Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, Необходимые условия интегрируемости
для эволюционных уравнений на решетке, *ТМФ*, 2014,
том 181, номер 2, 276–295

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8722>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:47:20

© 2014 г.

В. Э. Адлер*

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НА РЕШЕТКЕ

Изучена структура решений уравнения Лакса $D_t(G) = [F, G]$ для формальных рядов по степеням оператора сдвига. Показано, что если уравнение с заданным рядом F степени m допускает решение G степени k , то оно допускает и решение H степени m , такое что $H^k = G^m$. Это свойство применено для вывода необходимых условий интегрируемости для скалярных эволюционных цепочек.

Ключевые слова: цепочка типа Вольтерра, высшая симметрия, закон сохранения, тест на интегрируемость.

DOI: 10.4213/tmf8722

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что характеристическим свойством интегрируемых уравнений является наличие бесконечных наборов высших симметрий и законов сохранения. Для двумерных эволюционных уравнений $\partial_t(u) = f[u]$, отсюда следует существование формальных операторных рядов G, R , удовлетворяющих уравнениям (см. раздел 3)

$$D_t(G) = [f_*, G], \quad D_t(R) + f_*^\dagger R + R f_* = 0. \quad (1)$$

Условия разрешимости (1) относительно коэффициентов G, R служат необходимыми условиями интегрируемости. В работах Шабата и др. этот подход применялся для классификации интегрируемых уравнений, уравнений в частных производных [1]–[6] и дифференциально-разностных уравнений [2], [7]–[11]. Непрерывные и дискретные уравнения имеют много общего, но есть и различия.

В непрерывном случае G и R – это псевдодифференциальные операторы, т. е. ряды Лорана по обратным степеням полной производной D . Для однокомпонентных эволюционных уравнений коэффициенты рядов являются скалярными функциями от динамических переменных u . Очень важную роль в теории играет операция извлечения корня из таких рядов. Она определена для ряда $G = g_k D^k + g_{k-1} D^{k-1} + \dots$

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: adler@itp.ac.ru

общего вида, так как коэффициенты ряда $G^{1/k}$ вычисляются при помощи явных алгебраических формул, не выводящих из рассматриваемого поля [12]. Благодаря этому изучение уравнений (1) сводится к случаю $\deg G = 1$, $\deg R = 0$, что существенно упрощает их анализ. В частности, условия интегрируемости переписываются в виде последовательности законов сохранения

$$D_t(\rho_j) = D(\sigma_j), \quad j = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где ρ_j явно определяются по ρ_i, σ_i при $i < j$. Если левая часть (2) лежит в образе D (совпадающем с ядром вариационной производной), то можно найти σ_j и переходить к следующему шагу.

В настоящей работе рассматривается случай уравнений на решетке

$$\partial_t(u_n) = f(u_{n+m}, \dots, u_{n-m}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

где ситуация несколько сложнее. Здесь G, R – это ряды по степеням оператора сдвига T , и для ряда $G = g_k T^k + g_{k-1} T^{k-1} + \dots$ общего вида корень $G^{1/k}$ не определен. Это ясно уже из того, что для его существования нужно, чтобы старший коэффициент имел специальный вид $g_k = hT(h) \dots T^{k-1}(h)$. В результате условия интегрируемости усложняются и, вообще говоря, не записываются в виде законов сохранения, а уравнения (1) теряют эффективность, поскольку степени рядов G, R заранее неизвестны. Однако оказывается, что на самом деле условия интегрируемости не зависят от k . Целью статьи является доказательство того, что общий случай сводится к $\deg G = m$, $0 \leq \deg R < m$.

В разделе 2 доказывается следующее утверждение: если разностное уравнение Лакса $D_t(G) = [F, G]$ с $\deg F = m$ допускает решение G степени k , то существует и другое его решение $H = G^{m/k}$ степени m . Ключевая идея заключается в том, что коэффициенты H можно вычислить по явным формулам, если использовать уравнения $D_t(H) = [F, H]$ и $H^k = G^m$ одновременно, после чего удастся доказать, что оба уравнения выполняются по отдельности. Таким образом, извлечение корня в некотором ослабленном смысле все же возможно благодаря тому, что решения уравнения Лакса являются далеко не общими рядами и их коэффициенты уже имеют специальную структуру.

В разделах 3, 4 это наблюдение используется для формулировки необходимых условий интегрируемости для цепочек (3). При $m > 1$ они остаются более сложными, чем в непрерывном случае, но вполне пригодны для тестирования заданного уравнения. Разрешение уравнения Лакса относительно коэффициентов G сводится к проверке того, лежит ли заданное выражение в образе оператора вида $T^m - T^j(a)/a$, где a – фиксированная функция, и к вычислению прообраза. В принципе обе задачи допускают алгоритмическое решение, что, однако, выходит за рамки настоящей статьи. Анализ условий в общем виде, для получения классификационных результатов или построения новых примеров, хотя бы в случае $m = 2$, представляет собой весьма сложную задачу и также должен быть предметом отдельного исследования. Отметим, что все известные на данный момент примеры с $m > 1$ сводятся (с точностью до подстановок типа Миуры) к цепочкам Богоявленского [13] и некоторым их обобщениям [14]–[16]. Здесь имеется отставание от непрерывного

случая, для которого получен ряд классификационных результатов для уравнений типа Бюргера порядков 2, 4 [17] и типа уравнения Кортевега–де Фриза порядков 3, 5, 7 (см. ссылки в [6]).

Интегрируемые уравнения (3) при $m = 1$ (цепочки типа Вольтерра) были проклассифицированы Ямиловым [7]. В этом случае необходимые условия интегрируемости имеют вид, аналогичный (2):

$$D_t(\rho_j) = (T - 1)(\sigma_j), \quad \rho_j - \bar{\rho}_j = (T - 1)(s_j), \quad j = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где ρ_j , $\bar{\rho}_j$ определяются по ρ_i , $\bar{\rho}_i$, σ_i , s_i при $i < j$. В работах [9], [10] вывод условий (4) основывался на предположении, что цепочка (3) обладает высшими симметриями порядков k , $k + 1$, где k сколь угодно велико, откуда следует существование ряда G степени 1. В то же время авторами отмечалось, что те же самые условия возникают и при рассмотрении ряда G произвольной степени, хотя их вывод становится технически более сложным. Это полностью объясняется описанной выше процедурой извлечения корня, из которой следует также, что предположение о симметрии порядка $k + 1$ излишне.

Что касается способа получения конкретных выражений для условий типа (2) или (4), то напомним, что плотности ρ_j для непрерывных уравнений Лакса можно вычислять двумя способами: как вычеты дробных степеней $\text{res } G^{j/k}$ [18] или как коэффициенты разложения по λ для логарифмической производной от формальной функции Бейкера–Ахиезера ([19], идея восходит к построению производящей функции законов сохранения при помощи обращения преобразования Миуры [20]). Эквивалентность обоих определений установлена Уилсоном [19] и Флашкой [21]. В приложении к выводу необходимых условий интегрируемости техника, основанная на вычетах, подробно описана, например, в работах [1], [2]. Она требует более сложных вычислений, чем метод, основанный на разложении формальной ψ -функции [22], [23], [6]. Оба метода работают и в разностном случае [24], но только в предположении, что $\deg G = 1$, что, как было отмечено выше, является существенной оговоркой.

