Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Семенов-Тянь-Шанский, Операторы Лакса, пуассоновы группы и дифференциальная теория Галуа, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 1, 173–199

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8729>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:00:20

© 2014 г.

М. А. Семенов-Тянь-Шанский^{*†}

ОПЕРАТОРЫ ЛАКСА, ПУАССОНОВЫ ГРУППЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ГАЛУА

Подробно разбирается перенос пуассоновой структуры в пространстве дифференциальных или разностных операторов Лакса на пространство решений соответствующей вспомогательной линейной задачи (пространство волновых функций). Исследовано спонтанное нарушение симметрии, приводящее к появлению нетривиальной пуассоновой структуры на дифференциальной или разностной группе Галуа. Приведен обзор разностной версии теории Дринфельда–Соколова; описан новый тип классических r -матриц, связанных с обобщенными exchange-алгебрами.

Ключевые слова: пуассонова редукция, группы Пуассона–Ли, классические r -матрицы, разностные операторы, дифференциальные и разностные группы Галуа

DOI: 10.4213/tmf8729

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение скобок Пуассона в пространствах операторов Лакса, связанных с различными типами нелинейных интегрируемых уравнений, началось еще с основополагающей работы Фаддеева и Захарова [1] и, таким образом, имеет уже солидную историю. С геометрической точки зрения оператор Лакса – это фактически оператор ковариантного дифференцирования в плоском расслоении со связностью. Аналогично, но чуть более сложно можно интерпретировать и операторы Лакса высокого порядка. В разностном случае операторы Лакса можно интерпретировать как операторы параллельного переноса. Естественный объект, возникающий в теории плоских расслоений со связностью, – это пространство ковариантно-постоянных сечений, т. е. решений вспомогательной линейной задачи. Для краткости мы будем называть эти решения волновыми функциями.

Основной вопрос, который исследуется в настоящей статье, состоит в переносе пуассоновой структуры в пространстве связностей на пространство волновых функций. Этот вопрос представляет некоторый прикладной интерес в связи с изучением

^{*}Institut Mathématique de Bourgogne, Dijon, France. E-mail: semenov@u-bourgogne.fr

[†]Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

интегрируемых нелинейных уравнений. Например, с волновыми функциями оператора Шредингера можно связать семейство интегрируемых нелинейных уравнений “типа КдФ”, связанных друг с другом цепочкой дифференциальных подстановок. Все эти уравнения являются гамильтоновыми относительно правильно выбранной пуассоновой структуры в пространстве волновых функций. Однако более существенная причина интереса к этому вопросу состоит в нетривиальном характере ответа: построение пуассоновой структуры в пространстве волновых функций оказывается связанным с любопытным примером нарушения симметрии.

С алгебраической точки зрения переход от связностей к волновым функциям можно интерпретировать как переход к алгебраическому расширению алгебры наблюдаемых. В духе элементарного вариационного исчисления мы можем считать, что наблюдаемые для нелинейных уравнений, связанных с оператором Лакса, представляют собой локальные функционалы от коэффициентов связности, т. е. элементы дифференциальной алгебры, порожденной матричными элементами оператора Лакса. Дифференциальная алгебра, порожденная матричными элементами волновых функций, есть ее расширение Галуа; исходная алгебра наблюдаемых – в точности подалгебра инвариантов дифференциальной группы Галуа вспомогательной линейной задачи. Оказывается, что пуассонова структура в пространстве волновых функций неинвариантна относительно действия группы Галуа; вместо этого выполняется более сложное свойство *пуассоновой ковариантности*, а сама группа Галуа приобретает структуру группы Ли–Пуассона.

Один из примеров такого спонтанного нарушения симметрии описан в работе [2], где исследован случай операторов Шредингера (проективных связностей); в этом случае дифференциальная группа Галуа совпадает с проективной группой $PSL(2)$, а скобка Пуассона связана с алгеброй Вирасоро. Переход от дифференциальных операторов второго порядка к разностным операторам приводит к дискретной версии алгебры Вирасоро, впервые описанной Фаддеевым и Тахтаджяном [3]. В описании соответствующих скобок Пуассона проективная группа (совпадающая с разностной группой Галуа) также играет центральную роль.

В настоящей работе мы рассматриваем общий случай, т. е. пуассоновы структуры в пространстве волновых функций “общих” дифференциальных и разностных операторов первого порядка. Как известно, переход от матричных дифференциальных операторов первого порядка к скалярным уравнениям высокого порядка основан на гамильтоновой редукции по калибровочному действию треугольной подгруппы (теория Дринфельда–Соколова [4]). При построении разностной теории Дринфельда–Соколова также возникают пуассоновы аномалии [5], что позволяет практически полностью устранить произвол в выборе пуассоновой структуры. Эти же аномалии дают возможность практически однозначно зафиксировать пуассоновы структуры и в нашем случае, в частности при выборе “правильной” пуассоновой структуры на группе Галуа.

В статью вошли как новые результаты, так и по возможности ясное изложение общей картины; в итоге получилось что-то вроде цикла докладов для семинара лаборатории математических проблем физики Санкт-Петербургского отделения Математического института. Все эти вопросы на протяжении ряда лет действительно обсуждались на семинаре. Для меня большая честь представить эту статью в номер журнала, посвященный восьмидесятилетию моего учителя Л. Д. Фаддеева.

2. СКОБКИ ШВИНГЕРА И EXCHANGE-АЛГЕБРЫ

Связность на прямой – это дифференциальный оператор первого порядка вида

$$D_x = \partial_x - L,$$

где L – гладкая функция со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ структурной группы. Мы будем считать, что $\mathfrak{g}$ – редуктивная алгебра Ли с фиксированным невырожденным инвариантным скалярным произведением (для простоты можно считать, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ и скалярное произведение есть след произведения матриц). Естественная пуассонова структура в пространстве связностей – так называемая *скобка Швингера*, которая задается формулой

$$\{F_1, F_2\} = \langle \Lambda_L X_1, X_2 \rangle, \quad (1)$$

где X_i – производная Фреше функционала F_i , $i = 1, 2$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартная инвариантная билинейная форма в пространстве функций со значениями в $\mathfrak{g}$,

$$\langle X, Y \rangle = \int \text{tr}(X(x)Y(x)) dx,$$

а Λ_L – пуассонов оператор,

$$\Lambda_L X = \partial_x X + \text{ad } L \cdot X.$$

Формулу (1) обычно записывают в эквивалентном виде, задавая скобки Пуассона вычисляющих функционалов, которые сопоставляют потенциалу L значения его матричных элементов:

$$\{L^1(x), L^2(y)\} = [t^{12}, L^1(x) - L^2(y)]\delta(x - y) + t^{12}\delta'(x - y);$$

мы используем стандартные тензорные обозначения для скобки Пуассона матричнозначных функционалов и обозначаем через $t^{12} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ тензорный элемент Казимира, соответствующий выбранному скалярному произведению в $\mathfrak{g}$.

Зафиксируем редуктивную группу Ли G – структурную группу связности со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathbb{G} = C^\infty(\mathbb{R}, G)$ – соответствующая группа токов. Мы можем записать вспомогательную линейную задачу в виде

$$\partial_x \psi = L\psi, \quad (2)$$

где $L \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{g})$. Волновую функцию ψ мы будем считать элементом пространства $W = C^\infty(\mathbb{R}, G)$; другими словами, ψ – фундаментальное решение линейного уравнения (2) (фактически, W – другой экземпляр группы $\mathbb{G}$, но их полезно различать: W является не группой, а главным однородным пространством). Отображение

$$\pi: C^\infty(\mathbb{R}, G) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{g}), \quad \psi \mapsto \partial \psi \cdot \psi^{-1},$$

восстанавливает связность L по фундаментальному решению. Действие группы $\mathbb{G}$ на W левыми сдвигами порождает в пространстве связностей калибровочные преобразования

$$g: L \mapsto \text{Ad } g \cdot L + \partial_x g \cdot g^{-1}.$$

Это действие является гамильтоновым относительно скобки Швингера и фактически совпадает с коприсоединенным представлением центрального расширения группы токов. отождествим группу G с подгруппой постоянных функций в $\mathbb{G} = C^\infty(\mathbb{R}, G)$. Слои проекции π совпадают с орбитами действия группы G на W правыми сдвигами, $\psi \mapsto \psi \cdot h$.

Перенос пуассоновой структуры в пространство волновых функций даже в этом простейшем случае оказывается неожиданно нетривиальным: трудности связаны с необратимостью отображения π . Впервые соответствующая скобка была описана (из несколько других соображений) Бабелом [6] под названием exchange-алгебры.

