}, \end{aligned} \quad (2)$$

где C_2 и $C(R)_i^j$ – квадратичные операторы Казимира, $2T(R)$ – индекс Дынкина для представления R , а r – размерность калибровочной группы. Для чистой $\mathcal{N} = 1$ теории Янга–Миллса выражение (1) дает точную β -функцию, которая оказывается геометрической прогрессией.

β -Функция НШВЗ была построена в работах [1], [2] с использованием аргументов, основанных на структуре инстантонных вкладов, а именно требования их ренормгрупповой инвариантности (см. обзор [3]). Также она была выведена в работах [4], [5] с помощью аргументов, основанных на аномалиях. Известно, что в суперсимметричных теориях аксиальная аномалия и аномалия следа тензора энергии-импульса принадлежат одному супермультиплету. Аксиальная аномалия является чисто однопетлевой, в то время как аномалия следа тензора энергии-импульса пропорциональна β -функции. Аккуратно анализируя эти факты, можно получить точную β -функцию НШВЗ. При этом такой анализ является весьма нетривиальным. Например, в работе [6] было показано, что умножение суперполей материи на константу перенормировки Z изменяет расходимости в суперсимметричных теориях. Эта аномалия масштабирования может быть использована для объяснения происхождения поправок высших порядков в β -функции НШВЗ. В абелевом случае выражение НШВЗ было впервые выведено в работах [7], [8]. В работе [9] β -функция НШВЗ была найдена с использованием теоремы о неперенормировке топологического слагаемого и тождества Славнова–Тейлора [10], [11].

β -Функция НШВЗ связывает различные расходящиеся вклады интересным и нетривиальным образом. В частности, ее можно использовать для доказательства конечности $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных теорий за рамками однопетлевого приближения [1], [3], [12]. β -Функция НШВЗ также может быть использована для исследования возможности построения конечных $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий [3]. Точные соотношения, похожие на β -функцию НШВЗ, могут быть записаны в теориях с мягким нарушением суперсимметрии для перенормировки массы суперпартнера калибровочного бозона – калибрино [13]–[15]. Однако в настоящей работе мы не будем обсуждать их.

Хотя β -функция НШВЗ была построена достаточно давно, было неясно, как ее можно вывести с помощью явных вычислений диаграмм Фейнмана и какое перенормировочное предписание должно быть использовано для ее получения. Таким образом, вплоть до настоящего времени исследование соотношения НШВЗ остается актуальной проблемой. В настоящей работе мы делаем краткий обзор различных вычислений, которые связаны с этой проблемой, и описываем схему, в которой

β-функция НШВЗ получается в абелевом случае при использовании предложенной Славновым [16], [17] регуляризации высшими производными. Кроме того, мы показываем, как β-функция НШВЗ меняется при конечных перенормировках в неабелевом случае и выводим схемно-независимое следствие соотношения НШВЗ.

2. СООТНОШЕНИЕ НШВЗ ДЛЯ РЕНОРМГРУППОВЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ В ТЕРМИНАХ ГОЛОЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ

Один из первых выводов β-функции НШВЗ был дан в работе [1], где она была получена из требования ренорминвариантности инстантонных вкладов. Необходимо заметить, что в работе [1] соотношение НШВЗ было записано для β-функции, определенной в терминах голой константы связи. Такое же определение было использовано в работах [2], [6]–[8], [18].

В терминах голой константы связи β-функция и аномальная размерность определяются как

$$\beta\left(\alpha_0\left(\alpha, \frac{\Lambda}{\mu}\right)\right) \equiv \left.\frac{d\alpha_0(\alpha, \Lambda/\mu)}{d\ln\Lambda}\right|_{\alpha=\text{const}}, \quad (3)$$

$$\gamma_i^j\left(\alpha_0\left(\alpha, \frac{\Lambda}{\mu}\right)\right) \equiv -\left.\frac{d\ln Z_i^j(\alpha, \Lambda/\mu)}{d\ln\Lambda}\right|_{\alpha=\text{const}}, \quad (4)$$

где Λ – размерный параметр регуляризации, μ – масштаб перенормировки. Для вычисления этих ренормгрупповых функций левая часть рассматривается как функция голой константы связи, а переход к пределу $\Lambda \rightarrow \infty$ не осуществляется. Помимо регуляризации необходимо выбрать предписание для построения функции $\alpha(\alpha_0, \Lambda/\mu)$ и константы перенормировки Z_i^j . Другими словами, необходимо выбрать схему перенормировки.

