Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ч. Жуковский, Е. А. Степанов, Генерация массы фермионов и индуцированный ток в низкоразмерных моделях с нетривиальной топологией, *ТМФ*, 2015, том 182, номер 2, 294–314

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8726>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:58:31

© 2015 г.

В. Ч. Жуковский*, Е. А. Степанов*

ГЕНЕРАЦИЯ МАССЫ ФЕРМИОНОВ И ИНДУЦИРОВАННЫЙ ТОК В НИЗКОРАЗМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

Изучен процесс динамического образования массы фермионов в трехмерной модели при взаимодействии двух типов фермионов, существующих в трехмерии и на двумерной бране, с учетом воздействия калибровочного поля A_3 . Исследована модель нанотрубки с размерностью $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Установлено, что в выражение для фермионной щели наряду с динамическим вкладом от конденсата m из-за четырехфермионного взаимодействия входит также кинематический вклад – фаза Ааронова–Бома, рассчитанная из условия минимума эффективного потенциала модели. Продемонстрирована возможность генерации индуцированного тока за счет эффекта вакуумной поляризации с учетом роли нетривиальной топологии задачи.

Ключевые слова: киральный конденсат, модель Калуцы–Клейна, проблема иерархии масс, низкоразмерные системы.

DOI: 10.4213/tmf8726

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из физических проблем, решение которой приходится искать за рамками Стандартной модели, является проблема иерархии масс. Стандартная модель включает в себя три поколения элементарных частиц. Соответствующие частицы из разных поколений взаимодействуют одинаково, но массы их отличаются на порядки. Одним из возможных решений данной проблемы является модель Калуцы–Клейна, в которой пространство-время может иметь более четырех измерений. Оригинальной идеей Калуцы и Клейна является то, что дополнительное пятое измерение компактифицировано для описания физических процессов в четырехмерном пространстве-времени нашего мира [1], [2]. В таком случае при изучении обычных физических явлений в пределе малого радиуса компактификации $R \rightarrow 0$ пространство-время выглядит как четырехмерное. Основным стимул для рассмотрения пространства как многомерного дают теории, которые включают в себя гравитацию, например

*Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: zhukovsk@phys.msu.ru

теория струн. Почти все эти теории формулируются в пространстве-времени с числом измерений больше четырех. Многие исследования в этой области указывают на то, что масштаб компактификации должен быть порядка планковского. На планковских масштабах $l \sim 10^{-33}$ см с соответствующей энергией $M_{Pl} \sim 10^{19}$ ГэВ обнаружение дополнительных измерений на данный момент невозможно, поскольку даже на самом современном ускорителе ЛНС (Большом адронном коллайдере) достигаются энергии порядка 8 ТэВ (в настоящее время он модернизируется с тем, чтобы достигать энергии порядка 13–14 ТэВ), что много меньше требуемых энергий.

Однако дальнейшее развитие теории показало, что с помощью модели Калупы–Клейна можно получить массы, много меньшие чем $m = 1/R$. Генерация массы может осуществляться и с помощью юкавской связи четырехмерных скаляров с компонентой калибровочного поля A_5 из высшего измерения. Поле A_5 в четырехмерии нарушает калибровочную и киральную симметрии и играет роль хиггсовского поля [3]. Такая генерация массы получила название механизма Хосотани [4].

В последние годы наряду с моделями с дополнительными измерениями развивается и другая область, вызывающая огромный интерес. Это теории с небольшим количеством пространственно-временных измерений (так называемые низкоразмерные модели; см., например, [5]–[8], а также [9]–[11] и указанную там литературу). Так в 1979 году в работе [12] при исследовании линейных полимеров выяснилось, что описание модели полимерной цепочки совпадает в основном с уже известными одномерными моделями квантованных полей. В случае двух пространственных размерностей теория поля давно признана важной для понимания некоторых физических явлений, которые могут быть приближенно рассмотрены как плоские. Особенный интерес к двумерным моделям возникает в физике конденсированного вещества, в рамках которой было открыто большое число важных новых явлений.

Примером такой двумерной модели является графен – плоский одноатомный слой углерода, который обладает целым рядом необычных характеристик [13]–[15]. В ряде недавних исследований [16]–[18] были открыты аномальный эффект Холла, необычные свойства проводимости и ряд других интересных характеристик этого материала. Особенностью эффекта Холла в графене является то, что его можно наблюдать даже при комнатной температуре [19] (при значениях магнитного поля больше 20 Т).

В описании графена поведение электронов эффективно подчиняется уравнению Дирака [20]–[23], и в таком случае удобно рассматривать эту задачу в рамках хорошо известных методов квантовой механики и квантовой теории поля для фермионов в пространстве размерности $2 + 1$. В частности, таким образом была предложена псевдопотенциальная модель для описания прохождения дираковских электронов через линейные дефекты в графене [24]. Следует отметить, что эффективные теоретико-полевые модели Гросса–Невё [25] и Намбу–Йона-Лазинио [26]–[29] также хорошо подходят для решения задач подобного рода. В таких плоских системах модель Гросса–Невё обычно используется для исследования свойств симметрии, нарушения киральной симметрии [30], а также для задач генерации массы фермионов [31].

Другим примером модели с малым числом пространственных измерений является полиацетилен. Интерес к этой модели вызван рядом причин. С экспериментальной точки зрения появляется возможность создания нанополупроводниковых устройств

из этого материала, а с теоретической точки зрения эту модель можно представить как одномерную модель графена. В работе [32] была рассмотрена модель полиацетилена в рамках модели Гросса–Невё с размерностью $1+1$ и были продемонстрированы нарушение киральной симметрии и генерация фермионной массы.

Низкоразмерные модели с электромагнитными полями и нетривиальной топологией, подобные двумерной модели графена и фуллерена, рассматривались в недавних работах [33]–[35]. Подобная проблема также обсуждалась в работе [36] при исследовании модели углеродной нанотрубки (см. также [37]–[39]). В модели [36] исследовалась генерация массы фермионов под влиянием внешнего магнитного поля Ааронова–Бома [40]. При этом под действием внешнего магнитного поля может происходить поляризация вакуума (см., например, [41], [42]), что приводит к появлению индуцированного тока. Так, в работе [42] была рассмотрена поляризация вакуума в графене в поле тонкого соленоида с возникновением индуцированного тока. В настоящее время моделям с низким числом пространственных измерений продолжает уделяться много внимания. В работе [43] была предложена модель, в которой присутствуют два типа фермионов, одни существуют в пятимерном пространстве-времени и взаимодействуют с другими фермионами, существующими на четырехмерной бране. Подобное поведение можно описать с помощью четырехфермионного взаимодействия, эффективно возникающего при обмене гравитонами, что ведет к генерации динамической массы. В работе [44] модель из работы [43] была рассмотрена в пятимерии, где высшая размерность была компактифицирована по окружности с радиусом компактификации R и, кроме того, были добавлены периодические и антипериодические граничные условия для фермионов. Модель была расширена введением постоянного калибровочного поля A_5 , находящегося в пятимерном пространстве, для исследования нарушения киральной симметрии при четырехфермионном взаимодействии и получения динамической массы для легких фермионов.

