Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Павлов, Д. В. Прохоров, А. Ю. Васильев, А. М. Захаров, Эволюция Лёвнера и конечномерные редукции интегрируемых систем, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 1, 155–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8724>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 11:03:50

© 2014 г.

М. В. Павлов^{*†}, Д. В. Прохоров[‡],
А. Ю. Васильев[§], А. М. Захаров[‡]

ЭВОЛЮЦИЯ ЛЁВНЕРА И КОНЕЧНОМЕРНЫЕ РЕДУКЦИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Уравнение Лёвнера известно как одномерная редукция цепочки Бенни, а также как бездисперсионная иерархия Кадомцева–Петвиашвили. Предложена обратная процедура и показано, что расщепление времени в уравнении Лёвнера или в уравнении Лёвнера–Куфарева приводит к некоторым известным интегрируемым системам.

Ключевые слова: уравнение Лёвнера, интегрируемая система, уравнение Власова, моменты Бенни, бесстолкновительное кинетическое уравнение, гамильтонова структура, гидродинамическая цепочка, гидродинамическая редукция.

DOI: 10.4213/tmf8724

Посвящается Л. Д. Фаддееву по случаю его восьмидесятилетия

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из центральных проблем теории интегрируемых систем является их конечномерная редукция. Начнем в качестве примера с иерархии бездисперсионного уравнения Кадомцева–Петвиашвили (иерархии бКП). Пусть $\lambda(z, \mathbf{t})$ – мероморфная функция переменной z , зависящая также от бесконечного семейства обобщенных времен $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n \dots)$, $t_0 = x$, которая в окрестности бесконечности разлагается в ряд

$$\lambda(z, \mathbf{t}) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(\mathbf{t})}{z^{n+1}}$$

^{*}Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: maksmath@gmail.com

[†]Московский инженерно-физический институт (государственный университет), Москва, Россия

[‡]Саратовский государственный университет, Саратов, Россия. E-mail: prokhorov@sgu.ru, zakharovam66@gmail.com

[§]Department of Mathematics, University of Bergen, Bergen, Norway.
E-mail: Alexander.Vasiliev@math.uib.no

(здесь верхний индекс в выражении A^n означает не степень, а индекс). Структуру Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ введем следующим образом:

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial z}.$$

Тогда иерархия БКП (см. работу [1]) представляет собой бесконечное множество коммутирующих потоков

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t_n} = \{\mathcal{L}_{n+1}, \lambda\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{n}(\lambda^n)_{\geq 0}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

означает полиномиальную часть выражения λ^n . В частности,

$$(\lambda)_{\geq 0} = z, \quad (\lambda^2)_{\geq 0} = z^2 + 2A^0, \quad (\lambda^3)_{\geq 0} = z^3 + 3zA^0 + 3A^1.$$

При $n = 2$ и $s = t_1$ второе уравнение иерархии эквивалентно уравнению

$$A_s^n + A_x^{n+1} + nA^{n-1}A_x^0 = 0, \quad (2)$$

которое известно как уравнение моментов Бенни. Бенни исследовал [2] длинные нелинейные волны, распространяющиеся на свободной поверхности, и показал, что уравнения движения обладают бесконечным числом законов сохранения.

Условие совместности системы (1) имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial t_n} - \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial t_m} + \{\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_n\} = 0 \quad (3)$$

и означает, что потоки (1) коммутируют. В частности, при $m = 3$, $n = 2$, $y = t_2$ и $u := A^0$ получим уравнение

$$u_{ss} + (u_y + uu_x)_x = 0, \quad (4)$$

известное как уравнение БКП или уравнение Заболотской–Хохлова [3].

Конечномерная редукция предполагает, что функция λ зависит от обобщенных времен $\mathbf{t}$ через конечное число функций $u_k = u_k(\mathbf{t})$, т. е.

$$\lambda(z, \mathbf{t}) = \lambda(z, \mathbf{u}(\mathbf{t})) = \lambda(z, u_1(\mathbf{t}), \dots, u_N(\mathbf{t})).$$

Хорошо известная полиномиальная редукция была предложена Захаровым [4].

Кодама и Гиббонс [1] поняли, что уравнение БКП обладает бесконечным числом многокомпонентных двумерных редукций, и предложили несколько примеров, причем для этих частных случаев была найдена функция λ . В работе [1] была рассмотрена вектор-функция $\mathbf{u}$, удовлетворяющая системе гидродинамического типа

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_n} = \xi_n(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Гиббонс и Царев [5] первыми обратили внимание на то, что хордовое уравнение Лёвнера играет важную роль в классификации редукций уравнений Бенни. Если ввести обозначения

$$u = u_0 = A^0, \dots, u_N = A^N, \quad A^n = A^n(\mathbf{u}), \quad n > N,$$

то мы получим $N(N-1)/2$ условий совместности для A^{N+1} , при этом функция $z = z(\lambda, \mathbf{t})$, обратная к λ , удовлетворяет уравнениям

$$\partial_k z = -\frac{\partial_k u}{z - \mu_k}, \quad (5)$$

где $\partial_k = \partial/\partial r^k$, μ_k — нули функции λ_z , а величины $r^k = \lambda(\mu_k, \mathbf{t})$ являются инвариантами Римана. Приведенное выше уравнение с формальной точки зрения аналогично хордовому уравнению Лёвнера, которое обсуждается далее. Условия совместности для уравнений (5) имеют вид

$$\partial_i \mu_k = \frac{\partial_k u}{\mu_i - \mu_k}, \quad \partial_i \partial_k u = 2 \frac{\partial_i u \partial_k u}{(\mu_i - \mu_k)^2} \quad (6)$$

и представляют собой систему Гиббонса–Царева.

В работе [6] было предложено обобщение, в котором функция λ и обратная к ней ищутся как решения системы уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^N \frac{\eta_{ik}}{z - \mu_k},$$

удовлетворяющей некоторым условиям совместности. С формальной точки зрения приведенное выше уравнение снова имеет вид хордового уравнения Лёвнера со многими разрезами.