Ренормгрупповые функции (3) и (4), рассматриваемые как функции голой константы связи, являются схемно-независимыми, поскольку их можно выразить через неперенормированные функции Грина. Тем не менее эти функции зависят от регуляризации. Однако в ранних работах эта зависимость не исследовалась. Другое определение ренормгрупповых функций (в терминах перенормированной константы связи) использовалось в работах [5], [9].

Соотношение НШВЗ для ренормгрупповых функций (3) и (4) вновь появилось в работах, посвященных вычислениям квантовых поправок с регуляризацией высшими ковариантными производными [16], [17]. Эта регуляризация также включает вставку детерминантов Паули–Вилларса для удаления однопетлевых расходимостей [19]. Она является непротиворечивой и (в суперсимметричных теориях) может быть сформулирована явно суперсимметричным образом [20], [21]. Однако она приводит к сложным петлевым интегралам. По этой причине явное вычисление однопетлевой β-функции (несуперсимметричной) теории Янга–Миллса с использованием регуляризации высшими ковариантными производными [22] было сделано много позже, чем вычисление с использованием размерной регуляризации [23], [24].

После исправлений, сделанных в работах [25], [26], результаты для β -функции в обеих регуляризациях совпали, как и следовало ожидать [27]¹⁾. В суперсимметричных теориях, регуляризованных высшими ковариантными производными, интегралы, определяющие β -функцию (3), оказываются интегралами от полных производных [28], [29] и даже интегралами от двойных полных производных [30], [31]. Это позволяет вычислить один из петлевых интегралов аналитически и получить соотношение НШВЗ между β -функцией и аномальной размерностью суперполей материи. Для абелевых суперсимметричных теорий такое свойство было доказано точно во всех петлях в работе [32] непосредственным суммированием суперграфов и в работе [33] с использованием метода, основанного на уравнениях Швингера–Дайсона. Вычисления с использованием регуляризации высшими ковариантными производными для неабелевых суперсимметричных калибровочных теорий были сделаны только в однопетлевом и двухпетлевом приближениях [29]. Они выявляют точно такие же особенности, как и в абелевом случае, а именно факторизацию интегралов для β -функции (3) в интегралы от (двойных) полных производных. Данная факторизация является причиной появления соотношения НШВЗ в суперсимметричных теориях для ренормгрупповых функций, определенных в терминах голой константы связи. Эта особенность имеет место в случае использования регуляризации высшими ковариантными производными, и пока неясно, выполняется ли это свойство для других регуляризаций. Таким образом, выбор регуляризации высшими ковариантными производными является очень важным.

3. СХЕМНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ β -ФУНКЦИИ НШВЗ

В квантовой теории поля ренормгрупповые функции обычно определяются другим способом [34], в терминах перенормированной константы связи:

$$\tilde{\beta}\left(\alpha\left(\alpha_0, \frac{\Lambda}{\mu}\right)\right) \equiv \left.\frac{d\alpha(\alpha_0, \Lambda/\mu)}{d \ln \mu}\right|_{\alpha_0=\text{const}}, \quad (5)$$

$$\tilde{\gamma}_i^j\left(\alpha\left(\alpha_0, \frac{\Lambda}{\mu}\right)\right) \equiv \left.\frac{d \ln Z_i^j(\alpha(\alpha_0, \Lambda/\mu), \Lambda/\mu)}{d \ln \mu}\right|_{\alpha_0=\text{const}}. \quad (6)$$

Хорошо известно, что ренормгрупповые функции (5) и (6) являются схемно-зависимыми, в отличие от функций (3) и (4).

Имеется много работ, в которых ренормгрупповые функции (5) и (6) вычисляются в суперсимметричных теориях в низших порядках теории возмущений. Точную β -функцию НШВЗ можно сравнивать с результатами этих вычислений. Обычно большинство вычислений по теории возмущений в несуперсимметричных теориях проводятся с использованием размерной регуляризации [35]–[38]. Эта регуляризация также была использована для вычисления β -функции в суперсимметричных теориях в однопетлевом [39] и двухпетлевом [40] приближениях. (В этих приближениях β -функция является схемно-независимой, благодаря чему результат является таким же, как и при использовании других регуляризаций, в частности размерной редукции [41].) Поскольку размерная регуляризация нарушает суперсимметрию, то

¹⁾Результат работы [22] был другим, правильный результат для однопетлевой β -функции был получен позже.