В настоящей работе исследуются низкоразмерные модели в размерности $2+1$ с компактификацией “дополнительного” измерения. В таком случае получается, например, плоская модель с браной размерностью $1+1$ (с пространственной размерностью 1), т. е. с нитью. В рамках модели Гросса–Невё с двумя типами фермионов исследуется влияние параметров модели, таких как калибровочное поле A_3 , параметр фазового смещения фермионов α и радиус компактификации R , на генерацию массы фермионов. Рассматривается также модель нанотрубки, в рамках которой исследуются влияние эффекта Ааронова–Бома на генерацию фермионной массы и возникновение индуцированного тока за счет поляризации вакуума в присутствии реального магнитного поля.

2. ГЕНЕРАЦИЯ ФЕРМИОННОЙ МАССЫ ПОД ВЛИЯНИЕМ КАЛИБРОВОЧНОГО ПОЛЯ В МОДЕЛИ С $2+1$ ИЗМЕРЕНИЯМИ

2.1. Модель. Рассмотрим трехмерную фермионную модель, содержащую два типа фермионных полей Ψ и L , и калибровочное поле A_M в трехмерном пространстве-времени [45]. Ψ -фермионы существуют в трехмерном пространстве, а L -фермионы – на двумерной бране. Лагранжиан модели аналогичен лагранжиану для

пятимерной модели [43]:

$$\mathcal{L}^{(3)} = \bar{\Psi} i \gamma^M D_M \Psi + [\bar{L} i \gamma^\mu D_\mu L + g^2 (\bar{\Psi} \gamma^M L) (\bar{L} \gamma_M \Psi)] \delta(x^3), \quad (1)$$

где $M = 1, 2, 3$, $\mu = 1, 2$, $D_M = \partial_M - ieA_M$. Здесь используются метрика $(+, -, -)$ и γ -матрицы, заданные следующим образом:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Представим калибровочное поле как конденсат со средним значением компонент $\langle A_3 \rangle = \text{const} \neq 0$ и $\langle A_1 \rangle = \langle A_2 \rangle = 0$. Тогда лагранжиан примет вид

$$\mathcal{L}^{(3)} = \bar{\Psi} \gamma^3 e A_3 \Psi + \bar{\Psi} i \gamma^M \partial_M \Psi + [\bar{L} i \gamma^\mu \partial_\mu L + g^2 (\bar{\Psi} \gamma^M L) (\bar{L} \gamma_M \Psi)] \delta(x^3). \quad (3)$$

Проведем преобразование Хаббарда–Стратоновича, введя вспомогательное поле σ_M . Далее используем приближение среднего поля, заменяя реальное поле его средним значением, тогда $\langle \sigma_\mu \rangle = 0$, $\langle \sigma_3 \rangle = \sigma_3 = -\sigma$. Совершив киральный поворот [46] $\Psi \rightarrow e^{\pi \gamma_3 / 4} \Psi$, $L \rightarrow e^{\pi \gamma_3 / 4} L$, получим

$$\mathcal{L}^{(3)} = \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi - \bar{\Psi} e A_3 \Psi - i \bar{\Psi} \partial_3 \Psi + [\bar{L} i \not{\partial} L - |\sigma|^2 + (g \sigma \bar{\Psi} L + \text{э.с.})] \delta(x^3). \quad (4)$$

Компактифицируем третью размерность по окружности радиуса R и зададим дополнительный параметр – фазовое смещение фермионов α :

$$\Psi = N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Psi_n(x_\mu) e^{i x_3 (n + \alpha) / R}, \quad (5)$$

тогда двумерный лагранжиан примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} = \int_0^{2\pi R} dx^3 \mathcal{L}^{(3)} = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}_n i \not{\partial} \Psi_n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{n + \alpha}{R} - e A_3 \right) \bar{\Psi}_n \Psi_n + \\ & + \bar{L} i \not{\partial} L - |\sigma|^2 + \left(m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}_n L + \text{э.с.} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $m = Ng\sigma$, $N = 1/\sqrt{2\pi R}$ – нормировочная константа.

2.2. Спектр масс. Перейдем к матричному представлению для фермионных полей

$$(\Psi)^T = (L, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_{-1}, \Psi_2, \Psi_{-2}, \dots). \quad (7)$$

Тогда массовая матрица запишется в виде ($eA_3 \equiv a$)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m^* & m^* & m^* & m^* & \dots \\ m & \frac{\alpha}{R} - a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ m & 0 & \frac{\alpha+1}{R} - a & 0 & 0 & \ddots \\ m & 0 & 0 & \frac{\alpha-1}{R} - a & 0 & \ddots \\ m & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha+2}{R} - a & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В результате получим уравнение на собственные значения:

$$\det(M - \lambda I) = \left\{ \prod_{j=1}^{\infty} \left[\left(\lambda + a - \frac{\alpha}{R} \right)^2 - \left(\frac{j}{R} \right)^2 \right] \right\} \times \\ \times \left[\lambda \left(\lambda + a - \frac{\alpha}{R} \right) - |m|^2 - 2 \left(\lambda + a - \frac{\alpha}{R} \right)^2 |m|^2 \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda + a - \alpha/R)^2 - (l/R)^2} \right] = 0. \quad (9)$$

К нетривиальным решениям приводит равенство нулю только второй скобки, что дает

$$\lambda R = m^2 R^2 \pi \operatorname{ctg} \left(\pi R \left(\lambda + a - \frac{\alpha}{R} \right) \right). \quad (10)$$

В случае, когда аргумент котангенса является малым параметром, из предыдущей формулы имеем

$$\pi \lambda R = (\pi |m| R)^2 \frac{1}{\pi R (\lambda + a - \alpha/R)}, \quad (11)$$

откуда получаем

$$\lambda = \frac{\alpha - aR \pm \sqrt{(aR - \alpha)^2 + 4|m|^2 R^2}}{2R}. \quad (12)$$

Из уравнения (12) видно, что генерируемая масса зависит от радиуса компактификации, параметра фазового смещения α и калибровочного поля a . Таким образом, мы можем получать различные значения массы, варьируя эти параметры. Заметим, что при условиях $a = 0$ и $\alpha = 0$ получаем $\lambda = \pm |m|$. Условие малости аргумента котангенса в таком случае переписывается в виде $\lambda \ll 1/R$, откуда следует, что и $|m| \ll 1/R$. Таким образом, мы получили массу для легких фермионов $\lambda = \pm |m|$, много меньшую массы мод Калуцы–Клейна для фермионов в трехмерии. Следовательно, данный результат может рассматриваться как указание на одну из возможностей обоснования проблемы иерархии масс (см. [45]).