Определим левые и правые производные Фреше функционала F на W формулами

$$\langle \nabla_f(\psi), \xi \rangle = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(e^{t\xi}\psi), \quad \langle \nabla'_f(\psi), \xi \rangle = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\psi e^{t\xi}).$$

Легко видеть, что искомая скобка на W должна быть левоинвариантной (это условие следует из гамильтоновости калибровочных преобразований, порождаемых левыми сдвигами), т. е. зависеть от правых производных Фреше; таким образом, ее можно записать в виде

$$\{f_1, f_2\} = \langle R(\nabla'_{f_1}), \nabla'_{f_2} \rangle, \quad (3)$$

где R – линейный оператор. Та же формула, записанная в тензорных обозначениях для вычисляющих функционалов, имеет вид

$$\{\psi^1(x), \psi^2(y)\} = \psi^1(x)\psi^2(y)R(x-y), \quad (4)$$

где $R(x-y)$ – ядро оператора R (трансляционно-инвариантная обобщенная функция от двух переменных). Заметим, что скобка (3), (4), вообще говоря, неинвариантна относительно правых сдвигов. Выбор exchange-матрицы, указанный Бабелом, таков:

$$r(x-y) = r_+ \theta(x-y) + r_- \theta(y-x), \quad (5)$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда и $r_\pm$ – классические r -матрицы, связанные с решением r модифицированного уравнения Янга–Бакстера,

$$r_\pm = \frac{1}{2}(r \pm t) \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

(как и выше, t – тензорный элемент Казимира). При таком выборе $R(x-y)$ мы получаем для скобок Пуассона матричных элементов $L(x) = \partial_x \psi(x)\psi^{-1}(x)$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \{L^1(x), L^2(y)\} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\psi^1(x)\psi^2(y)r^{12}(x-y)) \cdot \psi^1(x)^{-1}\psi^2(y)^{-1} - \\ &\quad - L^2(y) \frac{\partial}{\partial x} (\psi^1(x)\psi^2(y)r^{12}(x-y)) \cdot \psi^1(x)^{-1}\psi^2(y)^{-1} - \\ &\quad - L^1(x) \frac{\partial}{\partial y} (\psi^1(x)\psi^2(y)r^{12}(x-y)) \cdot \psi^1(x)^{-1}\psi^2(y)^{-1} + \\ &\quad + L^1(x)L^2(y)\psi^1(x)\psi^2(y)r^{12}(x-y)\psi^1(x)^{-1}\psi^2(y)^{-1}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$r'_x(x-y) = -r'_y(x-y) = t\delta(x-y), \quad r''_{xy}(x-y) = -t\delta'(x-y),$$

мы получаем после нескольких замечательных сокращений, вытекающих из тождества $r_+ - r_- = t$ и из стандартных свойств тензорного элемента Казимира t , формулу

$$\{L^1(x), L^2(y)\} = [t, L^1(x) - L^2(y)]\delta(x - y) - t\delta'(x - y), \quad (6)$$

т. е. скобку Швингера.

Ядро (5) можно записать в эквивалентной форме

$$R(x - y) = \frac{1}{2}\epsilon(x - y) + r,$$

где r – кососимметричная r -матрица; разумеется, $\epsilon(x - y)$ – ядро оператора интегрирования ∂_x^{-1} . Другими словами, оператор R представляет собой расширение частично определенного оператора ∂_x^{-1} . Происхождение exchange-матрицы (5) будет объяснено ниже в разделах 3, 4, где будет указано также обобщение формулы (4) (см. формулы (18), (25)).

Полезно переписать оператор R , заданный ядром (5), в фурье-представлении. Полагая, как обычно,

$$\hat{X}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(x) e^{-ikx} dx,$$

мы получаем, используя стандартное преобразование Фурье функции Хевисайда, что

$$RX(x) = r(\hat{X}(0)) + \text{v.p.} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{X}(k)}{ik} e^{ikx} dk \right)$$

или, эквивалентно,

$$RX(x) = r_+ \left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{X}(k)}{k + i0} e^{ikx} dk \right) + r_- \left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{X}(k)}{k - i0} e^{ikx} dk \right), \quad (7)$$

где мы предполагаем, что конечномерные линейные операторы, связанные с классическими r -матрицами $r_{\pm}$, поточечно действуют на значения функций, представленных сингулярными интегралами. Другими словами, оператор R является регуляризованным сингулярным интегральным оператором; классические r -матрицы $r_{\pm}$ задают правильную регуляризацию нулевых фурье-мод.

3. ПУАССОНОВА СТРУКТУРА В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ И В ПРОСТРАНСТВЕ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Задача о продолжении пуассоновой структуры на пространство волновых функций становится более прозрачной при переходе от дифференциальных операторов к разностным. Мы начнем с определения абстрактных разностных операторов в удобной для нас общности.

Пусть $\mathbb{G}$ – группа Ли, снабженная автоморфизмом τ . Обозначим через $G = \mathbb{G}^{\tau}$ подгруппу “квазиконстант”, $G = \{g \in \mathbb{G} : g^{\tau} = g\}$. Мы будем предполагать, что группа $\mathbb{G}$ редуктивна и ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ снабжена фиксированным невырожденным инвариантным скалярным произведением, причем индуцированный τ автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (который мы будем обозначать той же буквой) ортогонален. Приведем основные примеры, которые будем рассматривать далее.

ПРИМЕР 1: $\mathbb{G} = G^\Gamma$ – группа функций на одномерной решетке $\Gamma = \mathbb{Z}$ со значениями в $G = GL(n)$ и с поточечным умножением, $g_n^\tau = g_{n+1}$.

ПРИМЕР 2: $\mathbb{G}$ – группа функций на прямой со значениями в $G = GL(n)$ и $g^\tau(x) = g(x+1)$.

ПРИМЕР 3: $\mathbb{G}$ – группа функций со значениями в $G = GL(n)$, мероморфных в проколотой плоскости $\mathbb{C}^*$ и $g^\tau(z) = g(qz)$, где $q \in \mathbb{C}$, $|q| \leq 1$.

Вспомогательная линейная задача, связанная с автоморфизмом τ , имеет вид

$$\psi^\tau \psi^{-1} = L. \quad (8)$$

Ее решения мы будем по-прежнему называть волновыми функциями.

Обозначим через $\mathbb{W}$ копию группы $\mathbb{G}$, рассматриваемую как главное однородное $\mathbb{G}$ -пространство относительно левых сдвигов. Естественное действие $\mathbb{G} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$ на себе левыми умножениями индуцирует калибровочные преобразования “потенциалов” L :

$$g: \psi \mapsto g \cdot \psi, \quad L \mapsto g^\tau L g^{-1}. \quad (9)$$

Квазиконстанты действуют правыми умножениями, $\psi \mapsto \psi h$, и оставляют L инвариантным. Мы будем обозначать $\mathcal{C}$ копию группы $\mathbb{G}$, снабженную калибровочным действием (9), и называть ее элементы *разностными связностями*.

Естественный класс пуассоновых структур в пространстве разностных операторов вида (8) впервые описан в работе [7]. Эти скобки выглядят заметно сложнее, чем скобка Швингера (в которую они переходят в непрерывном пределе); вместе с тем их выбор является естественным в категории пуассоновых групп и G -пространств. Напомним, что объектами этой категории являются группы и пространства, снабженные пуассоновыми структурами, а морфизмами – пуассоновы отображения. В частности, отображения, связанные с групповым умножением $G \times G \rightarrow G$ и действием на многообразиях $G \times M \rightarrow M$, пуассоновы. (В этих определениях предполагается, что пуассонова структура на $G \times G$ и $G \times M$ есть прямое произведение пуассоновых структур на сомножителях.)

Основной пример мультипликативных скобок Пуассона – это так называемые скобки Складина, задаваемые классической r -матрицей $r \in \text{End } \mathfrak{g}$; скобка Складина гладких функций $\phi, \psi \in C^\infty(G)$ определяется формулой

$$\{\phi, \psi\} = \frac{1}{2} \langle r(\nabla_\phi), \nabla_\psi \rangle - \frac{1}{2} \langle r(\nabla'_\phi), \nabla'_\psi \rangle, \quad (10)$$

где $\nabla_\phi, \nabla'_\phi$ – левые и правые градиенты ϕ ,

$$\langle \nabla_\phi(L), \xi \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(e^{t\xi} L), \quad \langle \nabla'_\phi(L), \xi \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(Le^{t\xi}).$$

Если G – группа матриц, то формулу (10) часто записывают в эквивалентном виде, задавая скобки Пуассона между элементами матрицы $g \in G$ (образующими ее аффинного кольца):

$$\{g^1, g^2\} = \frac{1}{2} [r^{12}, g^1 g^2],$$

где $r^{12} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ – ядро оператора r , т. е. его образ при изоморфизме $\text{End } \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, задаваемом скалярным произведением в $\mathfrak{g}$. Тождество Якоби налагает жесткие ограничения на выбор r ; достаточное условие дается модифицированным классическим тождеством Янга–Бакстера

$$[rX, rY] - r([rX, Y] + [X, rY]) = -[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (11)$$

Если отображение $G \times M \rightarrow M$, заданное действием пуассоновой группы на многообразии M , пуассоново, то мы будем говорить, что скобка Пуассона на M является G -ковариантной. Условие G -ковариантности, вообще говоря, не фиксирует пуассонову структуру однозначно, даже если действие группы транзитивно. Тем не менее имеет место следующий результат [7].