Позже Такебе, Тео и Забродин [7] показали, что хордовое и радиальное уравнения Лёвнера являются условиями совместности редукций к одной переменной для иерархий БКП и цепочки Тоды соответственно. В хордовом случае функция λ , удовлетворяющая равенству (1), зависит от $\mathbf{t}$ посредством одной функции $s(\mathbf{t})$, причем

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} = -\frac{\kappa}{z - \xi} \frac{\partial \lambda}{\partial z},$$

где κ является производной по s коэффициента при $1/z$ в разложении Лорана функции λ . Кроме того, имеет место условие совместности гидродинамического типа

$$\frac{\partial s}{\partial t_n} = \chi_n \frac{\partial s}{\partial x},$$

и функции $\chi_n(s)$ строятся каноническим образом по функциям Лакса. Мы снова получаем хордовое уравнение Лёвнера в частных производных. Эти подходы в определенной степени нуждаются в аналитическом объяснении, которое можно вывести из теории Лёвнера.

С другой стороны, еще один эволюционный процесс, описанный лапласовским ростом [8], обладает бесконечным числом законов сохранения, выраженных гармоническими моментами [9]. Моменты лапласовского роста удовлетворяют бездисперсионной иерархии Тоды [10]. В отличие от лапласовского роста, эволюция Лёвнера

относится к другой группе моделей, когда эволюция обусловлена бесконечным числом управляющих параметров, а именно к группе контролируемых динамических систем, в которых бесконечное число степеней свободы связано с бесконечным числом управляющих членов. Удивительно, что для этой группы появляется та же самая структурная основа – алгебра Вирасоро [11].

Идея настоящей статьи состоит в пересмотре выводов Гиббонса и Царева с целью показать, что хордовая эволюция Лёвнера также обладает бесконечным числом законов сохранения (моментов). Мы покажем, что уравнение Лёвнера в частных производных представляет собой в точности уравнение Власова, если использовать соответствующую замену переменных, а обыкновенное дифференциальное уравнение Лёвнера имеет следствием закон сохранения гидродинамического типа. Мы начнем с эволюции Лёвнера и, расщепив время, получим интегрируемые цепочки. Этот подход демонстрирует универсальность уравнения Лёвнера как объединяющего механизма для нескольких интегрируемых цепочек, что было отмечено в работе [12].

2. УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА И ЛЁВНЕРА, ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Рассмотрим цепь Лёвнера сжимающихся областей $\mathbb{H}_t = \mathbb{H} \setminus \gamma_t$ в верхней полуплоскости $\mathbb{H} = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ (см. рис. 1). Пусть функция $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}_t$ нормирована в окрестности бесконечности следующим образом:

$$f(z, t) = z + \frac{A^0}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (7)$$

где $-A^0(t)$ есть емкость кривой γ_t относительно полуплоскости. Пусть γ_t – кривая Жордана, целиком лежащая в полуплоскости $\mathbb{H}$, за исключением конечной точки на действительной оси $\mathbb{R}$, кривая γ_t параметризуется временем t . Тогда f удовлетворяет уравнению Лёвнера в частных производных

$$(z - \xi_t) \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} - \frac{dA^0}{dt} \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

с вещественнозначной непрерывной управляющей функцией ξ_t и начальным условием $f(z, 0) = f_0(z)$. Для каждого $t \geq 0$ функция $f(z, t)$ имеет непрерывное продолжение на замыкание полуплоскости $\mathbb{H}$, причем продолженная функция, которую мы также обозначим через $f(z, t)$, удовлетворяет уравнению (8), по крайней мере, почти всюду. Управляющая функция ξ_t порождает растущий разрез γ_t .

Воспользуемся двухпараметрическим семейством конформных отображений

$$g(w, t, \tau) := f^{-1}(w(z, t), \tau) = f^{-1}(f(z, t), \tau), \quad 0 \leq \tau \leq t < \infty.$$

Положим также $g(w, t, 0) =: g(w, t)$. Функция g отображает полуплоскость $\mathbb{H}$ в некоторое ее подмножество и удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению Лёвнера на полуплоскости:

$$\frac{\partial g(w, t, \tau)}{\partial t} = -\frac{1}{g(w, t, \tau) - \xi_t} \frac{dA^0}{dt}, \quad 0 \leq \tau \leq t < \infty, \quad g(w, \tau, \tau) = w. \quad (9)$$

Более того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(w, t, \tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} f^{-1}(f(z, t), \tau) = f(z, \tau).$$

Рис. 1. Цепь Лёвнера сжимающихся областей.

Введем расщепление времени как вещественнозначную функцию $t = t(x, s)$, которая является решением квазилинейного дифференциального уравнения

$$\xi_t \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial s} = 0 \quad (10)$$

с асимптотическим поведением

$$\lim_{x \rightarrow \infty} t(x, s) = \lim_{x \rightarrow -\infty} t(x, s) < \infty.$$

Предположим, что ξ_t является функцией, допускающей конус решений для уравнения (10) с нужным асимптотическим поведением.

Рассмотрим теперь суперпозицию $f(z, t(x, s))$ и умножим обе части уравнения (8) на $\partial t / \partial x$. Чтобы избежать дополнительных обозначений, мы продолжим писать f вместо $f(z, t(x, s)) = f(z, x, s)$. Тогда

$$z \frac{\partial f}{\partial x} - \xi_t \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial A^0}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Используя (10), получим уравнение

$$z \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial A^0}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

которое представляет собой уравнение Власова [5], [13]. Это уравнение описывает эволюцию функции распределения плазмы, состоящей из заряженных частиц с дальним взаимодействием. В гидродинамическом описании плазмы рассматривается распределение не скоростей, а моментов $A^n(t(x, s)) \equiv A^n(x, s)$ плазмы.

Выберем среди решений уравнения Власова (11) такие, которые дают конечные интегралы для моментов A^n . А именно, для данного решения $f(z, x, s)$ с нормировкой (7) выберем решение $\phi(z, x, s) = \varphi(f(z, x, s))$, где φ – подходящая быстро убывающая при $z \rightarrow \pm\infty$ функция (см., например, работу [14]). В качестве такой функции можно выбрать, скажем, $\varphi(f) = e^{-f^2}$. Тогда моменты $A^n(x, s)$ определим следующим образом:

$$A^n(x, s) = \int_{-\infty}^{\infty} w^n \phi(w, x, s) dw, \quad n = 1, 2, \dots$$

С помощью непосредственных вычислений получим

$$A_s^n = \int_{-\infty}^{\infty} w^n \frac{\partial \phi}{\partial s} dw, \quad A_x^{n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} w^{n+1} \frac{\partial \phi}{\partial x} dw.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$A^{n-1} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^n}{n} \frac{\partial \phi}{\partial w} dw.$$

Теперь можно воспользоваться уравнением Власова (11) и получить уравнения для моментов

$$A_s^n + A_x^{n+1} + nA^{n-1}A_x^0 = 0, \quad (12)$$

которые представляют собой бесконечную автономную систему, известную как уравнения моментов Бенни [2]. Данная система появляется в длинноволновой гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины в гравитационном поле.