2.3. Эффективный потенциал модели. Запишем эффективный лагранжиан модели в матричном виде:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)} = \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi + \bar{\Psi} M \Psi - |\sigma|^2. \quad (13)$$

Производящий функционал нашей системы дается формулой

$$Z = \int [\mathcal{D}\bar{\Psi}][\mathcal{D}\Psi][\mathcal{D}\sigma][\mathcal{D}\sigma^*] \exp \left[i \int d^2 x \mathcal{L}^{(2)} \right]. \quad (14)$$

Интегрируя по фермионным полям, получаем

$$Z = \int [\mathcal{D}\sigma][\mathcal{D}\sigma^*] \exp \left[-i \int d^2 x V_{\text{eff}}(\sigma) \right], \quad (15)$$

где эффективный потенциал определяется стандартным образом:

$$V_{\text{eff}} = |\sigma|^2 - \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \ln \det(M + I \not{k}). \quad (16)$$

Рис. 1. Зависимость эффективного потенциала от $m\Lambda^{-1}$ при нулевом значении параметра фазового смещения α и при $R\Lambda = 0.1$.

Отсюда с помощью формулы (9) найдем

$$V_{\text{eff}}(\sigma, a) = |\sigma|^2 - \frac{1}{4\pi} \int_0^\Lambda dx x \ln \left\{ x^2 [\text{ch}(2\pi Rx) - \cos(2\pi Ra)] + \right. \\ \left. + 2\pi Rx |m|^2 \text{sh}(2\pi Rx) + (\pi R |m|^2)^2 [\text{ch}(2\pi Rx) + \cos(2\pi Ra)] \right\}, \quad (17)$$

где мы ввели параметр обрезания Λ , поскольку интеграл расходится на верхнем пределе. В предыдущей формуле для сокращения выражений мы положили $\alpha = 0$, так как включение конечного значения фазы α , входящей аддитивно с aR , может быть легко учтено в конечном результате. Интеграл (17) в критической точке $m = 0$ ($\sigma = 0$) можно преобразовать к следующему виду:

$$V_{\text{eff}}(\sigma, a)|_{\sigma=0} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\Lambda dx x \ln [\text{ch}(2\pi Rx) - \cos(2\pi Ra)]. \quad (18)$$

График поведения эффективного потенциала при $\alpha = 0$ изображен на рис. 1. Как видно, эффективный потенциал имеет экстремум ($mR \simeq 0.1$) при значениях поля $aR = 0$ и экстремум в нуле при $aR = 1/2$.

2.4. Критическая константа связи. Запишем уравнение щели, $\partial V_{\text{eff}}/\partial \sigma = 0$:

$$1 - \int_0^\Lambda \frac{dk k}{4\pi} \frac{(k \text{sh}(\pi k R) + (g^2 \sigma^2/2) \text{ch}(\pi k R)) g^2 \text{ch}(\pi k R) - (g^4 \sigma^2/2) \sin^2(\pi A)}{(k \text{sh}(\pi k R) + (g^2 \sigma^2/2) \text{ch}(\pi k R))^2 + (k^2 - g^4 \sigma^4/4) \sin^2(\pi A)} = 0, \quad (19)$$

Рис. 2. Зависимость $g_c^2 \Lambda$ от $R\Lambda$ при $\alpha = 0$, $\xi = 0.1$ и при различных параметрах поля a (а); та же зависимость при $\alpha\Lambda^{-1} = 1$, $\alpha = 0$ и при различных параметрах нижнего обрезания интеграла ξ (б).

где $A = \alpha - aR$. Вычислим критическую константу связи, которая определяется из условия $|\sigma| = 0$:

$$1 - \int_{\xi}^{\Lambda} \frac{dk}{4\pi} \frac{g_c^2 \operatorname{sh}(\pi k R) \operatorname{ch}(\pi k R)}{\operatorname{sh}^2(\pi k R) + \sin^2(\pi A)} = 0, \quad (20)$$

где обрезание ξ введено, поскольку интеграл расходится на нижнем пределе при $A \rightarrow 0$. Вычисляя получившийся интеграл, получаем

$$g_c^2 \Lambda = 8\pi^2 R \Lambda \left\{ \ln \left[\frac{\operatorname{ch}(2\pi R \Lambda) - \cos(2\pi R a - 2\pi \alpha)}{\operatorname{ch}(2\pi R \xi) - \cos(2\pi R a - 2\pi \alpha)} \right] \right\}^{-1}. \quad (21)$$

При $R\Lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$g_c^2 \rightarrow \frac{4\pi}{\Lambda}, \quad (22)$$

что соответствует поведению критической константы в трехмерном пространстве [47].

Переходя для удобства к безразмерным переменным $R\Lambda \rightarrow R$, $g^2 \Lambda \rightarrow g^2$, $\xi/\Lambda \rightarrow \xi$, получим

$$g_c^2 = 8\pi^2 R \left\{ \ln \left[\frac{\operatorname{ch}(2\pi R) - \cos(2\pi R a/\Lambda - 2\pi \alpha)}{\operatorname{ch}(2\pi R \xi) - \cos(2\pi R a/\Lambda - 2\pi \alpha)} \right] \right\}^{-1}. \quad (23)$$

На рис. 2б и рис. 3а изображены зависимости критической константы связи при различных значениях параметра обрезания ξ . На рис. 2а при значении $a\Lambda^{-1} = 1$ критическая константа связи ведет себя как затухающая осциллирующая функция, стремящаяся асимптотически к критической константе связи при $a\Lambda^{-1} = 0$. На рис. 2б при достаточно малом значении параметра обрезания $\xi = 0.001$ график критической константы связи получается негладким и на нем имеются особенности –

Рис. 3. Поведение $g_c^2 \Lambda$ при $a\Lambda^{-1} = 0$, $\alpha = 0$ и при различных параметрах обрезания ξ (а); та же зависимость при значении параметра обрезания $\xi = 0$, $a\Lambda^{-1} = 0$ и при различных граничных условиях: периодических ($\alpha = 1$) и антипериодических ($\alpha = 0.5$) (б).

острия. При более реалистическом значении этого параметра $\xi = 0.1$ график оказывается похожим на поведение константы в пятимерии [44]. На рис. 3б параметр обрезания выбран стремящимся к нулю ($\xi \rightarrow 0$), его роль здесь выполняет параметр фазового смещения α .

2.5. Динамическое поле a . Теперь рассмотрим случай, когда a – динамическая переменная (см. [45]). Тогда экстремум эффективного потенциала дается уравнением щели $\partial V_{\text{eff}}/\partial a = 0$ для поля a :

$$\int_0^\Lambda \frac{dk k \sin(2\pi(\alpha - aR)) \pi R (k^2 - m^4 \pi^2 R^2)}{4\pi (k \operatorname{sh}(\pi k R) + m^2 \pi R \operatorname{ch}(\pi k R))^2 + (k^2 - m^4 \pi^2 R^2) \sin^2(\pi(\alpha - aR))} = 0, \quad (24)$$

откуда находим, что экстремум имеет место при $\sin(2\pi(\alpha - aR)) = 0$ или

$$\alpha - aR = \frac{n}{2}, \quad (25)$$

где n – целые числа. Тогда $a = (2\alpha - n)/2R$, что эквивалентно решению $a = \alpha/R$ при четных $n = 2k$ и $a = (2\alpha - 1)/2R$ при нечетных $n = 2k + 1$. В частности, при периодических граничных условиях ($\alpha = 0$) $a = 0$ и $a = -1/2R$, при антипериодических ($\alpha = 1/2$) $a = 0$ и $a = 1/2R$.