ТЕОРЕМА 3.1. *Зафиксируем пуассонову структуру на группе $\mathbb{G}$ при помощи классической r -матрицы $R \in \text{End } \mathfrak{g}$, удовлетворяющей условию (11) и условию $\tau \circ R = R \circ \tau$. Тогда существует единственная пуассонова структура в пространстве $\mathcal{C}$ разностных связностей, ковариантная относительно калибровочного действия (9). Эта пуассонова структура задается формулой*

$$\begin{aligned} \{\varphi, \psi\}_\tau = & \frac{1}{2} \langle R(\nabla\varphi), \nabla\psi \rangle + \frac{1}{2} \langle R(\nabla'\varphi), \nabla'\psi \rangle - \\ & - \langle \tau \circ R_+(\nabla'\varphi), Y \rangle - \langle R_- \circ \tau^{-1}(\nabla\varphi), \nabla'\psi \rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

где $R_\pm = (R \pm \text{Id})/2$.

Ключевая особенность скобки (12) – присутствие членов “смешанной киральности”, которые содержат левые и правые градиенты, а также зависят от автоморфизма τ и его обратного. Формулу (12) можно рассматривать как разностный аналог скобки Швингера.

Наша цель состоит в том, чтобы задать пуассонову структуру в пространстве волновых функций, согласованную со скобкой (12) в пространстве разностных связностей, т. е. такую, что отображение $\pi: \mathbb{W} \rightarrow \mathcal{C}: \psi \mapsto \psi^\tau \psi^{-1}$ пуассоново. Калибровочное действие группы $\mathbb{G}$ в пространстве волновых функций – это просто левые умножения. Естественный класс скобок, имеющих нужные свойства ковариантности относительно левых и правых умножений, составляют так называемые аффинные скобки, которые задаются формулой

$$\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2} \langle l(\nabla f_1), \nabla f_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle r(\nabla' f_1), \nabla' f_2 \rangle, \quad (13)$$

где l и r – две (априори различные) классические r -матрицы. Обозначим через $\mathbb{G}^{(l,r)}$ копию группы $\mathbb{G}$, снабженную скобкой (13). Пусть $\mathbb{G}^l$ и $\mathbb{G}^r$ – копии группы $\mathbb{G}$, снабженные скобками Складина с r -матрицами l и r соответственно. Легко видеть, что действие

$$\mathbb{G}^l \times \mathbb{G}^{(l,r)} \times \mathbb{G}^r \rightarrow \mathbb{G}^{(l,r)}: (g, \psi, h) \mapsto g\psi h$$

пуассоново; другими словами, можно рассматривать $\mathbb{G}^{(l,r)}$ как главное пуассоново однородное пространство относительно левого действия группы $\mathbb{G}^l$ и правого действия группы $\mathbb{G}^r$. Стоит отметить, что в категории пуассоновых пространств главные однородные пространства для левого и правого действия по отдельности

неединственны: условие ковариантности относительно левых сдвигов фиксирует первый член в формуле (13) и оставляет второй практически произвольным.

На первый взгляд, выбор левой и правой r -матриц в формуле (13) можно делать независимо. Однако они все же связаны условием нормировки, вытекающим из тождества Янга–Бакстера: вообще говоря, левая и правая скобки по отдельности не удовлетворяют тождеству Якоби. Для сокращения возникающих препятствий нужно, чтобы l и r удовлетворяли модифицированному тождеству Янга–Бакстера (11) с одной и той же нормировкой правой части¹⁾.

Как мы сейчас проверим, выбор r -матриц l и r , совместный с заданной пуассоновой структурой (12) в пространстве разностных связностей, очень жесткий: выбор матрицы l фиксирован однозначно, а выбор r – с точностью до небольшого остаточного произвола; при этом роли l и r оказываются существенно различными.

Рассмотрим скобки

$$\{f_1, f_2\}^l = \frac{1}{2} \langle l(\nabla_{f_1}), \nabla_{f_2} \rangle, \quad \{f_1, f_2\}^r = \frac{1}{2} \langle r(\nabla_{f_1})', \nabla_{f_2}' \rangle$$

(по отдельности они, вообще говоря, не удовлетворяют тождеству Якоби). Изучим сначала левую скобку. Пусть $F_1, F_2 \in C^\infty(\mathcal{C})$; положим $f_1(\psi) = F_1(\psi^\tau \psi^{-1})$ и $f_2(\psi) = F_2(\psi^\tau \psi^{-1})$. Обозначим через X_i и X_i' левые и правые градиенты функций F_i , $i = 1, 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Левая скобка на $\mathbb{G}$ допускает редукцию на пространство $\mathcal{C}$ разностных связностей. Приведенная скобка дается формулой*

$$\begin{aligned} \{F_1, F_2\}^l(\psi^\tau \psi^{-1}) &:= \{f_1, f_2\}^l(\psi) = \\ &= \frac{1}{2} \langle l(X_1), X_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle l(X_1'), X_2' \rangle - \frac{1}{2} \langle l \circ \tau^{-1}(X_1), X_2' \rangle - \frac{1}{2} \langle \tau \circ l(X_1'), X_2 \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в прямом вычислении: нужно проверить, что скобка функций f_1, f_2 на $\mathbb{W}$ постоянна на слоях проекции $\pi: \psi \mapsto \psi^\tau \psi^{-1}$ и зависит фактически только от градиентов функций F_1, F_2 .

Формула (14) напоминает соотношение (12) (при $l = R$), однако она отличается от него в нескольких ключевых местах. В самом деле, равенство (14) содержит во всех членах только l вместо матриц $l_\pm$, которые появляются в (12) в членах со смешанной киральностью. Эта разница в действительности весьма существенна: именно наличие матриц $l_\pm$ в (12) приводит, как можно показать, к правильной скобке Швингера в непрерывном пределе. Как и следует ожидать, если матрица l удовлетворяет тождеству (11), то скобка (14) не удовлетворяет тождеству Якоби. Поправки, приводящие к правильной формуле (12) для редуцированной скобки, связаны со вкладом правой скобки. Однако, на первый взгляд, редукция правой скобки на пространство разностных связностей невозможна: в самом деле, так как правые градиенты функций неинвариантны относительно правых сдвигов, правая скобка функций $f_1(\psi) = F_1(\psi^\tau \psi^{-1})$ и $f_2(\psi) = F_2(\psi^\tau \psi^{-1})$ зависит, вообще говоря, от ψ , а не от комбинации $\psi^\tau \psi^{-1}$ и непостоянна на слоях проекции π . Несложное прямое вычисление приводит к следующему результату.

¹⁾Преобразования масштаба $r \mapsto \alpha r$, $l \mapsto \beta r$ приводят к замене члена $-[X, Y]$ в правой части (11) на $-\alpha^2[X, Y]$, $-\beta^2[X, Y]$; эти преобразования не влияют на тождество Якоби для скобки Складина. Для скобки (13) преобразования масштаба для l и r нужно проводить согласованно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Правая скобка функций f_1, f_2 задается формулой*

$$\{f_1, f_2\}^r(\psi) = \frac{1}{2} \langle (1 - \tau)r(1 - \tau^{-1}) \operatorname{Ad} \psi^{-1} X'_1, \operatorname{Ad}(\psi^\tau)^{-1} X_2 \rangle. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО данной формулы основано на следующем простом соотношении для правых градиентов функций f_1, f_2 .

ЛЕММА 3.1. *Правый градиент функции $f: \psi \mapsto F(\psi^\tau \psi^{-1})$ задается формулой*

$$\nabla' f(\psi) = (\tau^{-1} - 1) \operatorname{Ad} \psi^{-1} X'_F = (\tau^{-1} - 1) \operatorname{Ad}(\psi^\tau)^{-1} X_F.$$

ТЕОРЕМА 3.2. *Отображение $\psi \mapsto \psi^\tau \psi^{-1}$ является пуассоновым относительно правой скобки тогда и только тогда, когда*

$$(1 - \tau)r(1 - \tau^{-1}) = \tau - \tau^{-1}. \quad (16)$$

Будем считать, что оператор r коммутирует с τ ; в таком случае условие (16) принимает вид

$$2r - \tau \circ r - r \circ \tau^{-1} = \tau - \tau^{-1}. \quad (17)$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает ортогональное разложение

$$\mathfrak{g} = \operatorname{Im}(1 - \tau) \oplus \mathfrak{g},$$

где $\mathfrak{g} = \operatorname{Ker}(1 - \tau)$ – подалгебра Ли группы квазиконстант $G = \mathbb{G}^\tau$. Ясно, что на подалгебре $\mathfrak{g}$ уравнение (16) выполнено тождественно и не приводит к ограничениям, так что достаточно задать r на подпространстве $\mathfrak{g}' = \operatorname{Im}(1 - \tau) \subset \mathfrak{g}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Сужение оператора r на $\mathfrak{g}'$ совпадает с преобразованием Кэли*

$$r = (1 + \tau)(1 - \tau)^{-1}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что если $r = (1 + \tau)(1 - \tau)^{-1}$, то условие (16) выполнено. Так как оператор $1 - \tau$ обратим на $\mathfrak{g}'$, обратное тоже верно.