Следуя работам [5], [15], введем функцию $\lambda(z, x, s)$ с помощью главного значения Коши сингулярного интеграла:

$$\lambda(z, x, s) = z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(w, x, s)}{z - w} dw = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}}, \quad z \in \mathbb{H}, \quad z \rightarrow \infty,$$

где $z = g(w, t(x, s))$, а коэффициент A^0 тот же, что и для f . Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_s &= \frac{\partial \lambda}{\partial s} = z_s + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_s^n}{z^{n+1}} - \frac{(n+1)A^n z_s}{z^{n+2}} \right), \\ \lambda_x &= \frac{\partial \lambda}{\partial x} = z_x + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_x^n}{z^{n+1}} - \frac{(n+1)A^n z_x}{z^{n+2}} \right) \end{aligned}$$

и

$$\lambda_s + z\lambda_x = z_s + zz_x + A_x^0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_s^n + A_x^{n+1} - nA^{n-1}z_s - (n+1)A^n z_x}{z^{n+1}}.$$

Используя уравнение для моментов, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \lambda_s + z\lambda_x &= z_s + zz_x + A_x^0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-nA^{n-1}A_x^0}{z^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA^{n-1}(z_s + zz_x)}{z^{n+1}} = \\ &= A_x^0 \lambda_z + (z_s + zz_x) \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA^{n-1}}{z^{n+1}} \right) = \lambda_z (A_x^0 + z_s + zz_x). \end{aligned}$$

Уравнение Лёвнера (9) влечет $A_x^0 = z_x(\xi_t - z)$, а определение функции $t(x, s)$ приводит к соотношению

$$A_x^0 + z_s + zz_x = 0, \quad (13)$$

следовательно, на траекториях уравнения Лёвнера (9) справедливо равенство

$$\lambda_s + z\lambda_x = 0.$$

В работе [16] уравнение (13) было названо уравнением Гиббонса в соответствии с оригинальной работой Гиббонса [17].

Рассмотрим отображение $z(\lambda, x, s)$, обратное отображению $\lambda(z, x, s)$ по отношению к переменным $\lambda \leftrightarrow z$,

$$\lambda(z, x, s) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}}, \quad z \in \mathbb{H}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (14)$$

$$z(\lambda, x, s) = \lambda - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{\lambda^{n+1}}. \quad (15)$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{\lambda^{n+1}}, \quad \frac{\lambda}{z} \left(A^0 + \frac{A^1}{z} + \dots \right) = H^0 + \frac{H^1}{\lambda} + \dots.$$

Итак, $H^0 = A^0$. Далее,

$$\lambda \left(\frac{\lambda}{z} - 1 \right) A^0 + \frac{\lambda^2}{z^2} \left(A^1 + \frac{A^2}{z} + \dots \right) = H^1 + \frac{H^2}{\lambda} + \dots,$$

и мы приходим к выводу, что $H^1 = A^1$. Аналогично,

$$\lambda^2 \left(\frac{\lambda}{z} - 1 \right) A^0 + \lambda \left(\frac{\lambda^2}{z^2} - 1 \right) A^1 + \frac{\lambda^3}{z^3} \left(A^2 + \frac{A^3}{z} + \dots \right) = H^2 + \frac{H^3}{\lambda} + \dots$$

и $H^2 = A^2 + (A^0)^2$. Окончательно имеем

$$\sum_{k=0}^n \lambda^{n-k} \left(\frac{\lambda^{k+1}}{z^{k+1}} A^k - H^k \right) + \frac{\lambda^{n+1}}{z^{n+2}} \left(A^{n+1} + \frac{A^{n+2}}{z} + \dots \right) = \frac{1}{\lambda} \left(H^{n+1} + \frac{H^{n+2}}{\lambda} + \dots \right),$$

где коэффициент H^n рассчитывается по формуле $H^n = A^n + P(A^0, \dots, A^{n-1})$, в которой $P(A^0, \dots, A^{n-1})$ – полином по $A^0, \dots, A^{n-1}$, $n \geq 2$. Первые коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} H^0 &= A^0, & H^1 &= A^1, & H^2 &= A^2 + (A^0)^2, & H^3 &= A^3 + 3A^0 A^1, \\ H^4 &= A^4 + 4A^0 A^2 + 2(A^1)^2 + 2(A^0)^3. \end{aligned}$$

Аналогичные коэффициенты были вычислены в работах [15], [18].

Таким образом, уравнение Лёвнера (9) становится законом сохранения в следующем смысле. Согласно соотношению (13) имеем

$$\frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} z(\lambda, x, s) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} (A_x^0 + z z_x) dx,$$

где интеграл по $x \in \mathbb{R}$ понимается в смысле главного значения Коши. Требования к асимптотическому поведению функции $t(x, s)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ подразумевают, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (A_x^0 + z z_x) dx = 0,$$

поэтому

$$\frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} z(\lambda, x, s) dx = 0,$$

что соответствует закону сохранения моментов. Итак, величинами, сохраняющимися в процессе эволюции, являются моменты

$$I^n = \int_{-\infty}^{\infty} H^n(x, s) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Аналогичные интегралы движения изучались в оригинальной работе Бенни [2], а также в работах [4], [15], [19].

Структура Пуассона позволяет переформулировать уравнение моментов Бенни (12) в виде эволюционного уравнения с гамильтоновой функцией. Пуассонова структура Купершмидта–Манина [15], [20] для моментов $A^n \frac{\partial}{\partial x}$ задается с помощью введения $L^2(\mathbb{R})$ -кососимметрических операторов, действующих по формуле

$$\{A^m, A^n\}(\cdot) = -mA^{n+m-1} \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) - n \frac{\partial}{\partial x}(A^{n+m-1}(\cdot)).$$

Тогда для любых $F(A)$ и $G(A)$ можно представить скобку Пуассона в виде

$$\{F, G\}(A) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta F}{\delta A^m} \{A^m, A^n\} \frac{\delta G}{\delta A^n} dx.$$

Записав формулу

$$\bar{H}^k = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} H^k dx = \frac{1}{k} I^k,$$

получим иерархию коммутирующих потоков в виде эволюционных уравнений с гамильтонианами $\bar{H}^k$ такими, что $\{\bar{H}^k, \bar{H}^j\} = 0$:

$$\frac{\partial A^m}{\partial t_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \{A^m, A^n\} \frac{\delta \bar{H}^k}{\delta A^n}.$$

Таким образом, уравнение (12) становится вторым уравнением из этой иерархии.