ее неудобно использовать в суперсимметричных теориях²⁾. Поэтому суперсимметричные теории обычно регуляризуют с помощью размерной редукции, которая, однако, является математически противоречивой [46]. Устранить противоречия невозможно без потери явной суперсимметрии [47], [48]. Тем не менее вычисления с использованием размерной редукции в $\overline{\text{DR}}$ -схеме (которая представляет собой модификацию $\overline{\text{MS}}$ -схемы [49]) были выполнены в различных суперсимметричных теориях. В $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса трехпетлевые [50] и четырехпетлевые [51] вычисления демонстрируют, что β -функция равна нулю. Кроме того, размерная редукция не нарушает суперсимметрию даже в четырехпетлевом приближении [51], хотя это и возможно в высших петлях. β -Функция чистой $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса равна нулю в трехпетлевом приближении [50], однако суперсимметрия в этом приближении нарушена [52], [53]. (Ошибки в вычислениях, сделанные в работе [52], были исправлены в работе [53].) В настоящее время неясно, связано ли это с противоречивостью размерной редукции, использованием несуперсимметричного калибровочного условия или какой-либо еще причиной. Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий β -функция была вычислена в трехпетлевом [50], [54] и четырехпетлевом [55], [56] приближениях (см. недавний обзор [57]). Результаты не согласуются с β -функцией НШВЗ начиная с трехпетлевого приближения, где становится существенной схемная зависимость. Некоторые следствия этого отличия обсуждались в работе [58]. Однако β -функция НШВЗ может быть получена после специальной подстройки схемы вычитаний, которая должна быть сделана в каждом порядке теории возмущений [54], [59], [60]. Соответствующая конечная перенормировка константы связи может быть найдена при исследовании теорий с мягко нарушенной суперсимметрией [60]. Поэтому возникает вопрос о том, как сформулировать предписание, которое дает схему НШВЗ в суперсимметричных теориях во всех порядках теории возмущений. Ответ может быть найден, если использовать другую регуляризацию, для которой схема НШВЗ может быть сформулирована явно. Заметим, что другие регуляризации главным образом использовались для вычислений в однопетлевом и двухпетлевом приближениях. Отметим работу [61], в которой двухпетлевая β -функция $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса была найдена с использованием некоторой модификации дифференциальной перенормировки [62], предложенной в работе [63] и не нарушающей суперсимметрию [64]. В работе [65] двухпетлевая β -функция для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамики была найдена с использованием операторного разложения и обрезания в координатном пространстве. Поскольку двухпетлевая β -функция является схемно-независимой в теориях с одной константой связи, то эти результаты не могут быть использованы для исследования схемной зависимости. Для полноты изложения мы также упомянем регуляризацию, основанную на использовании $\mathcal{N} = 4$ или конечных $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса и введении обрезания, нарушающего суперсимметрию до $\mathcal{N} = 1$. Такая регуляризация применялась в работе [6]. Однако для наиболее общих $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий ее не удастся использовать.

²⁾В общем случае использование неинвариантных регуляризаций допустимо, если они дополняются специальными перенормировочными предписаниями, которые восстанавливают тождества Славнова–Тейлора [42]–[45].

Квантовые поправки также возникают при инстантонных вычислениях [66]. При их нахождении вновь появляется вопрос о схемной зависимости результатов. В суперсимметричных теориях инстантонные вклады были получены с учетом квантовых поправок вплоть до двухпетлевого порядка [67] при использовании регуляризации с помощью размерной редукции. Результат подтвердил аргументацию, предложенную в работе [1] для вывода β -функции НШВЗ, а именно равенство нулю квантовых поправок к вакуумной энергии на инстантонном фоне. Это означает, что вычисление квантовых поправок на инстантонном фоне согласуется с выражением НШВЗ на двухпетлевом уровне. Хотя в этом приближении β -функция, определенная в терминах перенормированной константы связи, является схемно-независимой, исследование структуры инстантонных поправок выявляет возможность схемной зависимости в высших порядках [68], [69]. Следовательно, сходная проблема схемной зависимости также присутствует и для инстантонных вычислений. К сожалению, явные инстантонные вычисления, в которых принимаются во внимание трехпетлевые поправки, еще не проведены.

4. СХЕМА НШВЗ

Во всех порядках схема НШВЗ была естественным образом построена с использованием регуляризации высшими ковариантными производными [70], [71], по крайней мере, в абелевом случае. Как мы уже упомянули выше, при использовании размерной редукции отсутствует общее предписание, которое позволяет получить такую схему во всех порядках. Однако если $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная электродинамика с произвольным числом ароматов (N_f) регуляризована высшими производными, это можно сделать специальным выбором схемы вычитаний. А именно, схема НШВЗ может быть построена наложением граничных условий

$$Z_3(\alpha, x_0) = 1, \quad Z(\alpha, x_0) = 1 \quad (7)$$

на константы перенормировки для константы связи и суперполя материи соответственно, где x_0 – некоторое (произвольное) значение $x = \ln \Lambda/\mu$. В этом случае ренормгрупповые функции (5) и (6), определенные в терминах перенормированной константы связи, совпадают с ренормгрупповыми функциями (3) и (4), определенными в терминах голой константы связи [70]. Явные трехпетлевые вычисления в этом случае были сделаны для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамики с N_f ароматами [71]. Целесообразно сравнить результат с соответствующими вычислениями, сделанными при использовании других регуляризаций и схем вычитаний. Результаты для β -функции и аномальной размерности суперполей материи приведены в табл. 1 и табл. 2 соответственно.