Докажем теперь необходимость и достаточность условия (16) для того, чтобы отображение $\psi \mapsto \psi^\tau \psi^{-1}$ было пуассоновым. Данное отображение является пуассоновым тогда и только тогда, когда операторы $\operatorname{Ad} \psi$, $\operatorname{Ad} \psi^\tau$ в правой части формулы (15) сокращаются.

Предположим, что условие (16) выполнено. Так как $\operatorname{Ad} \psi^{-1} X'_i = \operatorname{Ad}(\psi^\tau)^{-1} X_i$, $i = 1, 2$, мы получаем

$$\begin{aligned} 2\{f_1, f_2\}^r(\psi) &= \langle (\tau - \tau^{-1}) \cdot \operatorname{Ad} \psi^{-1} X'_1, \operatorname{Ad}(\psi^\tau)^{-1} X_2 \rangle = \\ &= \langle \tau \operatorname{Ad} \psi^{-1} \cdot X'_1, \operatorname{Ad}(\psi^\tau)^{-1} \cdot X_2 \rangle - \langle \tau^{-1} \operatorname{Ad}(\psi^\tau)^{-1} X_1, \operatorname{Ad} \psi^{-1} X'_2 \rangle = \\ &= \langle \operatorname{Ad}(\psi^\tau)^{-1} \cdot \tau X'_1, \operatorname{Ad}(\psi^\tau)^{-1} \cdot X'_2 \rangle - \langle \operatorname{Ad} \psi^{-1} \tau^{-1} \cdot X_1, \operatorname{Ad} \psi^{-1} \rangle = \\ &= \langle \tau X'_1, X_2 \rangle - \langle X_1, \tau X'_2 \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

На заключительном этапе, чтобы избавиться от операторов $\operatorname{Ad}(\psi^\tau)^{-1}$, $\operatorname{Ad} \psi^{-1}$, мы воспользовались инвариантностью скалярного произведения. Легко видеть, что все преобразования обратимы и, таким образом, условие (16) не только достаточно, но и необходимо.

Из соотношений (19) непосредственно видно, что вклад правой скобки дает в точности недостающие члены, которые превращают приведенную левую скобку (14) в правильную скобку (12) в пространстве разностных связностей.

В отличие от тождества Янга–Бакстера условие, фиксирующее выбор r , линейно, а не квадратично. Оказывается, что тождество Янга–Бакстера для r выполнено автоматически.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Оператор r , заданный равенством (18), на $\mathfrak{g}'$ удовлетворяет тождеству Янга–Бакстера (11).*

2. *Положим*

$$[X, Y]_r = \frac{1}{2}([rX, Y] + [X, rY]), \quad X, Y \in \mathfrak{g}'. \quad (20)$$

Тогда $[X, Y]_r \in \mathfrak{g}'$ и формула (20) задает на $\mathfrak{g}'$ структуру алгебры Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $X = (1 - \tau)\xi$, $Y = (1 - \tau)\eta$. Тогда

$$\begin{aligned} 2[X, Y]_r &= [(1 + \tau)\xi, (1 - \tau)\eta] + [(1 - \tau)\xi, (1 + \tau)\eta] = \\ &= [\xi, \eta] + [\tau\xi, \eta] - [\xi, \tau\eta] - [\tau\xi, \tau\eta] + [\xi, \eta] - [\tau\xi, \eta] + [\xi, \tau\eta] - [\tau\xi, \tau\eta] = \\ &= 2(1 - \tau)[\xi, \eta]. \end{aligned}$$

Следовательно, $[X, Y]_r \in \text{Im}(1 - \tau)$, т. е. подпространство $\mathfrak{g}' = \text{Im}(1 - \tau)$ замкнуто относительно скобки (20). Имеем, очевидно,

$$r([rX, Y] + [X, rY]) = 2(1 + \tau)[\xi, \eta].$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} [rX, rY] + [X, Y] &= [(1 + \tau)\xi, (1 + \tau)\eta] + [(1 - \tau)\xi, (1 - \tau)\eta] = \\ &= (1 + \tau)[\xi, \eta] + [\xi, \tau\eta] + [\tau\xi, \eta] + (1 + \tau)[\xi, \eta] - [\xi, \tau\eta] - [\tau\xi, \eta] = \\ &= 2(1 + \tau)[\xi, \eta], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

4. ОБМЕННЫЕ r -МАТРИЦЫ И СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Правую r -матрицу (18) можно рассматривать как разностный аналог exchange-матрицы, введенной Бабелом. Как и в непрерывном случае, основная проблема состоит в том, что формула (18) определяет матрицу r только на подпространстве; ее продолжение на всю алгебру $\mathfrak{g}$ – отдельная важная задача.

Рассмотрим случай разностных операторов на одномерной решетке (пример 1); в этом случае функциональное уравнение (17) можно решить в явном виде. отождествим линейные операторы, действующие в алгебре Ли $\mathfrak{g}^\Gamma$, с их ядрами, т. е. с элементами пространства $\mathfrak{g}^\Gamma \otimes \mathfrak{g}^\Gamma$, при помощи инвариантного скалярного произведения в $\mathfrak{g}$. Обозначим через $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ элемент Казимира (ядро тождественного отображения в $\mathfrak{g}$). Положим

$$r(n, m) = \frac{1}{2}t\epsilon(n - m) + r_0, \quad (21)$$

где

$$\epsilon(n) = \operatorname{sgn} n = \begin{cases} 1, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ -1, & n < 0, \end{cases}$$

и $r_0 \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ – постоянная r -матрица, не зависящая от n и m . Автоморфизм τ действует на $r(n, m)$ как сдвиг аргумента n , $r^\tau(n, m) = r(n+1-m)$. Имеем, очевидно,

$$\epsilon(n+1-m) - \epsilon(n-m) = \delta(n+1-m), \quad \epsilon(n-1-m) - \epsilon(n-m) = \delta(n-1-m),$$

где $\delta(n-m)$ – символ Кронекера.

Мы предполагаем, что постоянная r -матрица r_0 удовлетворяет классическому уравнению Янга–Бакстера. Вместо r_0 можно ввести r -матрицы ${}^0r_\pm = (r_0 \pm t)/2$. Очевидно, что

$${}^0r_+ + {}^0r_- = r_0, \quad {}^0r_+ - {}^0r_- = t,$$

и r -матрицу (21) можно записать в виде

$$r(n, m) = {}^0r_+ \theta(n-m) + {}^0r_- \theta(m-n), \quad (22)$$

где

$$\theta(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Алгебра Пуассона, определяющаяся r -матрицей (22), называется *решеточной exchange-алгеброй*.

Перейдем теперь к разностным операторам на прямой (пример 2). В этом случае τ – оператор сдвига, $g^\tau(x) = g(x+1)$; его преобразование Кэли $r = (1+\tau)(1-\tau)^{-1}$ есть сингулярный интегральный оператор, формально задаваемый выражением

$$(rf)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ctg} \frac{k}{2} \hat{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (23)$$

Для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{g})$ положим

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n).$$

Очевидно, что F – периодическая функция с периодом 1 и, таким образом, она лежит в ядре оператора $1-\tau$. Для регуляризации интеграла (23) воспользуемся стандартным разложением $\operatorname{ctg}(k/2)$ на простые дроби и формулой суммирования Пуассона

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi n) e^{2\pi i n x}.$$

Регуляризация интеграла (23) дается формулой

$$\begin{aligned} (rf)(x) = & {}^0r_+ \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(k) \operatorname{ctg}(k+i0) e^{ikx} dk \right) + \\ & + {}^0r_- \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(k) \operatorname{ctg}(k-i0) e^{ikx} dk \right) \end{aligned} \quad (24)$$

в полной аналогии с соотношением (7). Пользуясь формулами Сохоцкого и Пуассона, мы можем переписать равенство (24) в эквивалентной форме

$$(rf)(x) = r_0(F(x)) + \text{v.p.} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ctg} \frac{k}{2} \hat{f}(k) e^{ikx} dk \right), \quad (25)$$

где оператор r_0 действует поточечно в пространстве квазиконстант.