При четных значениях n , $\cos(2\pi Ra - 2\pi\alpha) = 1$, критическая константа связи имеет вид

$$g_c^2 = 8\pi^2 R \left\{ \ln \left[\frac{\operatorname{ch}(2\pi R) - 1}{\operatorname{ch}(2\pi R\xi) - 1} \right] \right\}^{-1}. \quad (26)$$

При нечетных значениях n , $\cos(2\pi Ra - 2\pi\alpha) = -1$, критическая константа связи имеет вид

$$g_c^2 = 8\pi^2 R \left\{ \ln \left[\frac{\text{ch}(2\pi R) + 1}{\text{ch}(2\pi R\xi) + 1} \right] \right\}^{-1}. \quad (27)$$

Оценим генерируемую массу при критических значениях поля a .

Для четных значений n имеем $a - \alpha/R = 0$. В этом случае получим

$$\lambda R = \pi |mR|^2 \text{ctg}(\pi R\lambda). \quad (28)$$

Нас интересуют легкие фермионы с массами $\lambda \ll 1/R$, в этом случае $\lambda = |m|$.

Для нечетных значений n имеем $a - \alpha/R = -1/2R$. В этом случае получим

$$\lambda R = \pi |mR|^2 \text{ctg} \left(\pi R\lambda - \frac{\pi}{2} \right). \quad (29)$$

Для $\pi(R\lambda - 1/2) \ll 1$ получим

$$\lambda R = \frac{|mR|^2}{\lambda R - 1/2}, \quad (30)$$

или

$$\lambda R = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + |mR|^2} \approx \frac{1}{2} + O(|mR|^2). \quad (31)$$

Таким образом, $\lambda \approx 1/2R = a$. Тем самым мы получаем массу, меньшую, чем для мод Калуцы–Клейна $\lambda_n = n/R$.

2.6. Асимптотическое поведение константы связи. Рассмотрим поведение константы связи при предельных значениях радиуса компактификации R (см. [48]). Вернемся к уравнению щели (19), положив $A = 0$ и выразив все величины через m ($\sigma = (m/g)\sqrt{2\pi R}$):

$$1 - \int_0^\Lambda \frac{k dk}{4\pi} \frac{g^2 \text{ch}(\pi k R)}{k \text{sh}(\pi k R) + m^2 \pi R \text{ch}(\pi k R)} = 0. \quad (32)$$

Если R мало, т. е. $mR \ll 1$, и в то же время $\Lambda R \gg 1$ (т. е. считаем, что $g^2/\pi R = \text{const} = g_2$ – константа связи в двумерии), k дает основной вклад при $k \sim m$. Этот случай соответствует компактификации $3D \rightarrow 2D$. Следовательно, $\text{ch}(\pi k R) \approx 1 + (\pi k R)^2/2$ и $\text{sh}(\pi k R) \approx \pi k R$, тогда получаем

$$1 - \int_0^\Lambda \frac{k dk}{4\pi} \frac{g^2(1 + (\pi k R)^2/2)}{k^2 \pi R + \pi R m^2(1 + (\pi k R)^2/2)} = 0, \quad (33)$$

откуда имеем

$$g^2 = 8\pi(\pi R + m^2 \pi^3 R^3) \left\{ \ln \left[\frac{\Lambda^2 + \Lambda^2 m^2 \pi^2 R^2}{2m^2} + 1 \right] \right\}^{-1}. \quad (34)$$

Рис. 4. Поведение $g_c^2 \Lambda$ при значениях $\alpha - aR = n/2$, при которых эффективный потенциал V_{eff} имеет экстремум (а). Поведение $g^2 \Lambda$ при различных значениях m/Λ (б).

Поскольку $mR \ll 1$, получим

$$\frac{g^2}{4\pi R} = g^2 = \frac{2\pi}{\ln(\Lambda^2/m^2)}, \quad (35)$$

или

$$m = \Lambda e^{-\pi/g^2}, \quad (36)$$

что согласуется с результатом [47]

$$m = \frac{2}{\beta} e^{-\pi/g} \quad (37)$$

для двумеризованной модели с точностью до очевидной замены обозначений. Сравнивая эффективный потенциал задачи [47]

$$V_{\text{eff}} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 k \ln(k^2 + \phi^2) + \frac{1}{2g} \phi^2 \quad (38)$$

с нашим результатом, очевидно, находим, что коэффициент $2/\beta$ выбран как параметр обрезания интеграла (что соответствует Λ в нашей модели), g в модели [47] соответствует $g^2/4\pi R$ нашей модели, а ϕ соответствует $m/2$ нашей модели. График зависимости $g^2 \Lambda$ от $R\Lambda$ при различных значениях параметра m/Λ показан на рис. 4б. В пределе больших $R\Lambda$ верхняя кривая стремится к бесконечности, а нижняя стремится к 4π . Из графика видно, что при малом радиусе компактификации ($R < 1$) значение констант связи при разных m различно, тогда как при $R \rightarrow \infty$ критическая константа связи стремится к своему асимптотическому значению (22). Если рассмотреть константу связи, лежащую немного выше критической ($m = 0.1\Lambda$), то при малых значениях R мы можем получить различные малые значения констант

связи и, следовательно, различные малые массы. Таким образом, в рамках данной модели существует возможность объяснить иерархию масс разных поколений частиц.

Зависимость константы связи от малого радиуса компактификации также дается формулой (35).

При $R \rightarrow \infty$, $\text{sh}(\pi k R) \rightarrow e^{\pi k R/2}$ и $\text{ch}(\pi k R) \rightarrow e^{\pi k R/2}$, т.е. это величины одного порядка, тогда можно воспользоваться логарифмическим приближением. Действительно, сделаем замену $\pi k R \rightarrow x$:

$$\int_{m^2 \pi^2 R^2}^{\pi \Lambda R} \frac{d \text{sh } x}{x \text{sh } x + m^2 \pi^2 R^2 \text{ch } x} = \frac{4\pi^2 R}{g^2}. \quad (39)$$

Основной вклад в знаменатель при $R \rightarrow \infty$ дает слагаемое $x \text{sh } x$, поскольку в случае больших R имеем $x \gg 1$, $g = \text{const}$ и $m^2 R = \text{const} = M_3$. Таким образом, $x \gg m^2 \pi^2 R^2$, и основной вклад в интеграл дается в пределах от $m^2 \pi^2 R^2$ до $\pi \Lambda R$. Используя данную асимптотику, получим

$$g^2 = \frac{4\pi}{\Lambda - m^2 R \pi}, \quad (40)$$

или

$$m^2 R = M_3 = \frac{\Lambda}{\pi} - \frac{4}{g^2} = 4 \left(\frac{1}{g_c^2} - \frac{1}{g^2} \right), \quad (41)$$

что также согласуется с результатом [47] для трехмерного предела.