Для схемы НШВЗ, получаемой при использовании регуляризации высшими производными, c_I обозначают степени детерминантов Паули–Вилларса, которые вводятся для того, чтобы сократить однопетлевые расходимости в соответствии с работой [72], а $a_I = M_I/\Lambda$ представляют собой отношения масс Паули–Вилларса к параметру в слагаемом с высшими производными (существенно, что a_I не должны зависеть от голой константы связи). Эти таблицы были построены на основе результатов работ [54], [71]. Из них следует, что соотношение НШВЗ для рассматриваемой теории,

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2 N_f}{\pi} (1 - \gamma(\alpha)), \quad (8)$$

Таблица 1. β -Функция для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамики с N_f ароматами в различных схемах вычитаний. Для MOM-схемы результаты, полученные при использовании размерной редукции и регуляризации высшими производными, совпадают.

Схема вычитаний	1 петля	2 петли	3 петли	
Общий множитель	$\alpha^2 N_f / \pi$	$\alpha^3 N_f / \pi^2$	$\alpha^4 N_f / \pi^3$	$\alpha^4 (N_f)^2 / \pi^3$
$\overline{\text{DR}}$	1	1	$-1/2$	$-3/4$
HD+НШВЗ	1	1	$-1/2$	$-1 - \sum_{I=1}^n c_I \ln a_I$
MOM	1	1	$-1/2$	$-3(1 - \zeta(3))/2$

Таблица 2. Аномальная размерность суперполей материи для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамики с N_f ароматами в различных схемах вычитаний. Для MOM-схемы результаты, полученные при использовании размерной редукции и регуляризации высшими производными, совпадают.

Схема вычитаний	1 петля	2 петли	
Общий множитель	α / π	α^2 / π^2	$\alpha^2 N_f / \pi^2$
$\overline{\text{DR}}$	-1	$1/2$	$1/2$
HD+НШВЗ	-1	$1/2$	$1 + \sum_{I=1}^n c_I \ln a_I$
MOM	-1	$1/2$	$1/2$

справедливо во всех схемах в однопетлевом и двухпетлевом приближениях. Кроме того, в трехпетлевом приближении слагаемые, пропорциональные $\alpha^4 N_f$ в β -функции и пропорциональные $\alpha^2 (N_f)^0$ в аномальной размерности, одинаковы во всех схемах и удовлетворяют соотношению НШВЗ. Это является следствием схемной независимости таких слагаемых, которая была доказана в работе [71] во всех порядках и обсуждается ниже. Слагаемые, пропорциональные $\alpha^4 (N_f)^2$ в β -функции, и соответствующие слагаемые в аномальной размерности удовлетворяют соотношению НШВЗ только в схеме НШВЗ.

5. СХЕМНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ β -ФУНКЦИИ НШВЗ В АБЕЛЕВОМ И НЕАБЕЛЕВОМ СЛУЧАЯХ

Слагаемые первой степени по N_f в β -функции и слагаемые без N_f в аномальной размерности являются схемно-независимыми не только в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамике с N_f ароматами. Это утверждение также справедливо для скалярной и спинорной электродинамик с N_f ароматами. Действительно, при конечных

перенормировках

$$\alpha \rightarrow \alpha'(\alpha), \quad Z' \left(\alpha', \frac{\Lambda}{\mu} \right) = z(\alpha) Z \left(\alpha, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \quad (9)$$

ренормгрупповые функции, определенные в терминах перенормированной константы связи, меняются следующим образом:

$$\tilde{\beta}'(\alpha') = \frac{d\alpha'}{d \ln \mu} \Big|_{\alpha_0 = \text{const}} = \frac{d\alpha'}{d\alpha} \tilde{\beta}(\alpha), \quad (10)$$

$$\tilde{\gamma}'(\alpha') = \frac{d \ln Z'^j}{d \ln \mu} \Big|_{\alpha_0 = \text{const}} = \frac{d \ln z}{d\alpha} \tilde{\beta}(\alpha) + \tilde{\gamma}(\alpha), \quad (11)$$

причем в случае $\mathcal{N} = 1$ электродинамики с N_f ароматами $\tilde{\beta}(\alpha)$ и $\alpha'(\alpha) - \alpha$ пропорциональны, по крайней мере, N_f . Схемная независимость рассматриваемых слагаемых согласуется с четырехпетлевыми [73] и пятипетлевыми [74] вычислениями в $\overline{\text{MS}}$ - и MOM-схемах для квантовой электродинамики с N_f ароматами³⁾. Также схемную независимость рассматриваемых слагаемых можно увидеть при сравнении трехпетлевых результатов для скалярной электродинамики в $\overline{\text{MS}}$ -схеме [76], [77] и в схеме на массовой поверхности [76].