3. КОНЕЧНОМЕРНОЕ ВРЕМЯ

Уравнение Лёвнера (8) в частных производных можно обобщить до уравнения:

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^m \frac{\mu_k(t)}{z - \xi_k(t)} \frac{dA^0}{dt} \frac{\partial f(z, t)}{\partial z}, \quad f(z, 0) = f_0(z), \quad (16)$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами $\mu_k(t) \geq 0$, $k = 1, \dots, m$, такими, что $\sum_{k=1}^m \mu_k(t) = 1$, и вещественнозначными непрерывными управляющими функциями $\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)$. Решение $f(z, t)$ уравнения (16) отображает полуплоскость $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H} \setminus \cup_{k=1}^m \gamma_k(t)$, где $\gamma_k(t)$ – растущие кривые Жордана (разрезы), лежащие в $\mathbb{H}$, за исключением их конечных точек на $\mathbb{R}$. Управляющие функции $\xi_k(t)$ порождают разрезы $\gamma_k(t)$, а коэффициенты $\mu_k(t)$ управляют динамикой разрезов $\gamma_k(t)$ относительно друг друга.

Вместо уравнения (16) можно рассмотреть обобщенное уравнение Лёвнера в частных производных с обобщенным вектором времени $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)$:

$$(z - \xi_k(\mathbf{t})) \frac{\partial f(z, \mathbf{t})}{\partial t_k} = \frac{\partial A^0}{\partial t_k} \frac{\partial f(z, \mathbf{t})}{\partial z}, \quad k = 1, \dots, m, \quad f(z, \mathbf{0}) = f_0(z), \quad (17)$$

где $\mathbf{0}$ означает нулевой вектор. В этой модели $A^0(\mathbf{t}) = A^0(t_1, \dots, t_m)$ не является произвольной функцией от $\mathbf{t}$. В каждой точке $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)$ имеем

$$\frac{\partial A^0}{\partial t_1} = \frac{\partial A^0}{\partial t_2} = \dots = \frac{\partial A^0}{\partial t_m}.$$

Для каждой точки $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)$, решение $f(z, \mathbf{t})$ системы (17) отображает полуплоскость $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H} \setminus \bigcup_{k=1}^m \gamma_k(t_k)$, где $\gamma_k(t_k)$ является конечной точкой разреза γ_k , порожденного управляющей функцией $\xi_k(\mathbf{t})$.

Аналогично случаю скалярного t положим

$$g(w, \tau, \mathbf{t}) := f^{-1}(w(z, \tau), \mathbf{t}) = f^{-1}(f(z, \tau), \mathbf{t}), \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_m),$$

где $0 \leq \tau_k \leq t_k < \infty$ для любого $k = 1, \dots, m$. Мы также введем $g(w, \mathbf{0}, \mathbf{t}) =: g(w, \mathbf{t})$. Функция g отображает полуплоскость $\mathbb{H}$ в ее подмножество и удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений Лёвнера на полуплоскости

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(w, \tau, \mathbf{t})}{\partial t_k} &= -\frac{1}{g(w, \tau, \mathbf{t}) - \xi_k(\mathbf{t})} \frac{\partial A^0}{\partial t_k}, \quad k = 1, \dots, m, \\ g(w, \tau, \tau) &= w; \end{aligned} \quad (18)$$

здесь $\tau_j \leq t_j < \infty$ для всех $j = 1, \dots, m$. Более того,

$$\lim_{t_k \rightarrow \infty} g(w, \tau, (\tau_1, \dots, \tau_{k-1}, t_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_m)) = f(z, \tau).$$

Вектор-функцию $\mathbf{t} = \mathbf{t}(x, s)$ можно снова ввести как решение системы квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\xi_k(\mathbf{t}) \frac{\partial t_k}{\partial x} + \frac{\partial t_k}{\partial s} = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (19)$$

с асимптотическим поведением

$$\lim_{x \rightarrow \infty} t_k(x, s) = \lim_{x \rightarrow -\infty} t_k(x, s) < \infty, \quad k = 1, \dots, m.$$

Предположим, что функции $\xi_k(t_k)$ допускают конусы решений уравнения (19) с необходимым асимптотическим поведением.

Уравнение (17) подразумевает, что функция $f(z, \mathbf{t}(x, s)) =: f(z, x, s)$ удовлетворяет уравнению

$$z \frac{\partial f}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial x} - \xi_k(\mathbf{t}) \frac{\partial f}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial x} - \frac{\partial A^0}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

которое вместе с (19) дает

$$z \frac{\partial f}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial s} - \frac{\partial A^0}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Суммируя последние уравнения по $k = 1, \dots, m$, получим уравнение Власова для функции $f(z, \mathbf{t}(x, s))$:

$$z \frac{\partial f(z, \mathbf{t}(x, s))}{\partial x} + \frac{\partial f(z, \mathbf{t}(x, s))}{\partial s} - \frac{\partial A^0}{\partial x} \frac{\partial f(z, \mathbf{t}(x, s))}{\partial z} = 0.$$

Аналогично скалярному случаю появляются моменты $A^n(\mathbf{t}(x, s)) =: A^n(x, s)$, удовлетворяющие уравнению (12), функции $\lambda(z, x, s)$ и $z(\lambda, x, s)$, а также иерархия коммутирующих потоков с гамильтонианами $\tilde{H}^k$.

Уравнения (17) можно свести к уравнению (16). В самом деле, предположим, что $\mu_1(t) > 0$, и построим следующую редукцию:

$$\frac{dt_k}{dt_1} = \frac{\mu_k}{\mu_1}, \quad t_k(0) = 0, \quad k = 2, \dots, m.$$

Тогда, после умножения на $\partial t_k / \partial t_1$ и суммирования, уравнения (17) для $t_1 = t$ и $f(z, \mathbf{t}(t)) =: f(z, t)$ переходят в уравнение

$$\frac{\partial f(z, \mathbf{t}(t))}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial t_2} \frac{\partial t_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_m} \frac{\partial t_m}{\partial t} = \frac{1}{\mu_1} \left[\frac{\mu_1}{z - \xi_1} \frac{\partial A^0}{\partial t_1} + \dots + \frac{\mu_m}{z - \xi_m} \frac{\partial A^0}{\partial t_m} \right] \frac{\partial f}{\partial z},$$

которое эквивалентно уравнению (16) с $\tilde{A}^0 = A^0 / \mu_1$.

4. БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЕ ВРЕМЯ

Предельный случай уравнения (16) при $m \rightarrow \infty$ приводит к уравнению типа Лёвнера–Куфарева

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dA^0}{dt} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{d\nu_t(\xi)}{z - \xi(t)}, \quad (20)$$

где для любого $t \geq 0$ величина $d\nu_t(\xi)$ является вероятностной мерой с компактным носителем $I_t \subset \mathbb{R}$. Решение $f(z, t)$ уравнения (20) отображает полуплоскость $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H} \setminus K_t$, где, вообще говоря, отброшенное множество $K_t \cap \mathbb{H}$ не сводится к счетному набору разрезов. Множество K_t порождается мерой $d\nu_t(\xi)$. Однако область $\mathbb{H} \setminus K_t$ является ядром Каратеодори для последовательности областей $\mathbb{H} \setminus \cup_{k=1}^m \gamma_k(t)$ при $m \rightarrow \infty$, причем разрезы γ_k плотны в K_t . В такой интерпретации мера $d\nu_t(\xi)$ представляется как предел мер точечных масс с плотным множеством точечных масс на носителе вероятностной меры $d\nu_t$. В этом случае невозможно напрямую обобщить систему (17), переходя к бесконечному набору уравнений, соответствующих счетному набору координат $(t_1, t_2, \dots)$.

Построим модель с последовательной динамикой каждого из разрезов $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. Для $k = 1, 2, \dots$ введем обозначение

$$P_k(z, t_k) = \begin{cases} \frac{\partial A^0}{\partial t_k} \frac{\partial f(z, t_k)}{\partial z} & \text{при } T_{k-1} < t_k < T_k, \\ 0 & \text{при } t_k \notin (T_{k-1}, T_k) \end{cases}$$

(здесь и далее $T_0 = 0$). Теперь вместо (20) можно ввести систему уравнений в частных производных с бесконечным набором координат $\mathbf{t} := (t_1, t_2, \dots)$:

$$(z - \xi_k(t_k)) \frac{\partial f}{\partial t_k} = P_k(z, t_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Предположим, что функция $f_0(z)$ разлагается в окрестности бесконечности следующим образом:

$$f_0(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}}, \quad (22)$$

и пусть f_0 служит начальным условием для цепочки Лёвнера, управляемой уравнением (20), и начальным условием для первого уравнения системы (21). Следовательно, функция $f(z, t_k)$ выступает в качестве начальных данных для $(k+1)$ -го уравнения системы (21). Ясно, что итоговая цепочка $f(z, t) = f(z, \mathbf{t})$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$, в противоположность цепочке, полученной из (20), является кусочно-дифференцируемой. Функции $f(z, t)$ нормированы так же, как и функции (22) с $A^n = A^n(t)$.

Итак, существуют управляющие функции $\xi_1(t_1), \xi_2(t_2), \dots$ такие, что функция $f(z, \mathbf{t})$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$, является решением бесконечной системы уравнений (21) в частных производных.

Применим полученные в статье [7] результаты, чтобы построить для системы (21) редукции к уравнению от одной переменной для иерархии БКП.

Пусть $g(w, \mathbf{t}) := f^{-1}(w, \mathbf{t})$ — функция, обратная к $f(z, \mathbf{t})$. Тогда g нормирована на бесконечности следующим образом:

$$g(w, \mathbf{t}) = w + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(\mathbf{t})}{w^n}.$$

Обозначим полиномы Файбера для $g(w, \mathbf{t})$ как $\Phi_k(w, \mathbf{t}) = [g^k(w, \mathbf{t})]_{\geq 0}$, $k = 1, 2, \dots$. Забудем на некоторое время про зависимость от $\mathbf{t}$ и напомним просто $g(w)$ и $\Phi_k(w)$. Первые полиномы Фабера имеют вид

$$\Phi_0 = 1, \quad \Phi_1 = w, \quad \Phi_2 = w^2 - 2b_1, \quad \Phi_3 = w^3 - 3b_1w - 3b_2,$$

а рекуррентная формула

$$\Phi_{n+1} = w\Phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_{n-k}\Phi_k - (n+1)b_n$$

справедлива для всех $n = 1, 2, \dots$. Полиномы Фабера связаны с коэффициентами Грунскога, что влечет

$$\ln \frac{g(w) - \xi}{w} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nw^n} \Phi_n(\xi).$$

Производя замену переменной $\xi = e^u$ и дифференцируя обе части по u , получим

$$\frac{1}{g(w) - \xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nw^n} \Phi'_n(\xi).$$

Возвращаясь к уравнению (21), приходим к выводу, что функция $g = f^{-1}$ по первой переменной удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial g}{\partial t_k} = \begin{cases} -\frac{\partial A^0}{\partial t_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi'_n(\xi_k, t_k)}{nw^n} & \text{при } T_{k-1} < t_k < T_k, \\ 0 & \text{при } t_k \notin (T_{k-1}, T_k), \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Это означает, что для всех $k = 1, 2, \dots$

$$n \frac{\partial b_k}{\partial t_k} = \begin{cases} -\frac{\partial A^0}{\partial t_k} \Phi'_k(\xi_k, t_k) & \text{при } T_{k-1} < t_k < T_k, \\ 0 & \text{при } t_k \notin (T_{k-1}, T_k). \end{cases}$$

Существует очевидный способ написать зависимость от $\mathbf{t}$ через одну переменную $t = t_1$. Положим

$$\tau(\mathbf{t}) = \begin{cases} t_1 & \text{при } t_1 \in (0, T_1), \\ kt_k(t_1) & \text{при } t_1 \in (T_{k-1}, T_k), \quad k = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

где

$$\frac{dt_k}{dt_1} = \begin{cases} \Phi'_k(\xi_k, t_k) & \text{при } t_1 \in (0, T_1), \\ 0 & \text{при } t_1 \notin (T_{k-1}, T_k), \quad k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Проводя рассуждения в духе результатов Такебе, Тео и Забродина [7], заключаем следующее: непересекающиеся интервалы (T_{k-1}, T_k) означают, что для функции $f(z, \tau(\mathbf{t}))$, заданной в качестве решения системы (21) с начальным условием f_0 , мы имеем функцию Лакса $\mathcal{L} = f(z, \tau(\mathbf{t}))$, которая является решением иерархии БКП