2.7. Связь параметра обрезания ξ с конденсатом m . В полученном результате для критической константы связи положим $\alpha = 0$, тогда получим

$$g_c^2 = 8\pi^2 R \left\{ \ln \left[\frac{\text{ch}(2\pi R) - \cos(2\pi R a / \Lambda)}{\text{ch}(2\pi R \xi / \Lambda) - \cos(2\pi R a / \Lambda)} \right] \right\}^{-1}. \quad (42)$$

При $R \rightarrow 0$ имеем

$$g_c^2 = 8\pi^2 R \left\{ \ln \left[\frac{\Lambda^2 + \xi^2}{\xi^2 + a^2} + 1 \right] \right\}^{-1}. \quad (43)$$

Устремляя $\xi \rightarrow 0$ (рассматриваем инфракрасный предел) и проводя сравнение с выражением для асимптотики константы связи, получим $a^2 \sim 2m^2$, откуда видно, что поле a в выражении для критической константы связи играет роль конденсата m в выражении для обычной константы связи. Если же положить $a \rightarrow 0$, то получим $\xi^2 \sim 2m^2$, откуда следует, что роль параметра обрезания в обычной константе связи играет конденсат m (см. [48]).

При $R \rightarrow \infty$ получаем

$$g_c^2 = \frac{4\pi}{\Lambda - \xi}. \quad (44)$$

Поскольку ξ – малый параметр инфракрасного обрезания, то он мал по сравнению с Λ , тогда в пределе $R \rightarrow \infty$

$$g_c^2 = \frac{4\pi}{\Lambda}, \quad (45)$$

что согласуется с результатом (22).

3. ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОТОКА НА ПОВЕДЕНИЕ ФЕРМИОНОВ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

Исследуем теперь модель, аналогичную той, которая рассматривалась в предыдущем разделе, в рамках рассмотрения моделей с малым числом измерений, включающих в себя реальное поле, аналогично двумерным моделям графена с нетривиальной топологией [33], [34] и фулеренов [35]. В этих моделях рассматривается влияние реального магнитного поля на поведение фермионов. Существование такого магнитного поля ведет к редукции числа измерений на две единицы $D + 1 \rightarrow (D - 2) + 1$, следовательно, все эти модели имеют малое число измерений. Реальное магнитное поле в данной задаче создает теперь только магнитный поток, что соответствует задаче Ааронова–Бома [40].

В 1959 году Аароновым и Бомом был предсказан эффект, согласно которому электромагнитное поле в той области, где напряженность электрического поля и индукция магнитного поля равны нулю, может влиять на поведение заряженной частицы на квантовом уровне. Действительно, если в таком случае электромагнитный потенциал не равен нулю, то именно он и оказывает влияние на заряженные частицы. Эффект Ааронова–Бома был проверен экспериментально сначала в 1960 году [49], а потом в 1986 году [50] в опытах со сверхпроводящими материалами. В дальнейшем задачи типа Ааронова–Бома стали широко исследоваться и данное направление получило большое развитие.

Из недавних работ стоит отметить, например, работы [36], [51]. В работе [36] рассматривается модель в размерности $\mathbb{R}^2 \times S^1$, т. е. углеродная нанотрубка. В рамках этой модели исследуется генерация фермионной массы с помощью потенциала поля из компактифицированного измерения (механизм Хосотани [4]), рассчитывается эффективный потенциал модели и с помощью уравнения щели находится выражение для фермионной щели как экстремум эффективного потенциала. Эта щель будет убывать с магнитным полем, и динамическое нарушение симметрии происходит не так, как в большинстве известных случаев. Поскольку в данной задаче магнитное поле направлено параллельно оси цилиндра и не влияет на движущиеся заряженные частицы, а создает лишь магнитный поток, авторы искусственно добавляют к динамическому вкладу в щель кинематический член $2\pi\phi_{||}$ – фазу Ааронова–Бома, где $\phi_{||} = eA_y L/2\pi$, и эта полная щель тогда уже будет возрастать с магнитным полем. Эта добавленная фаза была вычислена в работе [51], где была рассмотрена модель размерности $\mathbb{R}^3 \times S^1$ без внешнего магнитного поля. При этих условиях фаза Ааронова–Бома получается из условия наличия ненулевого электромагнитного векторного потенциала, который нельзя свести к нулю выбором калибровки из-за условия периодичности. В этой задаче фаза Ааронова–Бома не является внешним параметром, как в работе [36], а определяется из условия минимума энергии. Авторы выбирают внешнее поле третьей компоненты как $\bar{A}_\nu = \Delta\delta_{\nu 3}$, которое подчиняется калибровочному преобразованию $A_\mu \rightarrow A_\mu - (1/e)\partial_\mu\alpha$, где α удовлетворяет следующим граничным условиям: $\alpha(x_3 + a) = \alpha(x_3) + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, a – длина дополнительной размерности ($2\pi R$). После этого из условия минимума эффективного потенциала можно получить $\bar{A}_3 = \pi/ea$ ($l = 1$).

В начале настоящего раздела, как и в работах [36], [51], исследуется влияние магнитного потока на генерацию фермионной массы в модели нанотрубки размерности $\mathbb{R}^2 \times S^1$ с двумя типами фермионов.

Недавно в работе [42] была рассмотрена поляризация вакуума в поле тонкого соленоида и исследовано возникновение индуцированного тока. В качестве применения полученного результата авторы рассмотрели графен в поле соленоида, перпендикулярного плоскости образца.

Ниже в настоящем разделе мы показываем, что ненулевой потенциал A_3 третьей компоненты поля кроме влияния на генерацию фермионной массы сказывается и на появлении индуцированного тока. Мы продемонстрируем, что индуцированный ток возникает благодаря поляризации вакуума в калибровочном поле, заданном третьей компонентой потенциала A_3 в $(2+1)$ -мерной модели [45] с двумя типами фермионов, существующими на бране и во всем объеме образца.