Для наиболее общей неабелевой суперсимметричной теории Янга–Миллса конечные перенормировки могут также включать юкавские константы связи λ^{ijk} (которые являются полностью симметричными по индексам ijk):

$$\alpha \rightarrow \alpha'(\alpha, \lambda), \quad \lambda \rightarrow \lambda'(\alpha, \lambda), \quad Z'^j \left(\alpha', \lambda', \frac{\Lambda}{\mu} \right) = z_i^k(\alpha, \lambda) Z_k^j \left(\alpha, \lambda, \frac{\Lambda}{\mu} \right), \quad (12)$$

где мы предполагаем, что z и Z коммутируют. Тогда обобщение формул (10) и (11) имеет вид

$$\tilde{\beta}'(\alpha', \lambda') = \frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} \tilde{\beta}(\alpha, \lambda) + \frac{3}{2} \left(\lambda^{ijk} \tilde{\gamma}_l^i(\alpha, \lambda) \frac{\partial \alpha'}{\partial \lambda^{ijk}} + \lambda_{ljk}^* \tilde{\gamma}_i^l(\alpha, \lambda) \frac{\partial \alpha'}{\partial \lambda_{ijk}^*} \right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'^j(\alpha', \lambda') &= \tilde{\gamma}_i^j(\alpha, \lambda) + \frac{\partial \ln z_i^j}{\partial \alpha} \tilde{\beta}(\alpha, \lambda) + \\ &+ \frac{3}{2} \left(\lambda^{lmn} \tilde{\gamma}_k^l(\alpha, \lambda) \frac{\partial \ln z_i^j}{\partial \lambda^{kmn}} + \lambda_{lmn}^* \tilde{\gamma}_k^l(\alpha, \lambda) \frac{\partial \ln z_i^j}{\partial \lambda_{kmn}^*} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что при выводе этих формул мы приняли во внимание, что в соответствии с теоремой о неперенормировке [78] не существует расходящихся квантовых поправок к суперпотенциалу. Как следствие, константы перенормировки для юкавских констант можно выразить через константы перенормировки Z_i^j для киральных суперполей:

$$\lambda^{ijk} = \lambda_0^{mnp} (Z^{1/2})_m^i (Z^{1/2})_n^j (Z^{1/2})_p^k, \quad (15)$$

где λ_0 и λ обозначают голую и перенормированную юкавские константы соответственно. Константа λ' дается аналогичным выражением, которое содержит константы перенормировки Z' .

³⁾При $N_f = 1$ пятипетлевые результаты работы [74] совпадают с результатами работы [75], что подтверждает их правильность.

Предположим, что в неабелевом случае β -функция $\tilde{\beta}(\alpha, \lambda)$ и аномальная размерность $\tilde{\gamma}_i^j(\alpha, \lambda)$, определенные в терминах перенормированной константы связи, удовлетворяют соотношению НШВЗ. Тогда мы получаем, что после конечной перенормировки (12)

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}'(\alpha', \lambda') = & - \frac{\alpha^2}{2\pi(1 - C_2\alpha/2\pi)\partial\alpha/\partial\alpha' - \alpha^2 C(R)_l^k \partial \ln z_k^l / \partial \ln \alpha'} \left\{ 3C_2 - T(R) + \right. \\ & + \frac{1}{r} C(R)_m^n \left[\tilde{\gamma}'_n{}^m(\alpha', \lambda') - \frac{3}{2} \left((\lambda')^{ljk} \tilde{\gamma}'_l{}^i(\alpha', \lambda') \frac{\partial \ln z_n^m}{\partial (\lambda')^{ijk}} + \right. \right. \\ & + \left. \left. (\lambda')_{ijk}^* \tilde{\gamma}'^l{}_i(\alpha', \lambda') \frac{\partial \ln z_n^m}{\partial (\lambda')_{ijk}^*} \right) \right] + \\ & + \frac{3}{2} \cdot \frac{2\pi}{\alpha^2} \left(1 - C_2 \frac{\alpha}{2\pi} \right) \left((\lambda')^{ljk} \tilde{\gamma}'_l{}^i(\alpha', \lambda') \frac{\partial \alpha}{\partial (\lambda')^{ijk}} + \right. \\ & + \left. \left. (\lambda')_{ijk}^* \tilde{\gamma}'^l{}_i(\alpha', \lambda') \frac{\partial \alpha}{\partial (\lambda')_{ijk}^*} \right) \right\} \Big|_{\alpha=\alpha(\alpha', \lambda')}. \end{aligned} \quad (16)$$