В разделе 5 условия (4) выводятся при помощи разложения формальной функции ψ , что проще вычисления $\text{Res } G^j$ и позволяет получить для плотностей явные компактные выражения в терминах полиномов Белла. Впрочем, как следует из результатов Ямилова [7], [10], для выделения списка интегрируемых цепочек при $m = 1$ нужны лишь три простейших условия, которые нетрудно получить без всякой теории и при очень скромных предположениях о симметриях и законах сохранения. Это позволяет надеяться, что и в случае, скажем, $m = 2$ классификация требует рассмотрения не слишком большого числа условий.

2. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ В РАЗНОСТНОМ СЛУЧАЕ

Пусть $\mathcal{F}$ – поле локально аналитических функций от конечного числа динамических переменных u_n , $n \in \mathbb{Z}$, и оператор сдвига T действует на функции из $\mathcal{F}$ по правилу

$$T(a(u_i, \dots, u_j)) = a(u_{i+1}, \dots, u_{j+1}).$$

Правило $aT^i bT^j = aT^i(b)T^{i+j}$, распределенное по сложению, определяет умножение разностных операторов, при этом формальные ряды Лорана по отрицательным или

положительным степеням T образуют тела

$$\mathcal{F}((T^{-1})) = \left\{ \sum_{j < +\infty} a_j T^j \mid a_j \in \mathcal{F} \right\}, \quad \mathcal{F}((T)) = \left\{ \sum_{j > -\infty} a_j T^j \mid a_j \in \mathcal{F} \right\}.$$

Все утверждения в этом разделе сформулированы для рядов из $\mathcal{F}((T^{-1}))$, для переноса на $\mathcal{F}((T))$ достаточно сделать переобозначение $u_n \rightarrow u_{-n}$, $T \rightarrow T^{-1}$.

Пусть $F = f_m T^m + \dots \in \mathcal{F}((T^{-1}))$ – заданный ряд степени $m > 0$, $D_t: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ – заданное эволюционное дифференцирование (т.е. коммутирующее с T ; это обеспечивает то, что D_t является также дифференцированием в $\mathcal{F}((T^{-1}))$). Рассмотрим уравнение Лакса

$$D_t(G) = [F, G] \quad (5)$$

и будем искать его решение в виде ряда $G \in \mathcal{F}((T^{-1}))$ степени $k > 0$. В отличие от непрерывной ситуации, для ряда G общего вида корень $G^{1/k}$ не определен, поэтому изучение решений (или препятствий к их существованию) нельзя свести к случаю $k = 1$. Тем не менее оказывается, что если решение G существует, то его коэффициенты имеют некую специальную структуру, благодаря чему выполняются следующие свойства.

1. Уравнение (5) допускает другое решение H , степени m , такое что $H^k = G^m$. При этом m не обязательно является минимальной положительной степенью решений. Таким образом, в дискретном случае извлечение корня возможно в некотором ослабленном смысле. Это свойство доказывается в теореме 1.

2. Среди решений степени m можно выбрать такое, что $G = F + o(T)$ (т.е. $\deg(G - F) < 1$). На первый взгляд, это очевидно, поскольку (5) дает те же уравнения для отрезка ряда $G_{>0} = g_m T^m + \dots + g_1 T$, что и уравнение $[F, G] = 0$. Однако их общее решение может отличаться от $F_{>0}$ лишними постоянными параметрами, а последующие уравнения могут оказаться разрешимыми только при определенном выборе этих постоянных. В принципе может случиться так, что уравнения для всех коэффициентов G разрешимы в $\mathcal{F}$ только при таких постоянных, что $G_{>0} \neq F_{>0}$. То, что этого не происходит, доказывается в следствии 1.

Прежде чем переходить к доказательствам, рассмотрим несколько конкретных формул для коэффициентов решений уравнения Лакса в двух простейших примерах.

ПРИМЕР 1: $m = 1$, $k = 2$. Пусть $F = f_1 T + f_0 + \dots$ и уравнение (5) имеет решение $G = g_2 T^2 + g_1 T + \dots$. Можно ли найти решение H , такое что $H^2 = G$? Выпишем несколько первых уравнений на коэффициенты G :

$$\begin{aligned} 0 &= f_1 T(g_2) - T^2(f_1)g_2, \\ D_t(g_2) &= f_1 T(g_1) - T(f_1)g_1 + f_0 g_2 - T^2(f_0)g_2, \\ D_t(g_1) &= f_1 T(g_0) - f_1 g_0 + f_0 g_1 - T(f_0)g_1 + f_{-1} T^{-1}(g_2) - T^2(f_{-1})g_2. \end{aligned}$$

Из первого уравнения находим $g_2 = f_1 T(f_1)$ (с точностью до постоянного множителя), после этого второе уравнение приводится к виду

$$(T+1)(D_t(\ln f_1)) = (T-1)\left(\frac{g_1}{f_1}\right) - (T^2-1)(f_0),$$

откуда следует, что существует функция $h_0 \in \mathcal{F}$, такая что

$$\frac{g_1}{f_1} = (T+1)(h_0), \quad D_t(\ln f_1) = (T-1)(h_0 - f_0).$$

(Здесь используются свойства разностных операторов с постоянными коэффициентами: $\ker(T+1) = 0$, $\ker(T-1) = \mathbb{C}$.) Подстановка в третье уравнение после несложных преобразований дает

$$(T+1)(D_t(h_0)) = (T-1)(g_0 - h_0^2) - (T^2-1)(f_{-1}T^{-1}(f_1)),$$

откуда следует, что существует функция $h_{-1} \in \mathcal{F}$, такая что

$$g_0 = h_0^2 + (T+1)(h_{-1}T^{-1}(f_1)), \quad D_t(h_0) = (T-1)((h_{-1} - f_{-1})T^{-1}(f_1)).$$

Собирая все вместе, получаем

$$\begin{aligned} G &= f_1 T(f_1) T^2 + f_1 (T+1)(h_0) T + h_0^2 + (T+1)(h_{-1}T^{-1}(f_1)) + o(1) = \\ &= (f_1 T + h_0 + h_{-1}T^{-1})^2 + o(1), \end{aligned}$$

что позволяет предположить, что корень действительно извлекается.

ПРИМЕР 2: $m = 2$, $k = 2$. Пусть $F = f_2 T^2 + f_1 T + \dots$ и уравнение (5) имеет решение $G = f_2 T^2 + g_1 T + \dots$. Можно ли при этом положить $g_1 = f_1$? Пусть $g_1 \neq f_1$, тогда ряд $F - G$ имеет степень 1, и, повторяя вычисления из предыдущего примера для уравнения $D_t(G) = [F - G, G]$, приходим к формулам

$$G = (h_1 T + h_0 + h_{-1} T^{-1})^2 + o(1), \quad f_1 - g_1 = c h_1, \quad f_2 = g_2 = h_1 T(h_1).$$

Таким образом, если считать доказанным, что $G = H^2$, то мы действительно можем перейти к решению $G + cH = f_2 T^2 + f_1 T + \dots$.