3.1. Вклад фазы Ааронова–Бома в фермионную щель. Рассмотрим модель с лагранжианом, аналогичным лагранжиану раздела 2, но с другой точки зрения. После компактификации третьей координаты будем рассматривать получившуюся модель как нанотрубку с магнитным полем, направленным вдоль оси нанотрубки (см. [45]). Такое магнитное поле не будет влиять на поведение электронов, но ненулевой потенциал A_3 , направленный вдоль окружности радиуса R (т. е. вдоль компактифицированной третьей координаты), будет вносить свой вклад в генерацию фермионной массы. Постановка нашей задачи отличается от случаев, рассмотренных в работах [36], [51], наличием четырехфермионного взаимодействия в пространстве размерности $\mathbb{R}^2 \times S^1$ и фазового параметра α , соответствующего периодическому (антипериодическому) граничному условию. Граничные условия по третьей координате имеют следующий вид:

$$\Psi(x_\mu, x_3 + 2\pi R) = \Psi(x_\mu, x_3), \quad (46)$$

а компактификация дополнительного измерения задается условием

$$\Psi(x_\mu, x_3) = N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n(x_\mu) e^{ix_3(n+\alpha)/R}. \quad (47)$$

Лагранжиан нашей модели инвариантен относительно калибровочных преобразований $A_\mu \rightarrow A_\mu + (1/e)\partial_\mu\beta$ и $\Psi \rightarrow e^{i\beta}\Psi$, где $\beta = x_3 n/R$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку наш параметр поля a с точностью до e аналогичен Δ из работы [51], то, находя экстремум эффективного потенциала по параметру a ($\partial V/\partial a = 0$), получим условие $\alpha - n = aR$, или $n/2R = \alpha/2R - a/2$. Преобразуем выражение для потенциала поля A_3 работы [51]

$$A_3 = \frac{\pi}{ea} = \frac{1}{2eR}, \quad (48)$$

поскольку в работе [51] $a = 2\pi R$ – длина третьего измерения.

Обратимся к работе [36], преобразуем фазу Ааронова–Бома:

$$\frac{2\pi\phi_{||}}{L} = \frac{2\pi}{L} \frac{aA_y L}{2\pi} = eA_y. \quad (49)$$

Следовательно, в работе [51] фаза Ааронова–Бома равна

$$eA_3 = e\Delta = \frac{1}{2R}. \quad (50)$$

Поскольку в нашей работе присутствует параметр фазового смещения α , выражение для фазы будет несколько другим. Подставляя $n = 1$ в условие минимума эффективного потенциала, получим

$$\frac{1}{2R} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{R} - a \right) = \varphi,$$

где φ – искомая фаза Ааронова–Бома. Отсюда следует, что кинематический вклад для фермионов в виде фазы Ааронова–Бома уже включен в выражение для фермионной щели, получаемой как собственное значение массовой матрицы (см. [45])

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{R} - a \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{R} - a \right) \right)^2 + |m|^2} = \varphi \pm \sqrt{\varphi^2 + |m|^2}. \quad (51)$$

В работе [51] также было показано, что состояние с наименьшей энергией соответствует фермионам с антипериодическими граничными условиями $A_3 \equiv \Delta_{\min} = \pi/ea = 1/2eR$ ($a = 2\pi R$), что соответствует полученному результату в нашей задаче: $a_{\min} = 1/2R$ ($a = eA_3$) при антипериодических граничных условиях ($\alpha = 1/2$), откуда получаем $A_3 = 1/2eR$.

Отметим, что в рамках модели [36] также была рассчитана критическая константа связи, преобразуя которую, можно получить выражение, схожее с критической константой нашей задачи,

$$G = \pi L \left\{ \ln \left[\frac{\text{ch}(LA) - \cos(2\pi\phi_{||})}{1 - \cos(2\pi\phi_{||})} \right] \right\}^{-1}, \quad (52)$$

аналогично работе [36] с той лишь разницей, что в нашей модели присутствует фазовый параметр α .

Аналогично работе [36] рассмотрим зависимость фермионной щели λR от фазы Ааронова–Бома $(\alpha - aR)/2 = \varphi R$ и убедимся в схожем поведении графиков. Поскольку уравнение для щели включает дополнительный параметр m , мы должны его зафиксировать. Уравнение щели $\partial V/\partial \sigma$ в нашем случае не решается аналитически, оценку для m получим из графика зависимости $V_{\text{eff}}\Lambda^{-2}$ от $m\Lambda^{-1}$ при малых значениях поля A_3 , поскольку при больших значениях поля фермионная щель будет иметь линейную зависимость от фазы Ааронова–Бома и mR можно будет исключить как малый параметр. Из рис. 5 видно, что минимум эффективного потенциала достигается при $mR \simeq 0.1$, масса мало меняется, и, следовательно, ее можно зафиксировать. Отметим, что при нахождении λ мы выбрали приближение $mR \ll 1$, и можно точно сказать, что это было обоснованно. Теперь построим зависимость λR от φR (см. рис. 6) и убедимся, что поведение щели в зависимости от фазы Ааронова–Бома получается схожим с полученным в работе [36]. Отличие нашей задачи заключается в наличии четырехфермионного взаимодействия, поэтому на рис. 6 присутствует вторая ветвь, где видно, что наряду с фермионной щелью, возрастающей с фазой Ааронова–Бома, генерируется также малая масса, много меньшая масс мод Калуцы–Клейна, что обсуждалось в разделе 2 настоящей работы.

Рис. 5. Зависимость эффективного потенциала V_{eff} от m при различных значениях радиуса компактификации и $a = 0$, $\alpha = 0$ (а) и при $\alpha = 0$, $R\Lambda = 0.1$ и при различных малых значениях параметра поля a (б). Минимум эффективного потенциала достигается при $mR \simeq 0.1$.

Рис. 6. Зависимость фермионного конденсата λR от фазы Ааронова–Бома $\varphi R = (\alpha - aR)/2$.

3.2. Индуцированный ток. Рассмотрим эффект вакуумной поляризации, приводящий к возможности образования индуцированного тока в модели нанотрубки с лагранжианом, аналогичным лагранжиану из раздела 1 работы [52]. Данная

Рис. 7. Зависимость индуцированного тока от a в критической точке $m = 0$ при разных значениях радиуса компактификации R . Индуцированный ток обращается в нуль при $aR = n/2$.

задача схожа с задачей, решаемой в работе [42], где рассматривалась вакуумная поляризация в модели графена в поле тонкого соленоида. Заметим, что именно нетривиальная топология, обусловленная вакуумными эффектами, проявляется в возникновении вакуумного тока. Индуцированный ток $J = \partial V_{\text{eff}} / \partial A_3$ направлен вдоль третьей координаты, и его можно найти с помощью формулы (17):

$$J_{\text{ind}} = \frac{1}{2} e R \sin(2\pi\nu) \int_0^\infty dx x (m^4 \pi^2 R^2 - x^2) \times \\ \times \{ [\text{ch}(2\pi R x) - \cos(2\pi\nu)] x^2 + 2\pi R x |m|^2 \text{sh}(2\pi R x) + \\ + [\text{ch}(2\pi R x) + \cos(2\pi\nu)] (\pi R |m|^2)^2 \}^{-1}. \quad (53)$$

Заметим, что приведенный выше интеграл сходится, поэтому мы смогли распространить верхний предел Λ до бесконечности.

Как видно из выражения (53), ток является периодической функцией переменной $\nu = e A_3 R$ и обращается в нуль при $\nu = n/2$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), т. е. при $e\Phi/2\pi = n/2$, где $\Phi = 2\pi R A_3$ – поток калибровочного поля, описываемого потенциалом A_3 .