Это равенство можно использовать для анализа схемной зависимости результатов. В частности, мы видим, что в L петлях слагаемые, пропорциональные $\text{tr}(C(R)^L)$, будут одними и теми же в обеих частях формулы (1) при произвольном перенормировочном предписании. Действительно, из формулы (16) очевидно, что соотношение НШВЗ для всех членов, которые не содержат юкавские константы, может модифицироваться только благодаря знаменателю. Однако все такие поправки пропорциональны или C_2 , или $T(R)$, или λ , или произведениям по крайней мере двух следов. Следовательно, слагаемое $\text{tr}(C(R)^L)$, которое содержит только один след, не может модифицироваться. Мы проверили, что в трехпетлевом приближении формула (16) согласуется с результатами работы [54]. В частности, в соответствии с работой [54] в трехпетлевом приближении слагаемые, пропорциональные $\text{tr}(C(R)^3)$, одинаковы в $\overline{\text{DR}}$ -схеме и в схеме НШВЗ.

Результаты для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамики с N_f ароматами получаются, если мы положим

$$C_2 = 0, \quad C(R)_i^j = \delta_i^j, \quad T(R) = 2N_f, \quad r = 1, \quad (17)$$

где индексы i и j , нумерующие киральные суперполя, пробегают значения от 1 до $2N_f$. Как следствие имеем

$$\text{tr}(C(R)^L) = 2N_f. \quad (18)$$

Следовательно, схемная независимость слагаемых, пропорциональных $\text{tr}(C(R)^L)$, в абелевом случае приводит к схемной независимости слагаемых, пропорциональных первой степени N_f , которая была доказана в работе [71].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение регуляризации высшими ковариантными производными для вычислений квантовых поправок в суперсимметричных теориях позволяет решить давнюю проблему получения β -функции НШВЗ прямым суммированием суперграфов, по крайней мере, в абелевом случае. Соотношение НШВЗ возникает для ренормгрупповых функций, определенных в терминах голой константы связи. Если ренормгрупповые функции определяются в терминах перенормированной константы

связи, то применение регуляризации высшими производными позволяет естественным образом построить схему НШВЗ в абелевом случае. Хотя квантовые поправки в неабелевых теориях имеют похожую структуру, до сих пор такая схема не была построена в этом случае. Однако мы надеемся, что это можно сделать по аналогии с абелевой теорией. В настоящей работе мы только исследовали схемную зависимость соотношения НШВЗ для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированной константы связи, в неабелевом случае. При этом показано, что слагаемые, пропорциональные $\text{tr}(C(R)^L)$, где L – число петель, оказываются схемно-независимыми. Как следствие, такие слагаемые в левой и правой частях формулы (1) совпадают при произвольном перенормировочном предписании.

Благодарности. Работа А. Л. Катаева была частично поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2835.2114.2) и РФФИ (грант № 14-01-00647). Работа К. В. Степаньянца была поддержана РФФИ (грант № 14-01-00695).