Наши вычисления имеют тот недостаток, что в них коэффициенты ряда $G^{1/2}$ находятся неявно, при помощи обращения операторов $T+1$ или $T-1$. Однако их можно получить и по явным формулам, если заранее известно, что искомым ряд существует. Идея заключается в том, что для извлечения корня нужно одновременно использовать оба уравнения $D_t(H) = [F, H]$ и $H^2 = G$. Это приводит к рекуррентным соотношениям типа

$$f_1 T(h_j) - T^j(f_1) h_j = D_t(h_{j+1}) + \dots, \quad f_1 T(h_j) + T^j(f_1) h_j = g_{j+1} + \dots,$$

где правые части содержат коэффициенты $h_1, h_0, \dots, h_{j+1}$, найденные на предыдущих шагах, и вычитая, получаем для h_j явное выражение. После этого еще нужно

убедиться, что выполняются оба уравнения. Это не очевидно, но правдоподобно, поскольку эти уравнения совместны в том смысле, что из них следует уравнение $D_t(G) = [F, G]$, которое выполнено по условию.

Для реализации этих наводящих соображений при доказательстве теоремы 1 нам понадобятся ряды с неавтономными коэффициентами. Рассмотрим расширение поля $\mathcal{F}$ в виде кольца $\tilde{\mathcal{F}}$, элементами которого служат последовательности локально аналитических функций $a(n) = a(n; u_{r_n}, \dots, u_{s_n})$, $n \in \mathbb{Z}$, причем каждая функция в последовательности зависит от своего собственного конечного набора динамических переменных. Элементы из $\mathcal{F}$ отождествляются с последовательностями специального вида $a(n) = a(u_{n+r}, \dots, u_{n+s})$. По определению последовательности перемножаются почленно, а действие оператора T заключается просто в сдвиге по n , т. е. $T^k(a(n)) = a(n+k)$. Умножение в кольце

$$\tilde{\mathcal{F}}((T^{-1})) = \left\{ \sum_{j < +\infty} a_j(n) T^j \mid a_j(n) = a_j(n; u_{r_{j,n}}, \dots, u_{s_{j,n}}) \in \tilde{\mathcal{F}} \right\}$$

определяется, как и раньше, правилом $a(n)T^i b(n)T^j = a(n)b(n+i)T^{i+j}$. Нетрудно видеть, что в этом расширении уравнение Лакса всегда разрешимо.

ЛЕММА 1. Пусть $F(n) = f_m(n)T^m + \dots \in \tilde{\mathcal{F}}((T^{-1}))$, $m \geq 1$, и $f_m(n) \neq 0$ при всех n . Тогда для любой степени k существует единственный ряд $G(n) = g_k(n)T^k + \dots \in \tilde{\mathcal{F}}((T^{-1}))$, удовлетворяющий уравнению (5) и заданным начальным условиям $G(0), G(1), \dots, G(m-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коэффициенты $g_j(n)$ вычисляются последовательно при $j = k, k-1, \dots$. Уравнение для $g_j(n)$ возникает из (5) в порядке T^{j+m} и представляет собой рекуррентное соотношение вида

$$f_m(n)g_j(n+m) - f_m(n+j)g_j(n) = \dots,$$

где в правую часть входят члены уже найденных последовательностей $g_i(n)$ с номерами $i > j$. Отсюда значения $g_j(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, определяются однозначно при заданных $g_j(0), \dots, g_j(m-1)$. ■

ТЕОРЕМА 1. Пусть ряды $G, F \in \mathcal{F}((T^{-1}))$ удовлетворяют уравнению Лакса $D_t(G) = [F, G]$ и $\deg F = m \geq 1$, $\deg G = k \geq 1$. Тогда существует ряд $H \in \mathcal{F}((T^{-1}))$ степени m , единственный с точностью до умножения на $1^{1/k}$, такой что $D_t(H) = [F, H]$ и $H^k = G^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Старший коэффициент ряда H удовлетворяет уравнению

$$f_m T^m(h_m) = T^m(f_m)h_m,$$

общее решение которого в $\mathcal{F}$ имеет вид $h_m = \text{const} \cdot f_m$. Постоянная определяется с точностью до корня из единицы путем сравнения старших членов в равенстве $H^k = G^m$.

Следующие коэффициенты будем строить в виде последовательностей $h_j(n)$ из кольца $\tilde{\mathcal{F}}$, как в лемме 1. Докажем методом индукции по j , что существуют единственные начальные данные $H(0), H(1), \dots, H(m-1)$, при которых выполняются условия

$$(H^k - G^m)|_{n=0} = \dots = (H^k - G^m)|_{n=m-1} = 0. \quad (6)$$

Допустим, что уже найдены коэффициенты $h_m(n), \dots, h_{j+1}(n)$, такие что уравнение $D_t(H) = [F, H]$ выполняется вплоть до порядка T^{m+j+1} , а уравнения (6) выполняются вплоть до порядка $T^{m(k-1)+j+1}$. Уравнения для $h_j(n)$, возникающие в следующих порядках, запишем при помощи операторов $A(n) = f_m(n)T^m$ и $X(n) = h_j(n)T^j$:

$$[A(n), X(n)] = a(n)T^{m+j}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} A(n)^{k-1}X(n) + A(n)^{k-2}X(n)A(n) + \dots + X(n)A(n)^{k-1} = \\ = b(n)T^{(k-1)m+j}, \quad n = 0, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (8)$$

где $a(n), b(n)$ – некоторые многочлены от коэффициентов рядов F, G и уже известных коэффициентов $h_m, \dots, h_{j+1}$ (в том числе с производными по t). Легко видеть, что уравнение (8) при помощи (7) сводится к уравнениям вида

$$kX(n)A(n)^{k-1} = c(n)T^{(k-1)m+j},$$

т. е.

$$kh_j(n)f_m(n+j) \cdots f_m(n+j+(k-2)m) = c(n), \quad n = 0, \dots, m-1,$$

что однозначно определяет начальные данные для последовательности $h_j(n)$ и завершает индуктивный переход.

Для построенного решения ряд $H^k - G^m$ является решением уравнения Лакса с нулевыми начальными условиями, и согласно лемме 1 он тождественно равен нулю. Следовательно, уравнения (8) выполняются для всех $n \in \mathbb{Z}$, а не только для указанных.

Далее заметим, что многочлены $a(n), b(n)$, а следовательно, и $c(n)$, имеют при всех n один и тот же вид, как функции от коэффициентов рядов F, G, H . Это означает, что если $h_j(n) = p[F, G, H_{>j}]$, где p – функция от конечного числа переменных, то $h_j(n+1) = p[T(F), T(G), T(H_{>j})]$. Так как все $f_i, g_i \in \mathcal{F}$ и $h_m = f_m \in \mathcal{F}$, методом индукции получаем, что все $h_j \in \mathcal{F}$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства следует, что для вычисления первых r коэффициентов H требуется знать ровно r коэффициентов G (не считая коэффициенты F). Действительно, ряд G используется только в начальных условиях (6), где число коэффициентов из обоих рядов совпадает в каждом порядке по T .

Нетрудно показать, что если уравнение Лакса (5) имеет хотя бы одно нетривиальное решение (т. е. отличное от cT^0), то его общее решение представляется в виде ряда с постоянными коэффициентами

$$G = \sum_{j < +\infty} c_j H^j,$$

где H – решение минимальной положительной степени d . Отсюда, в частности, следует, что любые два решения коммутируют, а из доказанной теоремы следует, что d является делителем m .