В q -разностном случае (пример 3), когда $g^\tau(z) = g(qz)$, преобразование Кэли $r = (1 + \tau)(1 - \tau)^{-1}$ полностью определяется своим ядром, т. е. обобщенной функцией двух переменных; для его вычисления нужно подействовать оператором r на дельта-функцию

$$\delta\left(\frac{z}{z'}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{z}{z'}\right)^n,$$

представляющую собой ядро единичного оператора. Положим $z/z' = t$, получим

$$\begin{aligned} r(z, z') &= \sum_{n \neq 0} \frac{1 + q^n}{1 - q^n} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + q^n}{1 - q^n} t^n + \frac{1 + q^{-n}}{1 - q^{-n}} t^{-n} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (t^n - t^{-n}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^n} (t^n - t^{-n}) = \frac{t + 1}{t - 1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^n} (t^n - t^{-n}). \end{aligned}$$

Если $z = e^{ix}$, $z' = e^{ix'}$, мы можем представить $r(z, z')$ в виде ряда Фурье на окружности,

$$r(z, z') = \frac{1}{i} \operatorname{ctg} \frac{x - x'}{2} + 4i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^n} \sin n(x - x'). \quad (26)$$

Нетрудно видеть, что правая часть этой формулы с точностью до несущественных отличий совпадает с логарифмической производной тета-функции Якоби θ_1 (отличие связано с тем, что в стандартном определении Якоби квазипериоды функции θ_1 равны 2 и $q^2 = e^{2\pi i \tau}$, а в нашем случае они равны 2π и q). Заметим, что функция $r(z, z')$ “не совсем эллиптическая”, так как логарифмическая производная тета-функции θ_1 инвариантна относительно сдвигов на $2\pi i \tau$ только с точностью до аддитивной постоянной. Если рассматривать (26) как ядро сингулярного интегрального оператора на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, его можно регуляризовать тем же способом, что и выше. В этом случае ядро имеет особенность только при $x = 0$ (остальные особенности ядра, совпадающие с корнями функции θ_1 , связаны с точками мультипликативной решетки q^n и лежат в комплексной области).

Регуляризация оператора r приводит к нарушению правой инвариантности скобки в пространстве $\mathbb{W}$; заметим, что эта регуляризация определяется выбором конечномерной r -матрицы даже в том случае, когда группа квазиконстант бесконечномерна. Эта регуляризация находится в соответствии с разностной теорией Галуа: согласно теореме Эттингера [8] разностная группа Галуа, связанная с разностным уравнением

$$\psi(qz) = L(z)\psi(z), \quad (27)$$

конечномерна, она представляет собой конечномерную подгруппу группы квазиконстант, состоящую из постоянных матриц и порожденную значениями в точке общего

положения матриц перехода Биркгофа, которые связаны с разностным уравнением (27). В случае уравнений общего вида эта группа совпадает с полной линейной группой $GL(n)$; выбор r -матрицы r_0 естественно наделяет ее структурой группы Пуассона–Ли.

В случае абстрактных разностных уравнений общего вида выбор матрицы r_0 , как и выбор левой r -матрицы в (13), остается произвольным. Далее мы покажем, что при некоторых дополнительных предположениях этот произвол можно значительно сократить и даже устранить полностью.

5. СКОБКИ ПУАССОНА МАТРИЦ МОНОДРОМИИ

Вернемся к случаю разностных операторов на решетке и предположим, что “потенциал” во вспомогательной линейной задаче есть периодическая функция с периодом N , $L_{n+N} = L_n$. Предположим также, что калибровочная группа, действующая левыми сдвигами, состоит из N -периодических функций на решетке. В этом случае волновые функции будут, вообще говоря, квазипериодическими, что стандартным образом приводит к появлению монодромии. Два естественных определения матрицы монодромии в этом случае таковы:

$$M = \psi_N \psi_0^{-1} \quad \text{или} \quad \widetilde{M} = \psi_0^{-1} \psi_N.$$

Разумеется, матрицы M и $\widetilde{M}$ сопряжены (как элементы группы G), но их трансформационные свойства при правых и левых сдвигах на G существенно различны: матрица M инвариантна относительно правого действия группы квазиконстант (для разностных уравнений общего вида на решетке эта группа совпадает с разностной группой Галуа), а матрица $\widetilde{M}$ – инвариант калибровочной группы. В силу этого матрицу $\widetilde{M}$ удобно использовать при изучении пуассоновой редукции относительно подгрупп калибровочной группы (мы обсудим эту редукцию ниже в разделах 6, 7). С другой стороны, матрица M непосредственно вычисляется через потенциалы L_n ,

$$M = \prod_n^{\sim} L_n,$$

и, таким образом, скобки Пуассона для M можно вычислить в явном виде. Будем считать для простоты, что левая r -матрица в пространстве $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\Gamma$ действует по формуле $(lX)_n = l(X_n)$, т. е. порождается оператором, действующим в алгебре Ли структурной группы. (Это условие более сильное, чем условие $l \circ \tau = \tau \circ l$, наложенное выше в теореме 3.1, но в действительности его можно ослабить – см. ниже предложение 7.1).

ТЕОРЕМА 5.1. *Предположим, что пространство разностных операторов на решетке наделено скобкой (12) (в которой $R = l$).*

1. *Наделим группу G скобкой Пуассона*

$$\{f_1, f_2\}^l(M) = \frac{1}{2} \langle l(X_1), X_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle l(X'_1), X'_2 \rangle - \langle l_+(X_1), X'_2 \rangle - \langle l_-(X'_1), X_2 \rangle, \quad (28)$$

где мы обозначили через X_i и X'_i левые и правые градиенты функций $f_i \in C^\infty(G)$ для $i = 1, 2$. Тогда отображение

$$\mathbb{G} \rightarrow G: (L_n)_{n=1}^N \mapsto M = \prod_n^{\sim} L_n$$

пуассоново.

2. Калибровочное действие группы $\mathbb{G} = G^\Gamma$ (наделенной скобкой Складина, которая построена с помощью матрицы l) на матрицу монодромии, $M \mapsto g_N M g_N^{-1}$, пуассоново.

Если пуассонова структура на решетке распадается в прямое произведение, т. е. динамические переменные, связанные с разными точками решетки, коммутируют, то пересчет скобок Пуассона для монодромии представляет одно из стандартных (и наиболее важных) вычислений в теории интегрируемых систем. Для скобки (12) оно проводится аналогично, но немного более сложным образом (так как скобка (12) не распадается в произведение локальных скобок). Скобка Пуассона (28) была впервые введена в работе [7]; фактически эта скобка Пуассона связана с пуассоновой структурой дуальной группы Пуассона–Ли. Будем называть ее *дуальной скобкой*.

Скобка Пуассона для функций от матрицы монодромии $\tilde{M}$ зависит от правой r -матрицы r . Пользуясь явным видом r , приведенным выше в (4), легко доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.2. *Отображение $\tilde{M} : \mathbb{G} \rightarrow G$, $\psi \mapsto \psi_0^{-1} \psi_N$, является пуассоновым относительно дуальной скобки на группе G , построенной по оператору r_0 ,*

$$\begin{aligned} \{f_1, f_2\}^{r_0}(\tilde{M}) &= \frac{1}{2} \langle r_0(X_1), X_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle r_0(X'_1), X'_2 \rangle - \\ &\quad - \langle r_+^0(X_1), X'_2 \rangle - \langle r_-^0(X'_1), X_2 \rangle. \end{aligned} \quad (29)$$

Наделим группу квазиконстант (совпадающую в нашем случае с разностной группой Галуа) скобкой Складина, построенной по матрице r_0 . Тогда действие этой группы сопряжениями оставляет скобку (29) ковариантной.

Существует простая возможность согласовать скобки Пуассона, связанные с двумя альтернативными определениями матрицы монодромии: достаточно положить $r_0 = l$. Этот выбор устраняет произвол в выборе r (если l уже фиксирована); как мы увидим, в случае разностных уравнений высокого порядка, описываемых разностной версией теории Дринфельда–Соколова, его нужно еще немного модифицировать.

6. РАЗНОСТНАЯ ТЕОРИЯ ДРИНФЕЛЬДА–СОКОЛОВА. I

Для разностных связностей “общего вида” выбор “левой” r -матрицы остается произвольным. Важным частным случаем, когда этот выбор делается полностью жестким, является теория скалярных разностных операторов высокого порядка. Прежде чем переходить к разностному случаю, мы кратко рассмотрим случай дифференциальных операторов. Напомним, что линейное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$\partial_x^n \phi + u_{n-1} \partial_x^{n-1} \phi + u_{n-2} \partial_x^{n-2} \phi + \dots + u_1 \partial_x \phi + u_0 \phi = 0$$

можно переписать как матричное уравнение первого порядка

$$\partial_x \psi + L \psi = 0,$$

где вектор-столбец ψ составлен из ϕ и ее производных,

$$\psi = (\phi, \phi', \dots, \phi^{(n-1)})^t$$

и L – фробениусова матрица,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ u_0 & u_1 & \dots & u_{n-2} & u_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\text{tr } L = u_{n-1} = 0$.

Отображение $\phi \mapsto (\phi, \phi', \dots, \phi^{(n-1)})^t$ в действительности не каноническое: можно заменить $\phi^{(k)}$ на линейную комбинацию $\phi^{(k)}$ и производных функции ϕ меньшего порядка. Таким образом, с описанием операторов высокого порядка естественно связана калибровочная группа, состоящая из унитарных верхних треугольных матриц (с функциональными коэффициентами). Эта группа свободно действует на множестве потенциалов вида

$$L = \begin{pmatrix} * & -1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & * & \dots & * & -1 \\ * & * & \dots & * & * \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Множество фробениусовых матриц вида (30) задает (неканоническое) сечение множества орбит калибровочного действия²⁾. Таким образом, пространство скалярных дифференциальных операторов n -го порядка можно отождествить с факторпространством по действию унитарной калибровочной группы; пространство фробениусовых матриц вида (30) служит моделью этого факторпространства.