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_k} = \{\mathcal{L}_k, \mathcal{L}\}, \quad T_{k-1} < t_k < T_k,$$

где $\mathcal{L}_k = k^{-1}[\mathcal{L}^k]_{\geq 0}$, а скобка Пуассона задана в виде

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial w}, \quad T_{k-1} < x := t_1 < T_k.$$

Уравнение Бенни снова можно восстановить как второе уравнение иерархии БКП следующим образом. Положим $s = t_2$. Тогда

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \{z^2 + 2A^0, \mathcal{L}\}, \quad T_1 < s, x < T_2,$$

где

$$\mathcal{L} = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}}.$$

Приравнивая коэффициенты перед степенями z , приходим к уравнениям (12). Высшие уравнения иерархии дают интересные уравнения в частных производных благодаря условиям на коммутирующие потоки (условиям совместности) (3). Например, при $n = 2$ и $m = 3$ мы приходим к уравнению БКП (4) (уравнению Хохлова–Заболотской [3]) для A^0 .

5. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА

Вернемся к условиям совместности (6) (системе Гиббонса–Царева), где $u(\mathbf{r})$ – плотность закона сохранения, а $\mu_k(\mathbf{r})$ – характеристические скорости для N -компонентной системы гидродинамического типа

$$r_s^i + \mu_i(\mathbf{r}) r_x^i = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (23)$$

написанной в инвариантах Римана. Система (23) интегрируема с помощью обобщенного метода годографа [21], [22] и имеет бесконечное число законов сохранения и коммутирующих потоков

$$r_y^i + \lambda_i(\mathbf{r})r_x^i = 0, \quad (24)$$

где λ_i – функции, которые зависят только от двух переменных μ_i , u , а именно $\lambda_i = F(\mu_i, u)$. Воспользуемся системой Царева

$$\frac{\partial_i \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} = \frac{\partial_i \mu_k}{\mu_i - \mu_k}, \quad i \neq k, \quad (25)$$

которая является прямым следствием равенства $(r_t^i)_y = (r_y^i)_t$. Подстановка представления $\lambda_i = F(\mu_i, u)$ в (25) дает

$$(\mu_k - \mu_i) \frac{\partial F(\mu_i, u)}{\partial u} = \frac{F(\mu_k, u) - F(\mu_i, u)}{\mu_k - \mu_i} - \frac{\partial F(\mu_i, u)}{\partial \mu_i}, \quad i \neq k. \quad (26)$$

Суммируя равенство (26) с равенством, полученным из (26) путем перестановки индексов, выводим уравнение

$$(\mu_k - \mu_i) \left(\frac{\partial F(\mu_i, u)}{\partial u} + \frac{\partial F(\mu_k, u)}{\partial u} \right) = \frac{\partial F(\mu_k, u)}{\partial \mu_k} - \frac{\partial F(\mu_i, u)}{\partial \mu_i}. \quad (27)$$

Эта формула в пределе $\mu_k \rightarrow \mu_i$ принимает вид

$$2 \frac{\partial F(\mu_i, u)}{\partial u} = \frac{\partial^2 F(\mu_i, u)}{\partial \mu_i^2}. \quad (28)$$

Тогда уравнение (27) переходит в

$$(\mu_k - \mu_i) \left(\frac{\partial^2 F(\mu_i, u)}{\partial \mu_i^2} + \frac{\partial^2 F(\mu_k, u)}{\partial \mu_k^2} \right) = 2 \left(\frac{\partial F(\mu_k, u)}{\partial \mu_k} - \frac{\partial F(\mu_i, u)}{\partial \mu_i} \right).$$

Взяв производную этого выражения по μ_k , получим

$$\frac{\partial^3 F(\mu_k, u)}{\partial \mu_k^3} = \frac{1}{\mu_k - \mu_i} \left(\frac{\partial^2 F(\mu_k, u)}{\partial \mu_k^2} - \frac{\partial^2 F(\mu_i, u)}{\partial \mu_i^2} \right), \quad i \neq k.$$

Переставляя индексы, приходим к выводу, что

$$\frac{\partial^3 F(\mu_k, u)}{\partial \mu_k^3} = a'(u)$$

для любого индекса k . Таким образом,

$$F(\mu_k, u) = \frac{1}{6} a(u) \mu_k^3 + b(u) \mu_k^2 + c(u) \mu_k + d(u), \quad (29)$$

где функции $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$ и $d(u)$ все еще не определены. Однако подстановка (29) в равенство (28) приводит к

$$a(u) = \text{const}, \quad b(u) = \text{const}, \quad 2c'(u) = a, \quad d'(u) = b.$$

В результате выражение (29) принимает вид

$$F(\mu_k, u) = \frac{a}{6}\mu_k^3 + \frac{a}{2}u\mu_k + b(\mu_k^2 + u). \quad (30)$$

Наконец, подставив эту формулу в (26), получим $a = 0$. Таким образом, мы нашли так называемое “дисперсионное соотношение”

$$\lambda_i = \mu_i^2 + u. \quad (31)$$

Согласно [22] напомним систему Лёвнера

$$\partial_i z = \frac{\partial_i u}{\mu_i - z}. \quad (32)$$

Тогда с учетом соотношений (23), (24), (31), (32) получаем

$$\begin{aligned} z_x &= \sum \partial_i z \cdot r_x^i = \sum \frac{\partial_i u}{\mu_i - z} r_x^i, \\ -z_s &= -\sum \partial_i z \cdot r_s^i = \sum \frac{\partial_i u}{\mu_i - z} \mu_i r_x^i = \sum \partial_i u \cdot r_x^i + z \sum \frac{\partial_i u}{\mu_i - z} r_x^i = u_x + z z_x, \\ -z_y &= -\sum \partial_i z \cdot r_y^i = \sum \frac{\partial_i u}{\mu_i - z} \lambda_i r_x^i = \sum \frac{\partial_i u}{\mu_i - z} (\mu_i^2 + u) r_x^i = \\ &= \sum \partial_i u \cdot (\mu_i - z) r_x^i + 2z \sum \partial_i u \cdot r_x^i + (z^2 + u) \sum \frac{\partial_i u}{\mu_i - z} r_x^i = \\ &= (v_x - z u_x) + 2z u_x + (z^2 + u) z_x = v_x + z u_x + u z_x + z^2 z_x, \end{aligned}$$

где введена новая функция $v(\mathbf{r})$ такая, что $\partial_i v = \mu_i \partial_i u$. В самом деле, потенциал v существует, поскольку условие совместности $\partial_i(\partial_k v) = \partial_k(\partial_i v)$ приводит к указанному тождеству в соответствии с системой Гиббонса–Царева (6).