СЛЕДСТВИЕ 1. Если уравнение $D_t(G) = [F, G]$ допускает нетривиальное решение из $\mathcal{F}((T^{-1}))$, то оно допускает и решение вида

$$G = f_m T^m + \dots + f_1 T + g_0 + g_{-1} T^{-1} + \dots \in \mathcal{F}((T^{-1})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 следует существование некоторого решения G степени m . Без потери общности будем считать, что старшие коэффициенты G и F совпадают, и пусть $\deg(F - G) = l$. Если $l \leq 0$, то утверждение доказано, рассмотрим случай $1 \leq l < m$.

Применив теорему 1 к уравнению $D_t(G) = [F - G, G]$, найдем ряд $H \in \mathcal{F}((T^{-1}))$ степени l , удовлетворяющий уравнениям $D_t(H) = [F - G, H]$. Ряд $H = h_l T^l + \dots$ коммутирует с G и $f_l - g_l = c h_l$. Отсюда следует, что ряд $G' = G + cH$ удовлетворяет исходному уравнению и $\deg(F - G') < l$. Повторяя, при необходимости, это рассуждение еще несколько раз, приходим к решению, совпадающему с F до члена $f_1 T$ включительно. ■

Отметим, что уравнение Лакса в первых m порядках по T может допускать решение $G_{>0}$, отличающееся от $F_{>0}$ лишними параметрами, даже если минимальная степень истинного решения G равна m . В такой ситуации эти параметры автоматически обращаются в нуль при разрешении уравнений для последующих коэффициентов G .

ПРИМЕР 1. Рассмотрим цепочку

$$u_{,t} = f[u] = u_1 u^2 u_{-1} (u_2 - u_{-2}),$$

связанную подстановкой $u_1 u = v$ с модифицированной цепочкой Вольтерры на растянутой решетке $v_{,t} = v^2(v_2 - v_{-2})$. Эта замена действует также на высших симметриях, что гарантирует (см. раздел 3) разрешимость уравнения Лакса с

$$F = f_* = u_1 u^2 u_{-1} T^2 + u^2 u_{-1} (u_2 - u_{-2}) T + \dots$$

Нетрудно проверить, что уравнение Лакса в первых двух порядках допускает решения как второй, так и первой степени:

$$G_{>0} = F_{>0} + c u u_{-1} T, \quad H_{>-1} = u u_{-1} T + u_1 u_{-1} - u u_{-2},$$

причем $G_{>0} = (H^2 + cH)_{>0}$. Однако уравнение для третьего коэффициента H оказывается неразрешимым в $\mathcal{F}$. Для решения G это означает, что постоянную c придется положить равной нулю при вычислении четвертого коэффициента.

3. ФОРМАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Напомним основные понятия симметричного подхода применительно к скалярным эволюционным цепочкам

$$\partial_t(u_n) = T^n(f(u_m, \dots, u_{\bar{m}})). \quad (9)$$

Для определенности аргументы функций будем упорядочивать по убыванию номеров. Кроме того, будем считать (применяя при необходимости отражение $u_n \rightarrow u_{-n}$), что

$$f^{(m)} \neq 0, \quad f^{(\bar{m})} \neq 0, \quad m \geq 1, \quad m \geq \bar{m},$$

где $f^{(j)} = \partial_j(f)$, $\partial_j = \partial/\partial u_j$. Числа m и $-\bar{m}$ будем называть соответственно *порядком* и *нижним порядком* цепочки. Функции $a \in \mathcal{F}$ сопоставим *эволюционную производную* ∇_a и *оператор линеаризации* a_* :

$$\nabla_a = \sum_{j \in \mathbb{Z}} T^j(a) \partial_j, \quad a_* = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{(j)} T^j \in \mathcal{F}[T, T^{-1}].$$

Для дифференцирования в силу уравнения (9) будем использовать также обозначение $D_t = \nabla_f$. Следующие тождества легко проверяются:

$$[\nabla_a, T] = 0, \quad (T(a))_* = Ta_*, \quad \nabla_a(b) = b_*(a), \quad (\nabla_a(b))_* = \nabla_a(b_*) + b_*a_*.$$

Цепочка

$$\partial_\tau(u_n) = T^n(g(u_k, \dots, u_{\bar{k}})) \quad (10)$$

называется *симметрией* цепочки (9), если выполнено условие

$$\nabla_f(g) = \nabla_g(f)$$

тождественно по u_j . Оно означает, что потоки $\partial_t, \partial_\tau$ коммутируют (что гарантирует существование совместного общего решения $u_n(t, \tau)$). Цепочка считается интегрируемой, если она допускает симметрии сколь угодно высокого порядка. Применяя линеаризацию, перепишем последнее уравнение в операторном виде

$$\nabla_f(g_*) = \nabla_g(f_*) + [f_*, g_*], \quad (11)$$

более удобном для анализа. Отбрасывая член $\nabla_g(f_*)$, имеющий фиксированную степень по T , приходим к уравнению

$$D_t(G) = [f_*, G], \quad (12)$$

решения которого называются *формальными симметриями* цепочки (9).

ТЕОРЕМА 2. Если цепочка (9) допускает симметрии (10) со сколь угодно большим k , то уравнение (12) имеет решение $G \in \mathcal{F}((T^{-1}))$ вида

$$G = f^{(m)}T^m + \dots + f^{(1)}T + g_0 + g_{-1}T^{-1} + \dots \quad (13)$$

Если цепочка (9) с $\bar{m} < 0$ допускает симметрии (10) со сколь угодно большим $-\bar{k}$, то уравнение (12) имеет решение $\bar{G} \in \mathcal{F}((T))$ вида

$$\bar{G} = f^{(\bar{m})}T^{\bar{m}} + \dots + f^{(-1)}T^{-1} + \bar{g}_0 + \bar{g}_1T + \dots \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом замены $u_n \rightarrow u_{-n}$, $T \rightarrow T^{-1}$ достаточно доказать первое утверждение. Ряд

$$g_* = g^{(k)}T^k + \dots + g^{(1)}T + o(T) \in \mathcal{F}((T^{-1}))$$

удовлетворяет уравнению (5) в порядках $T^{k+m}, \dots, T^{m+1}$. Применяя процедуру извлечения корня, описанную в теореме 1, с учетом замечания 1 приходим к ряду $G \in \mathcal{F}((T^{-1}))$, такому что

$$D_t(G) = [f_*, G] + o(T^{2m-k+1}), \quad \deg G = m. \quad (15)$$

При этом согласно следствию 1 можно считать $G_{>0} = (f_*)_{>0}$ (если $k > m$). Так как k можно выбрать сколь угодно большим, то уравнение (5) разрешимо во всех порядках по T . ■

Условия разрешимости уравнения (12) относительно коэффициентов ряда G или $\bar{G}$ служат необходимыми условиями интегрируемости. Формула (15) показывает, что из существования симметрии порядка $k \geq m+r$ следует выполнение r условий для коэффициентов $g_0, \dots, g_{-r+1}$. Младшие симметрии с $k \leq m$ не дают никаких условий, поскольку они “теряются” на фоне тривиальной симметрии с $g = f$, которой отвечает оператор $G = (f_*)_{>0}$. Аналогично, если существует симметрия нижнего порядка $-\bar{k} = -\bar{m} + r$, то выполняются условия разрешимости для коэффициентов $\bar{g}_0, \dots, \bar{g}_{r-1}$ ряда $\bar{G}$. К сожалению, неизвестно, сколько условий нужно проверить, чтобы гарантировать существование хотя бы одной симметрии, пусть даже невысокого порядка. Тем не менее эти условия достаточно удобны и для тестирования, и для классификации, поскольку они выписываются непосредственно по правой части цепочки и их вид не зависит от реальных порядков симметрий, которые заранее неизвестны.