Как заметили Дринфельд и Соколов, такое описание дифференциальных операторов n -го порядка согласовано с гамильтоновой редукцией. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли $sl(n)$ со стандартным скалярным произведением $\langle X, Y \rangle = \text{tr } XY$. Пусть $\mathfrak{n}_{\pm}$ – ее нильпотентные подалгебры верхних (нижних) треугольных матриц. Пространства $\mathfrak{n}_{+}$ и $\mathfrak{n}_{-}$ двойственны друг другу относительно скалярного произведения, так что $\mathfrak{n}_{+} \simeq \mathfrak{n}_{-}^*$.

Напомним, что в пространстве матричных дифференциальных операторов первого порядка задана естественная скобка Пуассона – скобка Швингера (6). Действие унитарной группы калибровочных преобразований $C^{\infty}(\mathbb{R}, N_{-})$ гамильтоново: связанное с ним отображение моментов

$$\mu: C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathfrak{g}) \rightarrow C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathfrak{n}_{-})^* \simeq C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathfrak{n}_{+})$$

представляет собой “стирающее” отображение, которое заменяет нулями все матричные элементы на диагоналях с неположительными номерами и не меняет элементы,

²⁾Для постоянных матриц это утверждение эквивалентно теореме Фробениуса о канонической форме матриц; в калибровочном случае доказательство теоремы Фробениуса (индукцией по номеру диагонали начиная с первой побочной диагонали, составленной из единиц) практически не меняется: достаточно заметить, что член с производными в калибровочном преобразовании является “слабым”: при построении следующего приближения используются только производные предыдущих приближений.

стоящие выше главной диагонали матрицы. Множество $\mathcal{M}_f$ потенциалов вида (31) – поверхность уровня отображения μ , т. е. $\mathcal{M}_f = \mu^{-1}(f)$, где

$$f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

– стандартная жорданова матрица (главный нильпотентный элемент в $\mathfrak{g}$), рассматриваемая как элемент двойственного пространства:

$$f \in \mathfrak{n}_-^* \simeq \mathfrak{n}_+ \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{n}_+) \simeq C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{n}_-)^*.$$

Заметим, что матрица $f \in \mathfrak{n}_- \simeq \mathfrak{n}_+^*$ задает характер алгебры Ли $\mathfrak{n}_-$. Это обстоятельство эквивалентно важному техническому свойству семейства “связей”, т. е. линейных уравнений, задающих поверхность уровня (31): они являются связями первого рода по Дираку – их скобки Пуассона обращаются в ноль на поверхности связей. В силу этого поверхность уровня $\mathcal{M}_f$ инвариантна относительно действия калибровочной группы $C^\infty(\mathbb{R}, N_-)$, и факторпространство по этому действию канонически отождествляется с приведенным фазовым пространством, полученным гамильтоновой редукцией (над точкой f). При $n = 2$ приведенная пуассонова структура совпадает со скобкой Ли–Пуассона алгебры Вирасоро, при $n > 2$ это так называемая классическая W-алгебра.

Перейдем теперь к разностному случаю. В полной аналогии с (30) разностное уравнение n -го порядка

$$\tau^n \phi + u_{n-1} \tau^{n-1} \cdot \phi + u_{n-2} \tau^{n-2} \cdot \phi + \dots + u_1 \tau \cdot \phi + \phi = 0 \quad (33)$$

можно записать как матричное разностное уравнение первого порядка $\tau\psi + L\psi = 0$, где $\psi = (\phi, \phi', \dots, \phi^{(n-1)})^t$ и L – фробениусова матрица вида (30). В разностном случае на матрицу L естественно наложить условие нормировки $\det L = 1$ (вместо условия $\text{tr } L = 0$ в дифференциальном случае); при этом условии имеем $u_0 = 1$. Данная нормировка приводит к существенному отличию от дифференциального случая: матрица L допускает каноническую факторизацию $L = Us$, где

$$s = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

а U – унипотентная матрица с одной нетривиальной строкой,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ u_1 & u_2 & \dots & u_{n-1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

В отличие от жордановой матрицы f в (32) матрица s обратима и полупроста; в действительности это *матрица Коксетера*, другими словами, сопряжение с помощью s индуцирует внешний автоморфизм стандартной картановской подгруппы $H \subset SL(n)$ (состоящей из диагональных матриц с определителем 1), совпадающий с произведением всех простых отражений. Унипотентная группа $N_0 \subset N_-$ однострочных матриц вида (35) абелева и порождена корневыми векторами, отвечающими отрицательным корням алгебры $sl(n)$, которые меняют знак при преобразовании Коксетера.

Как и в дифференциальном случае, естественная калибровочная группа N_- , связанная с разностными уравнениями порядка n , состоит из функций со значениями в унипотентной группе $N_- \subset SL(n)$. Множество потенциалов, калибровочно-эквивалентных потенциалам вида $L = Us$, снова имеет вид (31). Нетрудно доказать, что действие унипотентной калибровочной группы на этом множестве свободно и матрицы вида $L = Us$, $U \in N_0$, образуют его глобальное сечение.

Перейдем теперь к построению пуассоновой теории разностных уравнений. Так как калибровочное действие в разностном случае не гамильтоново, необходимо пуассоново обобщение теории редукции. Пусть G – пуассонова группа и M – пуассоново G -многообразие. Предположим, что скобка на M G -ковариантна. В этом случае подпространство G -инвариантных функций на M является подалгеброй Ли относительно скобки Пуассона. Если факторпространство M/G имеет структуру гладкого многообразия, то мы можем отождествить пространство $C^\infty(M/G)$ с пространством G -инвариантов $C^\infty(M)^G$, таким образом, M/G наследует структуру пуассонова подмногообразия.

В приложениях часто нужно рассматривать редукцию относительно различных подгрупп пуассоновой группы. Будем говорить, что подгруппа $H \subset G$ *допустима*, если подпространство H -инвариантов в $C^\infty(M)$ есть подалгебра Ли по скобке Пуассона. Простой критерий допустимости дается следующей теоремой (напомним, что двойственное пространство к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ пуассоновой группы G также имеет структуру алгебры Ли, причем пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ есть биалгебра Ли).

ТЕОРЕМА 6.1. *Предположим, что аннулятор алгебры Ли $\mathfrak{h}$ связной подгруппы Ли $H \subset G$ пуассоновой группы Ли,*

$$\mathfrak{h}^\perp = \{\xi \in \mathfrak{g}^* : \langle \xi, X \rangle = 0 \text{ для всех } X \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{g}^*,$$

есть подалгебра Ли относительно двойственной скобки в $\mathfrak{g}^$. Тогда подгруппа H допустима относительно любого пуассонова действия $G \times M \rightarrow M$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Достаточное условие в теореме 6.1 в действительности близко к необходимому. Для $\phi \in C^\infty(M)$, $x \in M$ обозначим через $\xi_\phi(x) \in \mathfrak{g}^*$ ковектор, определяемый условием

$$\langle \xi_\phi(x), X \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(e^{tX} \cdot x), \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Ясно, что если функция ϕ на M H -инвариантна, то $\xi_\phi(x) \in \mathfrak{h}^\perp$. Будем говорить, что действие подгруппы H на многообразии M *серьезно*, если ковекторы $\xi_\phi(x)$, $\phi \in C^\infty(M)$, порождают все пространство $\mathfrak{h}^\perp$. Для серьезных действий условие теоремы 6.1 не только достаточно, но и необходимо.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Подгруппа $H \subset G$ является пуассоновой, если $H \subset G$ – пуассоновно подмногообразие и H – пуассонова группа относительно сужения пуассоновой структуры группы G на H . Связная подгруппа $H \subset G$ является пуассоновой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}^\perp$ – идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}^*$. Таким образом, пуассоновы подгруппы группы G допустимы. Однако условие допустимости значительно более слабое.

Чтобы построить корректную пуассонову структуру в пространстве разностных операторов n -го порядка, нужно прежде всего выбрать пуассонову структуру на “большой” калибровочной группе так, чтобы ее подгруппа, состоящая из функций со значениями в $N_- \subset SL(n)$, была допустимой. Пусть

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+ \quad (36)$$

есть стандартное треугольное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g} = sl(n)$. Обозначим через $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{n}_+$ алгебры Ли функций со значениями в $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{n}_+$ соответственно (выбор алгебры функций соответствует одному из трех основных примеров, описанных в разделе 3). Обозначим через P_+ , P_- , P_0 проекторы на $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{h}$ параллельно дополнению в разложении (36). Пусть $\mathbf{P}_+$, $\mathbf{P}_-$, $\mathbf{P}_0$ – соответствующие проекторы, действующие поточечно в пространстве функций $\mathfrak{g}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Подгруппа N_- калибровочной группы является допустимой тогда и только тогда, когда r -матрица $R \in \text{End } \mathfrak{g}$ согласована с треугольным разложением, т. е. имеет вид*

$$R = \mathbf{P}_+ - \mathbf{P}_- + \rho \circ \mathbf{P}_0, \quad (37)$$

где $\rho \in \text{End } \mathfrak{h}$ – кососимметричный линейный оператор.