Список литературы

- [1] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, *Nucl. Phys. B*, **229**:2 (1983), 381–393.
- [2] А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман, *ЯФ*, **43**:6 (1986), 1596–1605; V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, *Phys. Lett. B*, **166**:3 (1986), 329–333.
- [3] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, “Instantons versus supersymmetry: fifteen years later”: M. A. Shifman, *ITEP Lectures on Particle Physics and Field Theory*, World Scientific Lecture Notes in Physics, **62**, World Sci., Singapore, 1999, 485–647, arXiv: hep-th/9902018.
- [4] D. R. T. Jones, *Phys. Lett. B*, **123**:1–2 (1983), 45–46.
- [5] А. И. Вайнштейн, М. А. Шифман, *ЖЭТФ*, **91**:3 (1986), 723–744; M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, *Nucl. Phys. B*, **277** (1986), 456–486.
- [6] N. Arkani-Hamed, H. Murayama, *JHEP*, **06** (2000), 030, 44 pp., arXiv: arXiv:hep-th/9707133.
- [7] А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, М. А. Шифман, *Письма ЖЭТФ*, **42**:4 (1985), 182–184.
- [8] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, *Phys. Lett. B*, **166**:3 (1986), 334–336.
- [9] E. Kraus, C. Rupp, K. Sibold, *Nucl. Phys. B*, **661**:1–2 (2003), 83–98.
- [10] J. C. Taylor, *Nucl. Phys. B*, **33**:2 (1971), 436–444.
- [11] А. А. Славнов, *ТМФ*, **10**:2 (1972), 153–161.
- [12] I. L. Buchbinder, K. V. Stepanyantz, *Nucl. Phys. B*, **883** (2014), 20–44.
- [13] J. Hisano, M. A. Shifman, *Phys. Rev. D*, **56**:8 (1997), 5475–5482, arXiv: hep-ph/9705417.
- [14] I. Jack, D. R. T. Jones, *Phys. Lett. B*, **415**:4 (1997), 383–389, arXiv: hep-ph/9709364.
- [15] L. V. Avdeev, D. I. Kazakov, I. N. Kondrashuk, *Nucl. Phys. B*, **510**:1 (1998), 289–312, arXiv: hep-ph/9709397.
- [16] А. А. Славнов, *Nucl. Phys. B*, **31**:2 (1971), 301–305.
- [17] А. А. Славнов, *ТМФ*, **13**:2 (1972), 174–177.
- [18] А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, М. А. Шифман, *ЯФ*, **43**:2 (1986), 1596–1605.
- [19] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, М., 1978.
- [20] В. К. Кривошеков, *ТМФ*, **36**:3 (1978), 291–302.
- [21] P. C. West, *Nucl. Phys. B*, **268**:1 (1986), 113–124.
- [22] C. P. Martin, F. Ruiz Ruiz, *Nucl. Phys. B*, **436**:3 (1995), 545–581.
- [23] D. J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **30**:26 (1973), 1343–1346.

- [24] H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.*, **30**:26 (1973), 1346–1349.
- [25] M. Asorey, F. Falceto, *Phys. Rev. D*, **54**:8 (1996), 5290–5301, arXiv: hep-th/9502025.
- [26] T. D. Bakeyev, A. A. Slavnov, *Modern Phys. Lett. A*, **11**:19 (1996), 1539–1554.
- [27] P. I. Pronin, K. V. Stepanyantz, *Phys. Lett. B*, **414**:1–2 (1997), 117–122.
- [28] A. A. Солошенко, К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **140**:3 (2004), 437–459.
- [29] A. B. Pimenov, E. S. Shevtsova, K. V. Stepanyantz, *Phys. Lett. B*, **686**:4–5 (2010), 293–297, arXiv: 0912.5191.
- [30] A. V. Smilga, A. Vainshtein, *Nucl. Phys. B*, **704**:3 (2005), 445–474, arXiv: hep-th/0405142.
- [31] K. V. Stepanyantz, *Factorization of integrals defining the two-loop β -function for the general renormalizable $N = 1$ SYM theory, regularized by the higher covariant derivatives, into integrals of double total derivatives*, arXiv: 1108.1491.
- [32] K. V. Stepanyantz, *Nucl. Phys. B*, **852**:1 (2011), 71–107, arXiv: 1102.3772.
- [33] K. V. Stepanyantz, *JHEP*, **08** (2014), 096, 77 pp., arXiv: 1404.6717.
- [34] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1984.
- [35] G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys. B*, **44**:1 (1972), 189–213.
- [36] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, *Nuovo Cimento B*, **12** (1972), 20–26.
- [37] J. F. Ashmore, *Lett. Nuovo Cimento*, **4**:8 (1972), 289–290.
- [38] G. M. Cicuta, E. Montaldi, *Lett. Nuovo Cimento Ser. 2*, **4**:9 (1972), 329–332.
- [39] S. Ferrara, B. Zumino, *Nucl. Phys. B*, **79**:3 (1974), 413–421.
- [40] D. R. T. Jones, *Nucl. Phys. B*, **87**:1 (1975), 127–132.
- [41] W. Siegel, *Phys. Lett. B*, **84**:2 (1979), 193–196.
- [42] A. A. Slavnov, *Phys. Lett. B*, **518**:1–2 (2001), 195–200.
- [43] A. A. Славнов, *ТМФ*, **132**:3 (2002), 434–448.
- [44] A. A. Славнов, К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **135**:2 (2003), 265–279.
- [45] A. A. Славнов, К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **139**:2 (2004), 179–191.
- [46] W. Siegel, *Phys. Lett. B*, **94**:1 (1980), 37–40.
- [47] L. V. Avdeev, G. A. Chochia, A. A. Vladimirov, *Phys. Lett. B*, **105**:4 (1981), 272–274.
- [48] L. V. Avdeev, A. A. Vladimirov, *Nucl. Phys. B*, **219**:1 (1983), 262–276.
- [49] W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke, T. Muta, *Phys. Rev. D*, **18**:11 (1978), 3998–4017.
- [50] L. V. Avdeev, O. V. Tarasov, *Phys. Lett. B*, **112**:4–5 (1982), 356–358.
- [51] V. N. Velizhanin, *Phys. Lett. B*, **696**:5 (2011), 560–562.
- [52] L. V. Avdeev, *Phys. Lett. B*, **117**:5 (1982), 317–320.
- [53] V. N. Velizhanin, *Nucl. Phys. B*, **818**:1 (2009), 95–100, arXiv: 0809.2509.
- [54] I. Jack, D. R. T. Jones, C. G. North, *Phys. Lett. B*, **386**:1 (1996), 138–140.
- [55] R. V. Harlander, D. R. T. Jones, P. Kant, L. Mihaila, M. Steinhauser, *JHEP*, **12** (2006), 024, 13 pp.
- [56] I. Jack, D. R. T. Jones, P. Kant, L. Mihaila, *JHEP*, **09** (2007), 058, 40 pp.
- [57] L. Mihaila, *Adv. High Energy Phys.*, **2013** (2013), 607807, 64 pp.
- [58] T. A. Rytov, R. Shrock, *Phys. Rev. D*, **85**:7 (2012), 076009, 16 pp.
- [59] I. Jack, D. R. T. Jones, C. G. North, *Nucl. Phys. B*, **486**:1 (1997), 479–499, arXiv: hep-ph/9609325.
- [60] I. Jack, D. R. T. Jones, A. Pickering, *Phys. Lett. B*, **435**:1–2 (1998), 61–66.
- [61] J. Mas, C. Seijas, M. Pérez-Victoria, *JHEP*, **03** (2002), 049, 20 pp., arXiv: hep-th/0202082.
- [62] D. Z. Freedman, K. Johnson, J. I. Latorre, *Nucl. Phys. B*, **371**:1–2 (1992), 353–44.
- [63] F. del Águila, A. Culatti, R. Muñoz Tapia, M. Pérez-Victoria, *Nucl. Phys. B*, **537**:1–3 (1999), 561–585, arXiv: hep-ph/9806451.
- [64] F. del Águila, A. Culatti, R. Muñoz-Tapia, M. Pérez-Victoria, *Nucl. Phys. B*, **504**:1 (1997), 532–550, arXiv: hep-ph/9702342.