Первое условие и некоторое следствие из m -го условия имеют особенно простой вид. Используем следующее простое свойство:

$$\text{Res}[A, B] \in \text{Im}(T - 1), \quad \text{Res } A := \text{coef}_{T^0} A, \quad A, B \in \mathcal{F}((T^{-1}))$$

(действительно, $[aT^j, bT^{-j}] = (T^j - 1)(T^{-j}(a)b)$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если цепочка (9) допускает симметрию (10) порядка $k > 2m$, то существуют функции $\sigma, \sigma_1 \in \mathcal{F}$, такие что

$$D_t(\ln f^{(m)}) = (T^m - 1)(\sigma), \quad D_t(f^{(0)} + \sigma) = (T - 1)(\sigma_1). \quad (16)$$

Если цепочка (9) допускает симметрию (10) с $\bar{k} \leq 2\bar{m} < 0$, то существуют функции $\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_1 \in \mathcal{F}$, такие что

$$D_t(\ln f^{(\bar{m})}) = (T^{\bar{m}} - 1)(\bar{\sigma}), \quad D_t(f^{(0)} + \bar{\sigma}) = (T - 1)(\bar{\sigma}_1). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2 уравнение (12) разрешимо в порядках $T^{2m}, \dots, T^0$, причем можно принять $G_{>0} = (f_*)_{>0}$. Применяя операцию Res к уравнению (12) и эквивалентному уравнению

$$D_t(G)G^{-1} = f_* - G - G(f_* - G)G^{-1},$$

получаем соответственно

$$D_t(g_0) \in \text{Im}(T - 1), \quad \frac{D_t(f^{(m)})}{f^{(m)}} = (T^m - 1)(g_0 - f^{(0)}),$$

что равносильно (16). Формулы (17) выводятся аналогично. ■

Вообще, уравнение (12) в каждом порядке по T имеет вид

$$A_j(g_j) = b_j, \quad A_j = T^m - \frac{T^j(a)}{a}, \quad a = f^{(m)}, \quad j = 0, -1, -2, \dots,$$

где b_j – известное выражение, содержащее коэффициенты f_* и $g_0, \dots, g_{j+1}$. Таким образом, тест на интегрируемость для заданной цепочки заключается в проверке, шаг за шагом, выполнено ли условие $b_j \in \text{Im } A_j$. Если оно не выполняется, то цепочка неинтегрируема, если выполняется, то нужно вычислить g_j и перейти к следующему условию. Заметив, что уравнение $A_{j+m}(g) = b$ сводится к $A_j(\tilde{g}) = \tilde{b}$ в результате замены $g = T^j(a)\tilde{g}$, приходим к задаче о характеристизации образа и вычислении прообраза для операторов

$$T^m - 1, \quad T^m - \frac{T(a)}{a}, \quad \dots, \quad T^m - \frac{T^{m-1}(a)}{a}$$

с заданной функцией a . В случае $m = 1$ решение хорошо известно:

$$\text{Im}(T - 1) = \ker E, \quad E = \frac{\delta}{\delta u} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} T^{-j} \partial_j,$$

где E – оператор Эйлера или вариационная производная, а прообраз $T - 1$ можно найти, применяя разностную версию алгоритма интегрирования по частям или при помощи оператора гомотопии (см., например, [24], [25]). При $m > 1$ задача также допускает конструктивное решение, хотя и более сложное (в частности, ответ зависит от того, лежит ли $\ln a$ в образе оператора $T^{m-d} + \dots + T^d + 1$, где d – делитель m).

4. ФОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ

Наибольший интерес представляет симметричный случай $\bar{m} = -m$, поскольку только у таких цепочек могут быть законы сохранения высокого порядка. Напомним, что функция $\rho \in \mathcal{F}$ называется *плотностью закона сохранения* для цепочки (9), если существует функция $\sigma \in \mathcal{F}$, такая что

$$\nabla_f(\rho) = (T - 1)(\sigma). \quad (18)$$

Плотность называется *тривиальной*, если $\rho \in \text{Im}(T-1)$, и две плотности называются *эквивалентными*, если их разность тривиальна. Чтобы факторизовать тривиальные законы сохранения, применим к (18) оператор Эйлера, это дает уравнение для $r = E(\rho) = \rho_*^\dagger(1)$:

$$\nabla_f(r) + f_*^\dagger(r) = 0,$$

где $\dagger: \mathcal{F}((T^{\pm 1})) \rightarrow \mathcal{F}((T^{\mp 1}))$ обозначает сопряжение $(aT^j)^\dagger = T^{-j}a$. Еще раз применив линеаризацию, приходим к операторному уравнению

$$\nabla_f(r_*) + f_*^\dagger r_* + r_* f_* + \sum_{m \geq i, j \geq \bar{m}} T^{-j} (r f^{(i,j)}) T^{i-j} = 0. \quad (19)$$

Отметим, что оператор r_* симметричен, $r_* = r_*^\dagger$. В частности, r зависит от симметричного набора переменных: $r = r(u_k, \dots, u_{-k})$, $r^{(\pm k)} \neq 0$. Число k называется *порядком* закона сохранения. Нетрудно видеть, что степени по T для четырех слагаемых в уравнении (19) равны соответственно k , $k - \bar{m}$, $k + m$ и $M \leq m - \bar{m}$. Отсюда следует, что цепочка (9) с $\bar{m} \neq -m$ не может иметь законов сохранения порядка $k > \min(m, -\bar{m})$. Итак, далее будем считать, что $\bar{m} = -m$, т.е. цепочка имеет вид

$$\partial_t(u_n) = T^n(f(u_m, \dots, u_{-m})), \quad f^{(\pm m)} \neq 0. \quad (20)$$

Отбрасывая в (19) последнюю сумму, имеющую фиксированную степень по T , приходим к уравнению

$$D_t(R) + f_*^\dagger R + R f_* = 0, \quad (21)$$

решение которого в виде ряда из $\mathcal{F}((T^{-1}))$ или $\mathcal{F}((T))$ называется *формальным законом сохранения* для цепочки (20). Уравнение (21) инвариантно относительно сопряжения, поэтому можно ограничиться рядами из $\mathcal{F}((T^{-1}))$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть цепочка (20) допускает законы сохранения сколь угодно высокого порядка k . Тогда уравнение (12) имеет решения вида

$$G = f^{(m)}T^m + \dots + f^{(1)}T + g_0 + g_{-1}T^{-1} + \dots \in \mathcal{F}((T^{-1})), \quad (22)$$

$$\bar{G} = f^{(-m)}T^{-m} + \dots + f^{(-1)}T^{-1} + \bar{g}_0 + \bar{g}_1T + \dots \in \mathcal{F}((T)), \quad (23)$$

а уравнение (21) имеет решение вида

$$R = r_l T^l + r_{l-1} T^{l-1} + \dots \in \mathcal{F}((T^{-1})), \quad 0 \leq l < m, \quad (24)$$

такое что

$$\bar{G}^\dagger R = -RG. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассматривать операторы r'_* , r_* , отвечающие законам сохранения порядков $k' > k > m$, как ряды из $\mathcal{F}((T^{-1}))$. Из (19) следует, что эти ряды удовлетворяют уравнению (21) в старших $k - m$ порядках по T . Извлекая

корень из ряда $r_*^{-1}r'_*$ степени $k' - k > 0$, приходим к ряду степени m , удовлетворяющему уравнению (12), также в $k - m$ старших порядках, т.е. с точностью до членов $o(T^{3m-k+1})$. Так как k сколь угодно велико, уравнение (12) разрешимо во всех порядках по T , и, учитывая следствие 1, получаем для него решение вида (22).