Таким образом, мы восстановили два уравнения

$$z_s + \left(\frac{z^2}{2} + u \right)_x = 0, \quad z_y + \left(\frac{z^3}{3} + uz + v \right)_x = 0. \quad (33)$$

Условие их совместности $(z_s)_y = (z_y)_s$ приводит к уравнениям

$$v_x + u_s = 0, \quad v_s + u_y + uu_x = 0, \quad (34)$$

которые эквивалентны уравнению (4).

Теперь введем так называемое вершинное уравнение

$$\partial_{\tau(\zeta)} z(\lambda) = \partial_x \ln(z(\lambda) - z(\zeta)), \quad (35)$$

где $z(\lambda)$ – сокращенное обозначение для $z(\lambda; t_0, t_1, t_2, \dots)$. Здесь мы используем бесконечно много временных переменных t_k , которые обсуждаются ниже. Рассмотрим формальное разложение (15) при $\zeta \rightarrow \infty$ и разложение

$$\partial_{\tau(\zeta)} = -\frac{1}{\zeta} \partial_{t_0} - \frac{1}{\zeta^2} \partial_{t_1} - \frac{1}{\zeta^3} \partial_{t_2} - \dots. \quad (36)$$

Тогда можно получить бесконечный набор уравнений

$$\partial_{t_n} z(\lambda) = \partial_x \frac{\Phi_{n+1}(z(\lambda))}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где Φ_n означают полиномы Фабера (см. раздел 4). Для первых полиномов имеем

$$\begin{aligned} \partial_{t_0} z(\lambda) &= z_x(\lambda), & \partial_{t_1} z(\lambda) &= \left(\frac{z^2(\lambda)}{2} + H^0 \right)_x, \\ \partial_{t_2} z(\lambda) &= \left(\frac{z^3(\lambda)}{3} + H^0 z(\lambda) + H^1 \right)_x, \end{aligned}$$

где мы провели отождествления $x = t_0$, $s = -t_1$, $y = -t_2$, а также $u = H^0$, $v = H^1$ (см. уравнения (33)).

Подставляя аналогичное формальное разложение (при $\lambda \rightarrow \infty$)

$$z(\lambda) = \lambda - \frac{H^0}{\lambda} - \frac{H^1}{\lambda^2} - \frac{H^2}{\lambda^3} - \dots \quad (37)$$

в эти производящие функции законов сохранения, получим бесконечное число локальных законов сохранения. Например,

$$(H^k)_s + \left(H^{k+1} - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{k-1} H^m H^{k-1-m} \right)_x = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

Это есть не что иное, как гидродинамическая цепочка Бенни (2), представленная в консервативной форме, когда все плотности законов сохранения H^k полиномиальны по моментам A^m , как в разделе 2.

Альтернативные разложения (при $\zeta \rightarrow 0$)

$$z(\zeta) = H^{-1} + \zeta H^{-2} + \zeta^2 H^{-3} + \dots, \quad \partial_{\tau(\zeta)} = \partial_{t_{-1}} + \zeta \partial_{t_{-2}} + \zeta^2 \partial_{t_{-3}} + \dots \quad (39)$$

приводят к другим производящим функциям законов сохранения, например

$$\partial_{t_{-1}} z(\lambda) = \partial_x \ln(z(\lambda) - H^{-1}), \quad \partial_{t_{-2}} z(\lambda) = -\partial_x \frac{H^{-2}}{z(\lambda) - H^{-1}}.$$

Подстановка разложения (37) и разложения (при $\lambda \rightarrow 0$)

$$z(\lambda) = H^{-1} + \lambda H^{-2} + \lambda^2 H^{-3} + \dots$$

приводит к бесконечному числу дополнительных законов сохранения (ср. с (38)). Если, например, подставить приведенное выше разложение в (33), то получим два дополнительных закона сохранения

$$\begin{aligned} \partial_s H^{-1} &= -\left(\frac{1}{2} (H^{-1})^2 + H^0 \right)_x = -\partial_x \frac{\Phi_2(H^{-1})}{2}, \\ \partial_y H^{-1} &= -\left(\frac{1}{3} (H^{-1})^3 + H^0 H^{-1} + H^1 \right)_x = -\partial_x \frac{\Phi_3(H^{-1})}{3}. \end{aligned}$$

Бесконечно большое число законов сохранения (ср. с (38))

$$(H^{-1})_s + \left(H^0 + \frac{1}{2}(H^{-1})^2 \right)_x = 0,$$

$$(H^k)_s + \left(H^{k+1} - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{k-1} H^m H^{k-1-m} \right)_x = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

можно также представить в виде модифицированной гидродинамической цепочки Бенни (подробности см. в работах [24])

$$B_s^k + B_x^{k+1} + \frac{1}{2} B^0 B_x^k + \frac{k+1}{2} B^k B_x^0 + k B^{k-1} \left(\frac{1}{2} B^1 - \frac{1}{8} (B^0)^2 \right)_x = 0,$$

где

$$H^{-1} = B^0, \quad H^0 = B^1, \quad H^1 = B^2 + B^0 B^1 - \frac{1}{12} (B^0)^3, \dots$$

Такая модифицированная гидродинамическая цепочка Бенни связана с модифицированным уравнением бКП (ср. с (34))

$$H_s^{-1} + \left(H^0 + \frac{1}{2}(H^{-1})^2 \right)_x = 0, \quad H_s^0 = H_y^{-1} + \left(H^0 H^{-1} + \frac{1}{3}(H^{-1})^3 \right)_x,$$

которое можно получить из условия совместности $(\tilde{z}_s)_y = (\tilde{z}_y)_s$, где $\tilde{z}$ удовлетворяет уравнениям

$$\tilde{z}_s + \left(\frac{\tilde{z}^2}{2} + H^{-1} \tilde{z} \right)_x = 0, \quad \tilde{z}_y + \left(\frac{\tilde{z}^3}{3} + H^{-1} \tilde{z}^2 + (H^0 + (H^{-1})^2) \tilde{z} \right)_x = 0.$$

Можно вывести модифицированные уравнения Лёвнера

$$\partial_i \tilde{z} = \tilde{z} \frac{\partial_i H^{-1}}{\mu_i - \tilde{z} - H^{-1}},$$

которые эквивалентны исходным уравнениям Лёвнера (32) благодаря подстановкам $z = \tilde{z} + H^{-1}$ и $(\mu_i - H^{-1}) \partial_i H^{-1} = \partial_i H^0$.