- [65] А. И. Вайнштейн, М. А. Шифман, *ЯФ*, **44** (1986), 498.
- [66] G. 't Hooft, *Phys. Rev. D*, **14**:12 (1976), 3432–3450; *Erratum*, **18**:6 (1978), 2199–2200.
- [67] T. R. Morris, D. A. Ross, C. T. Sachrajda, *Nucl. Phys. B*, **264** (1986), 111–153.
- [68] T. R. Morris, D. A. Ross, C. T. Sachrajda, *Phys. Lett. B*, **158**:3 (1985), 223–226.
- [69] T. R. Morris, D. A. Ross, C. T. Sachrajda, *Phys. Lett. B*, **172**:1 (1986), 40–45.
- [70] A. L. Kataev, K. V. Stepanyantz, *Nucl. Phys. B*, **875**:2 (2013), 459–482.
- [71] A. L. Kataev, K. V. Stepanyantz, *Phys. Lett. B*, **730** (2014), 184–198, arXiv:1311.0589.
- [72] А. А. Славнов, *ТМФ*, **33**:2 (1977), 210–217.
- [73] S. G. Gorishny, A. L. Kataev, S. A. Larin, L. R. Surguladze, *Phys. Lett. B*, **256**:1 (1991), 81–85.
- [74] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, J. Rittinger, *JHEP*, **07** (2012), 017.
- [75] A. L. Kataev, S. A. Larin, *Письма в ЖЭТФ*, **96**:1–2 (2012), 64–67.
- [76] D. J. Broadhurst, R. Delbourgo, D. Kreimer, *Phys. Lett. B*, **366**:1 (1996), 421–428, arXiv: hep-ph/9509296.
- [77] K. G. Chetyrkin, S. G. Gorishny, A. L. Kataev, S. A. Larin, F. V. Tkachov, *Phys. Lett. B*, **116**:6 (1981), 455–458.
- [78] M. T. Grisaru, W. Siegel, M. Rocek, *Nucl. Phys. B*, **159**:3 (1979), 429–450.

Поступила в редакцию 31.05.2014