Начиная с работы Белафина и Дринфельда [9] хорошо известно, что имеется остаточная свобода в определении $R \in \text{End } \mathfrak{g}$, связанная с возможностью выбора оператора $\rho \in \text{End } \mathfrak{h}$, действующего на картановскую компоненту матрицы³⁾. Эта свобода играет решающую роль при выборе правильной пуассоновой структуры. Ключевое условие при этом выборе связано со свойствами связей, которые налагаются для определения матрицы, отвечающей разностному оператору. Эти связи и в дифференциальном, и в разностном случае задаются формулой (31), однако их свойства оказываются резко различными.

В обоих случаях мы фиксируем верхнюю треугольную часть матрицы, причем должны быть равны нулю все матричные элементы, кроме лежащих на первой побочной диагонали: эти элементы равны -1 . Точная характеристика поверхности уровня связей $\mathcal{M}_s \subset \mathcal{C}$ в разностном случае, не зависящая от матричной реализации, следующая: $\mathcal{M}_s$ совпадает с двойным смежным классом элемента Коксетера, $\mathcal{M}_s = N_- s N_-$. Таким образом, поверхность $\mathcal{M}_s$ является аффинным алгебраическим многообразием. Как мы уже говорили, калибровочное действие группы N_- на $\mathcal{M}_s$ свободно и допускает каноническое сечение N_{0s} . Таким образом, факторпространство $\mathcal{M}_s / N_-$ канонически изоморфно пространству разностных операторов.

³⁾Следует, впрочем, заметить, что r -матрицы вида (37) не входят в классификацию Белафина–Дринфельда: в работе [9] рассматривались только r -матрицы, ядро которых есть рациональная функция (с особенностями). Ядро (37) имеет сингулярность типа дельта-функции.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_s & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathcal{M}_s/\mathbb{N}_- & \xrightarrow{i} & \mathcal{C}/\mathbb{N}_- \end{array},$$

горизонтальные стрелки в которой – это естественные включения, а вертикальные – канонические проекции. Так как подгруппа $\mathbb{N}_- \subset \mathbb{G}$ допустимая, проекция $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathbb{N}_-$ – пуассоново отображение. Естественно потребовать, чтобы включение i также было пуассоновым; в этом случае пространство разностных операторов наследует пуассонову структуру “большого” приведенного пространства $\mathcal{C}/\mathbb{N}_-$. Это требование выполнено в том и только в том случае, когда связи, задающие подмногообразие $\mathcal{M}_s$, суть связи первого рода по Дираку, т.е. порождаемые ими гамильтоновы векторные поля касательны к поверхности $\mathcal{M}_s \subset \mathcal{C}$.

В дифференциальном случае наложение связей эквивалентно фиксации поверхности уровня $\mathcal{M}_f$ отображения момента; при этом связи автоматически оказываются связями первого рода в силу того, что жорданова матрица f – характеристическая алгебры. В разностном случае, так как подгруппа $\mathbb{N}_-$ является не пуассоновой, а всего лишь допустимой, аналог отображения момента определить не удастся⁴⁾. Требование, чтобы связи, задающие $\mathcal{M}_s$, были связями первого рода, оказывается неожиданно нетривиальным. Если пуассонова структура в пространстве $\mathcal{C}$ разностных связностей выбрана с помощью r -матрицы вида (37), то связи, задающие подмногообразие $\mathcal{M}_s$, вообще говоря, будут связями второго рода. Это верно, в частности, для простейшей (“стандартной”) r -матрицы

$$R = \mathbf{P}_+ - \mathbf{P}_-,$$

для которой оператор $\rho \in \text{End } \mathfrak{h}$ равен нулю. В таком случае описание пространства разностных операторов как факторпространства по действию калибровочной группы не согласовано с выбранной пуассоновой структурой – факторпространство $\mathcal{M}_s/\mathbb{N}_-$ не будет пуассоновым подмногообразием в $\mathcal{C}/\mathbb{N}_-$. Однако эту трудность можно удачно преодолеть, правильно выбрав $\rho \in \text{End } \mathfrak{h}$. Основной результат состоит в следующем [5], [10]. Пусть $T_s \in \text{End } \mathfrak{h}$ – отражение Кокстера, т.е. внешний автоморфизм подалгебры Картана, индуцированный элементом Кокстера $s \in G$. Мы обозначим той же буквой его поточечное продолжение на $\mathfrak{h}$, $T_s(f)(x) = T_s(f(x))$.

ТЕОРЕМА 6.2. *Связи, задающие подмногообразие $\mathcal{M}_s$, являются связями первого рода по Дираку относительно скобки (12) в пространстве $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда*

$$\rho = (I + \tau \circ T_s^{-1})(I - \tau \circ T_s^{-1})^{-1}.$$

В частности, при $n = 2$ имеем $T_s = -I$ и $\rho = (I - \tau)(I + \tau)^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. “Пуассонова аномалия”, связанная с превращением связей первого рода в связи второго рода, в действительности связана с довольно глубокими

⁴⁾Для пуассоновых подгрупп можно определить неабелево отображение моментов со значениями в двойственной группе Пуассона–Ли, но для допустимых подгрупп это определение не работает.

свойствами квантовых деформаций полупростых алгебр Ли⁵⁾. Как известно, с невырожденными характеристиками нильпотентной подалгебры $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ связана важная теория модулей Уиттекера [11]; одно из ее применений связано с квантовой теорией (открытых) цепочек Тоды [12], [13]. При квантовой деформации нильпотентная подалгебра $U_q(\mathfrak{n}) \subset U_q(\mathfrak{g})$ (порожденная теми же каноническими образующими Серра–Шевалле и деформированными соотношениями Серра) не имеет нетривиальных характеров. Чтобы построить q -деформированную теорию модулей Уиттекера, нужно изменить алгебру $U_q(\mathfrak{g})$, дополнительно “скрутив” ее коммутационные соотношения с помощью элемента Коксетера. Эквивалентным образом (так как скрученная алгебра изоморфна исходной) нужно переопределить нильпотентную подалгебру $U_q(\mathfrak{n}) \subset U_q(\mathfrak{g})$, добавив “правильные” картановские множители к ее каноническим генераторам [14]. Это переопределение нильпотентной подалгебры позволяет построить также q -деформированную квантовую теорию цепочек Тоды.

При сделанном выборе R нетрудно вычислить в явном виде скобки Пуассона коэффициентов разностного оператора (33). Соответствующая пуассонова алгебра называется *деформированной W -алгеброй* (или, при $n = 2$, *деформированной алгеброй Вирасоро*). Мы выпишем явные формулы только для случая $n = 2$; общий случай рассматривается аналогично, но приводит к довольно громоздким выражениям. Технически удобно рассмотреть расширенную алгебру, порожденную коэффициентами факторизованного оператора

$$\tau^2 + u\tau + 1 = (\tau + v)(\tau + v^{-1}). \quad (38)$$

Имеем, очевидно, $u = v + (v^{-1})^\tau$. Отображение $v \mapsto v + (v^{-1})^\tau$ – разностный аналог преобразования Миуры. Основное упрощение в случае $n = 2$ связано с тем, что при этом оператор T_s скалярный, $T_s = -1$. В результате поправочный член в определении r -матрицы в q -разностном случае сводится к скалярной функции

$$\varphi\left(\frac{z}{z'}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - q^n}{1 + q^n} \left(\frac{z}{z'}\right)^n. \quad (39)$$

Заметим, что φ – эллиптическая функция; формула (39) в существенном совпадает с рядом Фурье эллиптической функции Якоби $\operatorname{dn}(q^{1/2}z/z')$. Скобки Пуассона для v удобнее всего записать в виде производящей функции:

$$\{v(z), v(w)\} = \varphi\left(\frac{w}{z}\right)v(z)v(w).$$

Выражая $u(z)$ через $v(z)$ с помощью q -преобразования Миуры, получаем

$$\{u(z), u(w)\} = \varphi\left(\frac{w}{z}\right)u(z)u(w) + \delta\left(\frac{wq}{z}\right) - \delta\left(\frac{w}{zq}\right),$$

где, как обычно,

$$\delta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n.$$

⁵⁾ Чтобы перейти от случая разностных операторов к базисному случаю конечномерных полупростых алгебр, нужно предположить, что автоморфизм τ – тождественное преобразование; при этом оператор ρ остается нетривиальным, он представляет собой преобразование Кэли отражения Коксетера.