Обе гидродинамические цепочки имеют одну и ту же локальную гамильтонову структуру

$$A_s^k = -\frac{1}{2} [(k+m) A^{k+m-1} \partial_x + m A_x^{k+m-1}] \frac{\partial H^2}{\partial A^m},$$

$$B_s^k = -\frac{1}{2} [(k+m) B^{k+m-1} \partial_x + m B_x^{k+m-1}] \frac{\partial H^1}{\partial B^m},$$

где плотности гамильтонианов суть

$$H^2 = A^2 + (A^0)^2, \quad H^1 = A^1 = B^2 + B^0 B^1 - \frac{1}{12} (B^0)^3.$$

Поскольку все моменты A^k можно выразить через моменты $B^0, B^1, \dots, B^k, B^{k+1}$, скобки Купершмидта–Манина

$$\{B^k, B^m\} = ((k+m) B^{k+m-1} \partial_x + m B_x^{k+m-1}) \delta(x-x')$$

можно пересчитать через моменты A^s . Это означает, что гидродинамическая цепочка Бенни имеет по крайней мере две локальные гамильтоновы структуры (подробности см. в работах [24]).

Как и в предыдущем частном случае, будем искать N -компонентные коммутирующие гидродинамические редукции

$$r_{\tau(\zeta)}^i = w^i(\mathbf{r}, \zeta) r_x^i.$$

Тогда уравнение (35) сводится к

$$\partial_i z(\lambda) = \frac{\partial_i z(\zeta)}{1 - (z(\lambda) - z(\zeta)) w^i(\mathbf{r}, \zeta)}.$$

Принимая во внимание уравнение (32), можно получить, что

$$w^i(\mathbf{r}, \zeta) = \frac{1}{\mu_i - z(\zeta)}.$$

Используя разложения (36) и (39), мы можем разложить производящую функцию (по параметру ζ в окрестности бесконечности и около нуля соответственно) бесконечного числа высших коммутирующих потоков

$$r_{\tau(\zeta)}^i = \frac{1}{\mu_i - z(\zeta)} r_x^i.$$

Благодарности. М. В. Павлов получил финансовую поддержку Программы Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” и РФФИ (грант № 14-01-00389). А. Ю. Васильев финансово поддержан Norwegian Research Council (гранты № 204726/V30, 213440/BG), а также EU FP7 IRSES Programm STREVCOMS (грант № PIRSES-GA-2013-612669). А. М. Захаров и Д. В. Прохоров получили финансовую поддержку Министерства науки и образования РФ (грант 1.1520.2014k).

Список литературы

- [1] Y. Kodama, J. Gibbons, *Phys. Lett. A*, **135**:3 (1989), 167–170.
- [2] D. J. Benney, *Stud. Appl. Math.*, **52**:1 (1973), 45–50.
- [3] Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов, *Акустический журн.*, **XV**:1 (1969), 40–47.
- [4] В. Е. Захаров, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:2 (1980), 15–24.
- [5] J. Gibbons, S. Tsarev, *Phys. Lett. A*, **258**:4–6 (1999), 263–271.
- [6] M. Mañas, L. Martínez Alonso, E. Medina, *J. Phys. A*, **35**:2 (2002), 401–417.
- [7] T. Takebe, L.-P. Teo, A. Zabrodin, *J. Phys. A*, **39**:37 (2006), 11479–11501.
- [8] B. Gustafsson, A. Vasil’ev, *Conformal and Potential Analysis in Hele–Shaw Cells*, Birkhäuser, Basel, 2006.
- [9] S. Richardson, *J. Fluid. Mech.*, **56**:4 (1972), 609–618.
- [10] M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, A. Zabrodin, *Phys. Rev. Lett.*, **84**:22 (2000), 5106–5109.
- [11] I. Markina, A. Vasil’ev, “Virasoro algebra and dynamics in the space of univalent functions” (Sevilla, Spain, February 5–9, 2008), *Contemporary Mathematics*, **525** (2010), 85–116.
- [12] M. V. Pavlov, *Int. Math. Res. Not.*, **2006**:20 (2006), 46987, 43 pp.

- [13] A. A. Vlasov, *Many-Particle Theory and Its Application to Plasma*, Gordon and Breach, New York, 1961.
- [14] M. V. Pavlov, S. P. Tsarev, *Classical mechanical systems with one-and-a-half degrees of freedom and Vlasov kinetic equation*, [arXiv:1306.3737](https://arxiv.org/abs/1306.3737); *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 2014 (to appear).
- [15] Б. А. Купершмидт, Ю. И. Манин, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:3 (1977), 31–42.
- [16] M. V. Pavlov, *Commun. Math. Phys.*, **272**:2 (2007), 469–505.
- [17] J. Gibbons, *Phys. Lett. A*, **90**:1–2 (1982), 7–8.
- [18] O. Tammi, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.*, **13**:1 (1988), 125–136.
- [19] М. В. Павлов, С. П. Царев, *УМН*, **46**:4(280) (1991), 169–170.
- [20] Б. А. Купершмидт, Ю. И. Манин, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:1 (1978), 25–37.
- [21] С. П. Царев, *Докл. АН СССР*, **282**:3 (1985), 534–537.
- [22] С. П. Царев, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:5 (1990), 1048–1068.
- [23] Е. В. Ферапонтов, частное сообщение.
- [24] B. A. Kupershmidt, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **83**:1 (1983), 45–74; “Normal and universal forms in integrable hydrodynamical systems”, *Proceedings of Berkeley–Ames Conference on Nonlinear Problems in Control and Fluid Dynamics* (Berkeley, CA, 1983), Lie Groups: History, Frontiers and Applications, Series B: Systems Information and Control, eds. L. R. Hunt, C. F. Martin, Math. Sci. Press, Brookline, MA, 1984, 357–378.

Поступила в редакцию 4.06.2014