Законы сохранения порядка $k = qt + l$, $0 \leq l < m$, образуют бесконечное множество хотя бы при одном l . Для соответствующих рядов r_* ряды r_*G^{-q} имеют степень l и удовлетворяют уравнению (21) в старших $(q-1)m + l$ порядках, откуда следует существование решения R (24).

Для построенных рядов $G, R \in \mathcal{F}((T^{-1}))$ ряд $\bar{G} = -(RGR^{-1})^\dagger \in \mathcal{F}((T))$ также является решением уравнения (12). При этом согласно (21)

$$(\bar{G}^\dagger)_{>0} = -RG_{>0}R^{-1} = -R(f_*)_{>0}R^{-1} = (f_*^\dagger)_{>0},$$

откуда следует, что $\bar{G}_{<0} = (f_*)_{<0}$. ■

Сравнение с теоремой 2 (при $\bar{m} = -m$) показывает, что предположение о наличии бесконечного набора законов сохранения дает более жесткие по сравнению с высшими симметриями условия интегрируемости:

$$\begin{array}{ccc} \text{законы сохранения} & & \text{высшие симметрии} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ G, R & \Rightarrow & G, \bar{G} \end{array}$$

Недостатком условий, которые вытекают из уравнения для R , является то, что степень $l = \deg R$ заранее неизвестна, поэтому для их проверки приходится применять перебор для $l = 0, \dots, m-1$. В частности, вместо утверждения 1 получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если цепочка (20) допускает два закона сохранения порядков $k' > k > 3m$, то существуют функции $\sigma, \sigma_1, s, s_1 \in \mathcal{F}$ и целое l , $0 \leq l < m$, такие что

$$D_t(\ln f^{(m)}) = (T^m - 1)(\sigma), \quad D_t(f^{(0)} + \sigma) = (T - 1)(\sigma_1), \quad (26)$$

$$\ln \frac{-T^l(f^{(m)})}{f^{(-m)}} = (T^m - 1)(s), \quad D_t(s) + 2f^{(0)} = (T - 1)(s_1). \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях теоремы 3 ряды $G, \bar{G}, R$, построенные по r'_*, r_* , удовлетворяют уравнениям (12), (21) в старших $2m + 1$ порядках. Равенства (26) доказываются, как в утверждении 1. Первое соотношение (27) следует из (21) в старшем порядке, с функцией $s = \ln(f^{(-m)}r_l)$. Умножив (21) на R^{-1} и применив операцию Res, получаем $D_t(\ln r_l) + 2f_0 \in \text{Im}(T - 1)$, что равносильно второму соотношению (27).

5. ЦЕПОЧКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Условия интегрируемости принимают особенно простой вид для цепочек первого порядка

$$\partial_t(u_n) = T^n(f(u_1, u, u_{-1})), \quad f^{(\pm 1)} \neq 0. \quad (28)$$

В этом случае уравнение Лакса для $G = f^{(1)}T + g_0 + g_{-1}T^{-1} + \dots$ оказывается эквивалентным последовательности законов сохранения (возможно, тривиальных), заданной определенными рекуррентными соотношениями. Для их записи нам понадобятся многочлены

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, & P_1(x_1) &= x_1, & P_2(x_1, x_2) &= x_2 + \frac{x_1^2}{2}, \\ P_3(x_1, x_2, x_3) &= x_3 + x_1x_2 + \frac{x_1^3}{6}, & \dots, \end{aligned}$$

определяемые производящей функцией

$$P_0[x] + P_1[x]\lambda + P_2[x]\lambda^2 + \dots = e^{x_1\lambda + x_2\lambda^2 + x_3\lambda^3 + \dots}.$$

Эти многочлены, хорошо известные в теории представлений бесконечномерных алгебр Ли (см., например, [26], [27]), связаны с полными экспоненциальными полиномами Белла Y_k [28] заменой $k!P_k(x_1, \dots, x_k) = Y_k(x_1, \dots, k!x_k)$.

Чтобы переписать уравнение $D_t(G) = [f_*, G]$ в виде законов сохранения, воспользуемся тем, что оно служит условием совместности для уравнений

$$G(\psi) = \lambda\psi, \quad D_t(\psi) = f_*(\psi), \quad (29)$$

и рассмотрим разложения по λ для отношений

$$p = \frac{T(\psi)}{\psi}, \quad q = \frac{D_t(\psi)}{\psi}. \quad (30)$$

Это приводит к уравнениям

$$f^{(1)}p + g_0 - \lambda + \frac{g_{-1}}{T^{-1}(p)} + \frac{g_{-2}}{T^{-1}(p)T^{-2}(p)} + \dots = 0, \quad (31)$$

$$q = f^{(1)}p + f^{(0)} + \frac{f^{(-1)}}{T^{-1}(p)}, \quad (32)$$

$$\frac{D_t(p)}{p} = (T-1)(q). \quad (33)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (31) определяет обратимую замену между коэффициентами рядов G и $p = p_{-1}\lambda + p_0 + p_1\lambda^{-1} + \dots$:

$$p_{-1} = \frac{1}{f^{(1)}}, \quad p_0 = -\frac{g_0}{f^{(1)}}, \quad p_1 = -\frac{g_{-1}T^{-1}(f^{(1)})}{f^{(1)}}, \quad \dots,$$

такую что $G \in \mathcal{F}((T^{-1}))$, тогда и только тогда, когда $p \in \mathcal{F}((\lambda^{-1}))$. При этом из (32) следует, что $q = \lambda - \sigma_0 - \sigma_1 \lambda^{-1} - \dots \in \mathcal{F}((\lambda^{-1}))$, а решение уравнений (29) (формальная функция Бейкера–Ахиезера) строится путем интегрирования уравнений (30) в виде ряда

$$\psi(n) = a(n)\lambda^n(1 + a_1(n)\lambda^{-1} + a_2(n)\lambda^{-2} + \dots)$$

с коэффициентами в некотором расширении поля $\mathcal{F}$. После еще одной замены

$$p = \frac{\lambda}{f^{(1)}} e^{-\rho_1 \lambda^{-1} - \rho_2 \lambda^{-2} - \dots} \quad (34)$$

уравнения (32) и (33) сводятся к соотношениям

$$D_t(\rho_j) = (T - 1)(\sigma_j), \quad j \geq 0, \quad (35)$$

$$\rho_0 = \ln f^{(1)}, \quad \rho_1 = f^{(0)} + \sigma_0, \quad (36)$$

$$P_{j+1}[-\rho] + f^{(-1)}T^{-1}(f^{(1)}P_{j-1}[\rho]) + \sigma_j = 0, \quad j > 0. \quad (37)$$