Интеграл (53) в критической точке $m = 0$ в согласии с (18) упрощается и принимает вид

$$J_{\text{ind}} = -\frac{1}{2} e R \sin(2\pi\nu) \int_0^\infty \frac{x dx}{\text{ch}(2\pi R x) - \cos(2\pi\nu)}. \quad (54)$$

График зависимости индуцированного тока J_{ind} от величины полевого параметра $a = e A_3$ в случае $m = 0$ показан на рис. 7, где для удобства численных рас-

Рис. 8. Зависимость индуцированного тока от m для постоянного значения радиуса компактификации при $R\Lambda = 1$ и при разных ν .

четов мы ввели безразмерные переменные с помощью параметра верхнего обрезания Λ (см. (17)):

$$\frac{J_{\text{ind}}}{e} \rightarrow \frac{J_{\text{ind}}}{e\Lambda}, \quad a \rightarrow a\Lambda^{-1}, \quad R \rightarrow R\Lambda. \quad (55)$$

Заметим, что в таком случае величина $\nu = aR$ остается безразмерной.

Графики зависимости индуцированного тока J_{ind} от величины m показаны на рис. 8 и рис. 9, где тоже использовались безразмерные переменные.

На рис. 8 показана зависимость тока J_{ind} от величины m при разных значениях $\nu = aR$ при одном и том же значении радиуса компактификации $R\Lambda = 1$. Значения полевого параметра $a\Lambda^{-1} = 0.25$ и $a\Lambda^{-1} = 0.75$ выбраны с разных сторон от экстремума потенциала (18) $\nu = n/2$ (в данном случае $\nu = 0.5$), чтобы производная от потенциала имела разные знаки, а значит, ток $J_{\text{ind}} = \partial V_{\text{eff}}/\partial A_3$ имел разное поведение. На рис. 9 показана зависимость тока J_{ind} от величины m при разных значениях радиуса компактификации $R\Lambda$, но при одном и том же значении $\nu = aR$.

При тех значениях $\nu = eA_3R$, при которых величина $\tilde{\nu}$ ($\tilde{\nu} = \nu - n$ при $\nu > 0$ и $\tilde{\nu} = \nu + n$ при $\nu < 0$, где n – максимальное целое число, меньшее $|\nu|$) принимает малые значения (эти точки соответствуют максимумам потенциала), ток будет равен

$$J_{\text{ind}}(\sigma, a)|_{\sigma=0} \approx \frac{e\tilde{\nu}}{4\pi R} \ln \tilde{\nu}^2. \quad (56)$$

При тех значениях $\nu = eA_3R$, при которых величина $\tilde{\nu} = \nu - (2n+1)/2$ при $\nu > 0$ и $\tilde{\nu} = \nu + (2n+1)/2$ при $\nu < 0$, где n – максимальное целое число, меньшее $|\nu|$,

Рис. 9. Зависимость индуцированного тока от m для постоянного значения ν при разных радиусах компактификации.

принимает малые значения (эти точки соответствуют минимумам потенциала), ток будет равен

$$J_{\text{ind}}(\sigma, a)|_{\sigma=0} \approx \frac{e\tilde{\nu}}{2\pi R} \ln 2, \quad (57)$$

что соответствует поведению кривой тока, приведенной на рис. 7.

4. ВЫВОДЫ

В данной работе мы изучили процесс динамического образования массы фермионов в трехмерной модели с одним “дополнительным” измерением при взаимодействии двух типов фермионов, существующих в трехмерном пространстве и на двумерной бране, с учетом воздействия калибровочного поля A_3 .

Если поле A_3 рассматривать как внешний параметр, то динамическая масса оказывается осциллирующей функцией (при $a \neq 0$) с амплитудой, уменьшающейся с ростом радиуса компактификации. При этом динамическая масса становится не зависящей от калибровочного поля при большом радиусе компактификации и стремится к постоянному значению (см. рис. 2а, б).

Если же рассматривать калибровочное поле A_3 как динамическую переменную, то экстремальное значение калибровочной переменной приводит к тривиальному значению константы связи, что изображено на рис. 4а. Следует отметить, что при условии (25) генерируемая масса (12) получается порядка $\lambda \sim 1/2R$ при ($n = 1$), что равно ее значению при антипериодических граничных условиях $a = \alpha/R$, $\alpha = 1/2$. Тем самым мы получаем массу, меньшую, чем массы мод Калуцы–Клейна $\lambda_n = n/R$.

Если рассмотреть кривую константы связи (22), которая лежит немного выше критической величины ($m = 0.1\Lambda$), то при изменении R в области малых значений мы можем получить различные малые значения констант связи, а следовательно, и различные малые массы. Таким образом, в рамках данной модели существует возможность объяснить иерархию масс разных поколений частиц. При этом зависимость константы связи от малого радиуса компактификации дается формулой (35).

В работе была также исследована модель нанотрубки с размерностью $\mathbb{R}^2 \times S^1$. В рамках данной задачи было установлено, что в выражение для фермионной щели кроме динамического вклада от конденсата m из-за четырехфермионного взаимодействия входит кинематический вклад – фаза Ааронова–Бома. Отметим, что в нашей модели кинематический (топологический) вклад в фермионную щель был найден (в отличие от задачи в работе [36]) в результате решения задачи на минимум эффективного потенциала модели.

График зависимости фермионной щели от фазы Ааронова–Бома (рис. 6) демонстрирует, что в модели генерируются две массы. Сплошная линия показывает известную зависимость щели, как в работе [36]. Штриховая линия на рис. 6 показывает, что из-за наличия в модели четырехфермионного взаимодействия генерируется малая масса, много меньшая массы фермионов Калуцы–Клейна. В рамках настоящей задачи была рассчитана также критическая константа связи модели (см. выражение (52)).

Наконец, была рассмотрена возможность генерации индуцированного тока в $(2+1)$ -мерной модели в “дополнительном” измерении. Мы показали, что именно эффект вакуумной поляризации приводит к возможности образования индуцированного тока. Отметим роль нетривиальной топологии, которая проявляется в возникновении вакуумного тока посредством вакуумных эффектов. Выражение для индуцированного тока дается формулой (53). Зависимость тока в критической точке $m = 0$ от значения полевого параметра изображена на рис. 7. При значениях $\nu = eA_3R$, соответствующих максимуму эффективного потенциала, поведение индуцированного тока можно описать выражением (56), а при значениях, соответствующих минимуму потенциала, – выражением (57). Зависимость индуцированного тока от поля имеет периодический характер, и значение тока обращается в нуль при $\nu = n/2$ ($\nu = eA_3R$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Последующее исследование данной проблемы, по нашему мнению, может быть полезным в описании структуры и свойств более реалистических систем, таких как графен с линейными дефектами, нанотрубки и фуллерены.