Существование формальной симметрии $G \in \mathcal{F}((T^{-1}))$ эквивалентно разрешимости уравнений (35) относительно $\sigma_j \in \mathcal{F}$, причем плотности ρ_{j+1} явно находятся из (37):

$$\rho_2 = f^{(-1)}T^{-1}(f^{(1)}) + \frac{1}{2}\rho_1^2 + \sigma_1,$$

$$\rho_3 = f^{(-1)}T^{-1}(f^{(1)}\rho_1) + \rho_1\rho_2 - \frac{1}{6}\rho_1^3 + \sigma_2,$$

$$\rho_4 = f^{(-1)}T^{-1}\left(f^{(1)}\left(\rho_2 + \frac{1}{2}\rho_1^2\right)\right) + \rho_1\rho_3 + \frac{1}{2}\rho_2^2 - \frac{1}{2}\rho_1^2\rho_2 + \frac{1}{24}\rho_1^4 + \sigma_3, \quad \dots$$

Чтобы записать в аналогичном виде следствия из существования второй формальной симметрии $\bar{G} \in \mathcal{F}((T))$, рассмотрим функцию $\bar{\psi}$, удовлетворяющую уравнениям

$$\bar{G}^\dagger(\bar{\psi}) = -\lambda\bar{\psi}, \quad D_t(\bar{\psi}) = -f_*^\dagger(\bar{\psi}).$$

Как и раньше, нетрудно проверить, что отношения

$$\bar{p} = \frac{T(\bar{\psi})}{\bar{\psi}}, \quad \bar{q} = \frac{D_t(\bar{\psi})}{\bar{\psi}}$$

имеют разложения по λ вида

$$\bar{p} = -\frac{\lambda}{T(f^{(-1)})} e^{-\bar{\rho}_1 \lambda^{-1} - \bar{\rho}_2 \lambda^{-2} - \dots}, \quad \bar{q} = \lambda - \bar{\sigma}_0 - \bar{\sigma}_1 \lambda^{-1} - \dots$$

с коэффициентами $\bar{\rho}_j, \bar{\sigma}_j \in \mathcal{F}$ и удовлетворяют уравнениям

$$\bar{q} = -T(f^{(-1)})\bar{p} - f^{(0)} - \frac{T^{-1}(f^{(1)})}{T^{-1}(\bar{p})}, \quad \frac{D_t(\bar{p})}{\bar{p}} = (T-1)(\bar{q}).$$

Отсюда для функций $\bar{\rho}_j, \bar{\sigma}_j$ следуют те же рекуррентные соотношения (35), (37), что и для ρ_j, σ_j , но с начальными условиями

$$\bar{\rho}_0 = \ln(-T(f^{(-1)})), \quad \bar{\rho}_1 = -f^{(0)} + \bar{\sigma}_0 \quad (38)$$

вместо (36). Если цепочка (28) допускает к тому же формальный закон сохранения $R = r_0 + r_{-1}T^{-1} + \dots \in \mathcal{F}((T^{-1}))$, то из уравнений (21), (25) следует, что можно принять $\bar{\psi} = R(\psi)$. Тогда ряд

$$s = \ln \frac{\bar{\psi}}{\psi} = s_0 + s_1\lambda^{-1} + \dots \in \mathcal{F}((\lambda^{-1}))$$

удовлетворяет уравнениям

$$\ln \bar{p} - \ln p = (T-1)(s), \quad D_t(s) = \bar{q} - q,$$

т. е. обе последовательности плотностей связаны соотношениями

$$\rho_j - \bar{\rho}_j = (T-1)(s_j), \quad j \geq 0. \quad (39)$$

При этом функции $\bar{\sigma}_j = \sigma_j - D_t(s_j)$ можно не рассматривать, так как $\bar{\rho}_j$ находятся из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_0 &= \ln(-T(f^{(-1)})), \quad \rho_1 - \bar{\rho}_1 = 2f^{(0)} + D_t(s_0), \\ P_{j+1}[-\bar{\rho}] - P_{j+1}[-\rho] + f^{(-1)}T^{-1}(f^{(1)}(P_{j-1}[\bar{\rho}] - P_{j-1}[\rho])) &= D_t(s_j), \quad j > 0. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось в разделе 1, для выделения интегрируемых цепочек (28) хватает согласно [7] всего лишь трех простейших условий (одного условия типа (35) и двух условий типа (39), ср. также с утверждением 2), которые можно переписать в виде

$$\begin{aligned} D_t(\ln f^{(1)}) &\in \text{Im}(T-1), \\ \ln \frac{-f^{(1)}}{f^{(-1)}} &= (T-1)(s), \quad D_t(s) + 2f^{(0)} \in \text{Im}(T-1). \end{aligned}$$

Их можно вывести из предположений, что цепочка допускает симметрию порядка $k \geq 2$ и закон сохранения порядка $k' \geq 3$ или что она допускает два закона сохранения порядков $k' > k \geq 3$. Анализ этих условий представляет собой довольно трудоемкую задачу и приводит к конечному списку цепочек. Перебором можно

проверить, что все они обладают бесконечным набором высших симметрий (и законов сохранения, за исключением некоторых вырожденных случаев типа линейной цепочки $\partial_t(u_n) = u_{n+1} - u_{n-1}$, у которой нет законов сохранения выше нулевого порядка, но уравнение (21) допускает решение $R = 1$).

Для полноты картины приведем утверждение об эквивалентности построенных законов сохранения (35) со стандартным определением через вычеты степеней формальной симметрии. Доказательство в основном следует Купершмидту (гл. IX.3 в [24]) и является перенесением на дискретный случай доказательства из работы Флашки [21].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть цепочка (28) допускает формальную симметрию $G = f^{(1)}T + \dots \in \mathcal{F}((T^{-1}))$ и величины ρ_j определены соотношениями (31), (34), тогда

$$\text{Res } G^j - j\rho_j \in \text{Im}(T - 1), \quad j = 1, 2, \dots \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (29), (30) для функции ψ имеем

$$T(\psi) = p\psi = \sum_j p_j \lambda^{-j} \psi = \sum_j p_j G^{-j}(\psi),$$

откуда следует тождество

$$T = p_{-1}G + p_0 + p_1G^{-1} + p_2G^{-2} + \dots, \quad (41)$$

эквивалентное соотношению (31) между рядами G и p . Введем обозначения

$$G_j = (G^j)_{\geq 0}, \quad A_j = (G^j)_{< 0}, \quad \epsilon_j = \text{coef}_{T^{-1}} G^j$$

(в частности, $\epsilon_{-1} = 1/T^{-1}(f^{(1)})$, $\epsilon_0 = 0$). Умножая (41) справа на G^j и отбрасывая отрицательные степени T , получаем

$$TG_j + T(\epsilon_j) = p_{-1}G_{j+1} + p_0G_j + \dots + p_jG_0, \quad j = -1, 0, 1, \dots,$$

что равносильно равенству (разностная версия формулы Чередника [29])

$$(T - p)\mathcal{G} = -T(E) \quad (42)$$

для производящих функций

$$\mathcal{G} = 1 + \lambda^{-1}G_1 + \lambda^{-2}G_2 + \dots, \quad E = \epsilon_{-1}\lambda + \epsilon_0 + \epsilon_1\lambda^{-1} + \dots$$

Применяя операцию Res, получаем

$$\text{Res } \mathcal{G} = 1 + \lambda^{-1} \text{Res } G + \lambda^{-2} \text{Res } G^2 + \dots = \frac{T(E)}{p}. \quad (43)$$

Далее, обозначим

$$\alpha_j = \frac{A_j(\psi)}{\psi} = \frac{\epsilon_j}{T^{-1}(p)} + \frac{a_{j,-2}}{T^{-1}(p)T^{-2}(p)} + \dots = \epsilon_j T^{-1}(f^{(1)})\lambda^{-1} + \dots,$$

тогда

$$\frac{G_j(\psi)}{\psi} = \lambda^j - \alpha_j, \quad \frac{TG_j(\psi)}{\psi} = p(\lambda^j - T(\alpha_j)).$$

Применим тождество (42) к $\psi(\mu)$ и разделим на $\psi(\mu)$:

$$\begin{aligned} -T(E(\lambda)) &= (T - p(\lambda)) \frac{\mathcal{G}(\lambda)(\psi(\mu))}{\psi(\mu)} = \\ &= \sum_{j \geq 0} \lambda^{-j} [p(\mu)(\mu^j - T(\alpha_j(\mu))) - p(\lambda)(\mu^j - \alpha_j(\mu))] = \\ &= \frac{\lambda(p(\mu) - p(\lambda))}{\lambda - \mu} + \sum_{j \geq 0} \lambda^{-j} [p(\lambda)\alpha_j(\mu) - p(\mu)T(\alpha_j(\mu))]. \end{aligned}$$

Разделим на $-p(\lambda)$ и перейдем к пределу $\mu \rightarrow \lambda$, получим

$$\frac{T(E)}{p} = \lambda \partial_\lambda (\ln p) + \sum_{j \geq 0} \lambda^{-j} (T - 1)(\alpha_j).$$

Утверждение следует из сравнения с (34) и (43). ■

В заключение отметим, что аналог замены $p = T(\psi)/\psi$ существует и для цепочек порядка m : можно показать, что уравнение $G(\psi) = \lambda\psi$ с рядом $G \in \mathcal{F}((T^{-1}))$ степени m эквивалентно уравнению

$$(T^m - p_{m-1}T^{m-1} - \dots - p_0)(\psi) = 0, \quad p_j \in \mathcal{F}((\lambda^{-1})).$$

В матричных обозначениях уравнения (29) принимают вид

$$T(\Psi) = P\Psi, \quad D_t(\Psi) = Q\Psi,$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \vdots \\ T^{m-1}(\psi) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{m-1} \end{pmatrix}$$

и элементы матрицы Q выражаются через $f^{(j)}$ и p_j . Уравнение (33) заменяется на уравнение

$$D_t(P) = T(Q)P - PQ,$$

откуда, в частности, следует, что $\ln p_0$ служит производящей функцией для законов сохранения. Однако в приложении к выводу условий интегрируемости это уравнение приводит к довольно громоздким формулам и, по-видимому, не дает преимуществ по сравнению с прямолинейным разрешением уравнения Лакса для формальной симметрии.

Благодарности. Большое значение для автора имели обсуждения данной темы с Р. И. Ямиловым. Условия (26), (27) в несколько более слабой форме были получены Р. И. Ямиловым в 2008 г. исходя из предположения о существовании формальной симметрии произвольной степени [30]. Настоящее исследование было поддержано РФФИ (грант № 13-01-00402_а) и Программой SFB/TR 109 “Discretization in Geometry and Dynamics”.

Список литературы

- [1] V. V. Sokolov, A. B. Shabat, *Sov. Sci. Rev. Sect. C*, **4** (1984), 221–280.
- [2] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *УМН*, **42:4**(256) (1987), 3–53.
- [3] В. В. Соколов, *УМН*, **43:5**(263) (1988), 133–163.
- [4] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, V. V. Sokolov, “The symmetry approach to classification of integrable equations”, *What is Integrability?*, ed. V. E. Zakharov, Springer, Berlin, 1991, 115–184.
- [5] A. B. Shabat, A. V. Mikhailov, “Symmetries – test of integrability”, *Important Developments in Soliton Theory*, eds. A. S. Fokas, V. E. Zakharov, Springer, Berlin, 1993, 355–372.
- [6] А. Г. Мешков, В. В. Соколов, *Уфимск. матем. журн.*, **4:3** (2012), 104–154, arXiv: 1302.6010.
- [7] Р. И. Ямилов, *УМН*, **38:6**(234) (1983), 155–156.
- [8] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *Алгебра и анализ*, **2:2** (1990), 183–208.
- [9] D. Levi, R. I. Yamilov, *J. Math. Phys.*, **38:12** (1997), 6648–6674.
- [10] R. I. Yamilov, *J. Phys. A*, **39:45** (2006), R541–R623.
- [11] V. E. Adler, *J. Phys. A*, **41:14** (2008), 145201, 14 pp.
- [12] I. Schur, “Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke”, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.*, **4** (1905), 2–8.
- [13] О. И. Богоявленский, *УМН*, **46:3**(279) (1991), 3–48.
- [14] V. E. Adler, V. V. Postnikov, *J. Phys. A*, **44:41** (2011), 415203, 17 pp.
- [15] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov, *J. Phys. A*, **45:34** (2012), 345205, 23 pp.
- [16] Р. Н. Гарифуллин, А. В. Михайлов, Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **180:1** (2014), 17–34.
- [17] С. И. Свинолупов, *ТМФ*, **65:2** (1985), 303–307.
- [18] И. М. Гельфанд, Л. А. Диккий, *Функц. анализ и его прил.*, **10:4** (1976), 13–29.
- [19] G. Wilson, *Quart. J. Math.*, **32:4** (1981), 491–512.
- [20] R. M. Miura, C. S. Gardner, M. D. Kruskal, *J. Math. Phys.*, **9:8** (1968), 1204–1209.
- [21] H. Flaschka, *Quart. J. Math.*, **34:1** (1983), 61–65.
- [22] H. H. Chen, Y. C. Lee, C. S. Liu, *Phys. Scr.*, **20:3–4** (1979), 490–492.

- [23] A. G. Meshkov, *Inverse Probl.*, **10**:3 (1994), 635–653.
- [24] B. A. Kupershmidt, *Discrete Lax Equations and Differential-Difference Calculus*, *Astérisque*, **123**, Société mathématique de France, Paris, 1985.
- [25] P. E. Hydon, E. L. Mansfield, *Found. Comput. Math.*, **4**:2 (2004), 187–217.
- [26] M. Jimbo, T. Miwa, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **19**:3 (1983), 943–1001.
- [27] V. G. Кас, A. K. Raina, *Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras*, Advanced Series in Mathematical Physics, **2**, World Sci., Singapore, 1987.
- [28] L. Comtet, *Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions*, D. Reidel, Dordrecht, 1974.
- [29] И. В. Чередник, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:3 (1978), 45–54.
- [30] R. I. Yamilov, “Symmetries as integrability criteria”, *Continuous Symmetries and Integrability of Discrete Equations*, eds. D. Levi, P. Winternitz, R. I. Yamilov, in preparation.

Поступила в редакцию 1.06.2014