Список литературы

- [1] T. Kaluza, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1921, 966–972.
- [2] O. Klein, *Z. Phys.*, **37**:12 (1926), 895–906.
- [3] R. Sundrum, *TASI 2004 lectures: To the fifth dimension and back*, arXiv: hep-th/0508134.
- [4] Y. Hosotani, *Phys. Lett. B*, **126**:5 (1983), 309–313.
- [5] В. Ч. Жуковский, К. Г. Клименко, В. В. Худяков, Д. Эберт, *Письма в ЖЭТФ*, **73**:3 (2001), 137–142, arXiv: hep-th/0012256.
- [6] В. Ч. Жуковский, К. Г. Клименко, В. В. Худяков, *ТМФ*, **124**:2 (2000), 323–338.
- [7] K. V. Zhukovskii, P. A. Eminov, *Phys. Lett. B*, **359**:1–2 (1995), 155–158.
- [8] К. В. Жуковский, П. А. Эминов, *ЯФ*, **59**:7 (1996), 1265–1269.

- [9] В. Ч. Жуковский, А. С. Разумовский, К. В. Жуковский, *Изв. вузов. Поволжский регион. Естественные науки*, **2** (2003), 80–107, arXiv: hep-th/0402070.
- [10] А. С. Вшивцев, Б. В. Магницкий, В. Ч. Жуковский, К. Г. Клименко, *ЭЧАЯ*, **29**:5 (1998), 1259–1318.
- [11] V. N. Rodionov, *Phys. Rev. A*, **75**:6 (2007), 062111, 8 pp., arXiv: hep-ph/0702228.
- [12] W. P. Su, J. R. Schrieffer, A. J. Heeger, *Phys. Rev. Lett.*, **42**:25 (1979), 1698–1701.
- [13] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, A. A. Firsov, *Science*, **306**:5695 (2004), 666–669, arXiv: cond-mat/0410550.
- [14] M. I. Katsnelson, *Mater. Today*, **10**:1–2 (2007), 20–27.
- [15] A. K. Geim, *Science*, **324**:5934 (2009), 1530–1534, arXiv: 0906.3799.
- [16] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, A. A. Firsov, *Nature*, **438**:7065 (2005), 197–200, arXiv: cond-mat/0509330.
- [17] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, A. K. Geim, *Rev. Modern Phys.*, **81**:1 (2009), 109–162, arXiv: 0709.1163.
- [18] Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, P. Kim, *Nature*, **438**:7065 (2005), 201–204, arXiv: cond-mat/0509355.
- [19] K. S. Novoselov, Z. Jiang, Y. Zhang, S. V. Morozov, H. L. Stormer, U. Zeitler, J. C. Maan, G. S. Boebinger, P. Kim, A. K. Geim, *Science*, **315**:5817 (2007), 1379–1379.
- [20] P. R. Wallace, *Phys. Rev.*, **71**:9 (1947), 622–634.
- [21] G. W. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.*, **53**:26 (1984), 2449–2452.
- [22] V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte, *Internat. J. Modern Phys. B*, **21**:27 (2007), 4611–4658, arXiv: 0706.3016.
- [23] A. H. Castro Neto, *Selected topics in graphene physics*, arXiv: 1004.3682.
- [24] D. Ebert, V. Ch. Zhukovsky, E. A. Stepanov, *J. Phys.: Condens. Matter*, **26**:12 (2014), 125502–125509.
- [25] D. Gross, A. Neveu, *Phys. Rev. D*, **10**:10 (1974), 3235–3253.
- [26] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.*, **122**:1 (1961), 345–358.
- [27] K. G. Klimenko, *Z. Phys. C*, **37**:3 (1988), 457–463.
- [28] B. Rosenstein, B. J. Warr, S. H. Park, *Phys. Rev. D*, **39**:10 (1989), 3088–3092.
- [29] D. Ebert, M. K. Volkov, *Phys. Lett. B*, **272**:1–2 (1991), 86–90.
- [30] H. Caldas, O. Rudnei, *Phys. Rev. B*, **80**:11 (2009), 115428, 9 pp., arXiv: 0907.0723.
- [31] J. E. Drut, D. T. Son, *Phys. Rev. B*, **77**:7 (2008), 075115, 5 pp., arXiv: 0710.1315.
- [32] H. Caldas, *Nucl. Phys. B*, **807**:3 (2009), 651–658.
- [33] F. de Juan, A. Cortijo, M. A. H. Vozmediano, *Phys. Rev. B*, **76**:16 (2007), 165409, 9 pp.
- [34] M. A. H. Vozmediano, M. I. Katsnelson, F. Guinea, *Phys. Rep.*, **496**:4–5 (2010), 109–148, arXiv: 1003.5179.
- [35] J. González, F. Guinea, M. A. H. Vozmediano, *Nucl. Phys. B*, **406**:3 (1993), 771–794.
- [36] A. V. Gamayun, E. V. Gorbar, *Phys. Lett. B*, **610**:1–2 (2005), 74–79, arXiv: hep-ph/0411157.
- [37] E. J. Ferrer, V. de la Incera, *Photons and fermions in spacetime with a compactified spatial dimension*, arXiv: hep-ph/0408229.
- [38] D. Y. Song, *Phys. Rev. D*, **48**:8 (1993), 3925–3928.
- [39] Yu. A. Sitenko, *Phys. Rev. D*, **60**:12 (1999), 125017, 13 pp.
- [40] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev.* (2), **115**:3 (1959), 485–491.
- [41] В. Г. Кадышевский, В. Н. Родионов, *ТМФ*, **136**:3 (2003), 517–528.
- [42] R. Jackiw, A. I. Milstein, S.-Y. Pi, I. S. Terekhov, *Phys. Rev. B*, **80**:3 (2009), 033413, 3 pp.
- [43] H. Abe, H. Miguchi, T. Muta, *Modern Phys. Lett. A*, **15**:6 (2000), 445–454, arXiv: hep-ph/0002212.
- [44] D. Ebert, V. Ch. Zhukovsky, A. V. Tyukov, *Modern Phys. Lett. A*, **25**:35 (2010), 2933–2945.

- [45] V. Ch. Zhukovsky, E. A. Stepanov, *Phys. Lett. B*, **718**:2 (2012), 597–602.
- [46] И. П. Волобуев, В. Г. Кадышевский, М. Д. Матвеев, Р. М. Мир-Касимов, *ТМФ*, **40**:3 (1979), 363–372.
- [47] W. Bietenholz, A. Gfeller, U. J. Wiese, *JHEP*, **10** (2003), 018, 24 pp., arXiv:hep-th/0309162.
- [48] В. Ч. Жуковский, Е. А. Степанов, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.*, 2012, № 1, 58–64.
- [49] R. G. Chambers, *Phys. Rev. Lett.*, **5**:1 (1960), 3–5.
- [50] N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki, J. Endo, A. Tonomura, S. Yano, H. Yamada, *Phys. Rev. A*, **34**:2 (1986), 815–822.
- [51] E. J. Ferrer, V. de la Incera, A. Romeo, *Phys. Lett. B*, **515**:3–4 (2001), 341–347.
- [52] В. Ч. Жуковский, Е. А. Степанов, *Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.*, 2014, № 2, 36–42.

Поступила в редакцию 10.06.2014