В случае разностных уравнений второго порядка на прямой аналогичные вычисления приводят к сингулярному ядру

$$\varphi(x - x') = \text{v.p.} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tg} \frac{k}{2} e^{ik(x-x')} dk \right)$$

и к скобкам Пуассона

$$\begin{aligned} \{v(x), v(x')\} &= \varphi(x - x')v(x)v(x'), \\ \{u(x), u(x')\} &= \varphi(x - x')u(x)u(x') + \delta(x - x' - 1) - \delta(x - x' + 1). \end{aligned}$$

Для разностных операторов на решетке длины N оператор $1 + \tau$ обратим, если N нечетно; в этом случае ядро $\varphi(n - m)$ задается формулой

$$\varphi(n - m) = \begin{cases} 0, & n = m, \\ (-1)^{n-m}, & n \neq m. \end{cases}$$

Решеточное преобразование Миуры определяется как $u_n = v_n + v_{n+1}^{-1}$. В результате скобки Пуассона коэффициентов u_n, v_n оказываются сильно нелокальными:

$$\{v_n, v_m\} = \varphi_{n-m}v_nv_m, \quad \{u_n, u_m\} = \varphi_{n-m}u_nu_m + (\delta_{m+1,n} - \delta_{m,n+1}).$$

Эта нелокальность, очевидно, связана с нелокальностью оператора $(1 + \tau)^{-1}$. Если ввести “усредненные” переменные

$$\lambda_n = v_nv_{n+1}, \quad s_n = u_nu_{n+1} = \frac{(1 + \lambda_n)(1 + \lambda_{n+1})}{\lambda_{n+1}},$$

то для них получатся локальные скобки Пуассона (со взаимодействием “ближайших соседей”)

$$\begin{aligned} \{\lambda_m, \lambda_n\} &= (\delta_{m+1,n} - \delta_{m,n+1})\lambda_m\lambda_n, \\ \{s_m, s_n\} &= (\delta_{m+1,n} - \delta_{m,n+1})(s_m + s_n - s_ms_n) + \\ &\quad + s_ms_n(s_{m+1}^{-1}\delta_{m+2,n} - s_{n+1}^{-1}\delta_{m,n+2}). \end{aligned}$$

Подалгебра пуассоновой алгебры коэффициентов разностных операторов второго порядка на решетке, порожденная образующими s_n , – это в точности “решеточная алгебра Вирасоро”, введенная Фаддеевым и Тахтаджяном [3]. Мы вернемся к описанию разностной алгебры Вирасоро в последнем разделе, где образующие v, λ, s будут пониматься как инварианты различных подгрупп проективной группы $SL(2)$ (совпадающей для случая уравнений второго порядка с разностной группой Галуа).

7. РАЗНОСТНАЯ ТЕОРИЯ ДРИНФЕЛЬДА–СОКОЛОВА. II

Изучим теперь продолжение деформированной структуры Вирасоро на пространство волновых функций. Выше мы рассматривали фундаментальные решения разностных уравнений первого порядка $\psi^\tau = L\psi$, т. е. функции со значениями в группе G . Фундаментальная система решений скалярного разностного уравнения n -го порядка – это набор из n функций $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ со значениями в $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. С точностью до естественной эквивалентности этот набор задает точку в $\mathbb{CP}_{n-1}$. Чтобы

установить связь между этими описаниями, заметим, что калибровочная группа N_- действует на волновые функции левыми сдвигами, $n \cdot \psi(x) = n(x)\psi(x)$. Факторпространство $N_- \backslash G$ можно отождествить с пространством функций со значениями в *основном аффинном пространстве* $N_- \backslash G$. Подгруппа Картана $H \subset G$ нормализует N_- , поэтому определены естественное действие $H \times N_- \backslash G \rightarrow N_- \backslash G$ и соответствующее поточечное действие $\mathbb{H} \times N_- \backslash G \rightarrow N_- \backslash G$. Если $G = SL(2, \mathbb{C})$, основное аффинное пространство $N_- \backslash G$ совпадает с проколотой плоскостью $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, а факторпространство $HN_- \backslash G$ изоморфно проективному пространству $\mathbb{CP}_1$; пространство $\mathbb{H}N_- \backslash G$ является проективизацией пространства волновых функций уравнения второго порядка.

В общем случае, если потенциал разностного уравнения первого порядка имеет канонический вид $L = Us$, как в (34), (35), его волновая функция ψ имеет вид “матрицы Вандермонда”,

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1^\tau & \phi_2^\tau & \dots & \phi_n^\tau \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{\tau^{n-1}} & \phi_2^{\tau^{n-1}} & \dots & \phi_n^{\tau^{n-1}} \end{pmatrix},$$

и полностью определяется своей первой строкой. Множество $\mathbb{V} \subset \mathbb{W}$ матриц Вандермонда можно рассматривать как поверхность уровня связей в пространстве волновых функций. Это множество служит моделью приведенного фазового пространства; группа G постоянных матриц свободно действует на $\mathbb{V}$ правыми сдвигами, и $\mathbb{V}/G$ изоморфно приведенному пространству $\mathcal{M}_s/N_-$. Заметим, что для $\psi \in \mathbb{V}$ $\det \psi = 1$ совпадает с вронскианом фундаментальной системы решений, задаваемой первой строкой матрицы $\psi^{(6)}$.

Чтобы описать пуассонову структуру на приведенном фазовом пространстве, рассмотрим сначала, как ведет себя при левых сдвигах первая строка матрицы.

Пусть $H_0 \subset H \subset SL(n)$ – одномерная подгруппа, состоящая из вырожденных диагональных матриц $h = \text{diag}(t, \dots, t, s)$, $\det h = 1$. Пусть M'_0 – централизатор подгруппы H_0 в группе $G = SL(n)$ и M_0 – его максимальная полупростая подгруппа. Пусть $N_0 \subset N_-$ – унипотентная подгруппа, определенная в формуле (35). Подгруппа $P_0 = M_0 H_0 N_0 \subset G$ есть максимальная параболическая подгруппа группы G , содержащая стандартную борелевскую подгруппу $B = HN_-$.

Будем рассматривать $M_0 N_0 \backslash G$ как аффинное алгебраическое многообразие; его аффинное кольцо $A(M_0 N_0 \backslash G)$ порождено матричными элементами первой строки матрицы $g \in G$. Так как $M_0 N_0 \supset N_-$, это аффинное кольцо канонически вложено в аффинное кольцо $A(N_- \backslash G)$. Естественное “торическое” действие подгруппы Картана H в аффинном кольце $A(N_- \backslash G)$, индуцированное ее действием на основном аффинном пространстве $H \times N_- \backslash G \rightarrow N_- \backslash G$, оставляет подкольцо $A(M_0 N_0 \backslash G)$ инвариантным. Это действие сводится к действию подгруппы $H_0 \subset H$ ранга 1 масштабными преобразованиями. Факторпространство $M_0 H_0 N_0 \backslash G$ изоморфно проективному пространству $\mathbb{CP}_{n-1}$; соответствующее пространство функций со значениями в $M_0 H_0 N_0 \backslash G$ – это в точности проективизация пространства волновых функций

⁶⁾Детерминант матрицы централен относительно нередуцированных скобок Пуассона, однако он превращается во вронскиан только на поверхности связей, поэтому $w(\psi) = 1$ есть равенство, “слабое” в смысле Дирака.

разностного уравнения n -го порядка (ср. с работой [15], где рассматривается проективное описание дифференциальных уравнений n -го порядка).

Естественная проекция $p: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{M}_0 \mathbb{N}_0 \backslash \mathbb{G}$ сопоставляет матрице $\psi \in \mathbb{G}$ ее первую строку. Подсчет числа параметров показывает, что элементы матрицы ψ порождают кольцо функций на приведенном фазовом пространстве (которое мы отождествили с $\mathbb{V}$). Пуассонову структуру в пространстве волновых функций мы выберем следующим образом.

- Зададим левую r -матрицу как

$$l = R = \mathbf{P}_+ - \mathbf{P}_- + (I + \tau \circ T_s^{-1})(I - \tau \circ T_s^{-1})^{-1} \circ \mathbf{P}_0. \quad (40)$$

Эта r -матрица немного более общая, чем те, которые мы рассматривали в теореме 5.1, так как она содержит нелокальное слагаемое. Тем не менее пересчет скобок Пуассона для матрицы монодромии не вызывает трудностей. Получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Наделим группу G скобкой Пуассона*

$$\{f_1, f_2\}^l(M) = \frac{1}{2} \langle {}^0r(X_1), X_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle {}^0r(X'_1), X'_2 \rangle - \langle {}^0r_+(X_1), X'_2 \rangle - \langle {}^0r_-(X'_1), X_2 \rangle,$$

построенной по r -матрице

$${}^0r = P_+ - P_- + (I + T_s^{-1})(I - T_s^{-1})^{-1} P_0.$$

Тогда отображение

$$\mathbb{G} \rightarrow G: (L_n)_{n=1}^N \mapsto M = \bigwedge_{n=1}^N L_n$$

пуассоново. Калибровочное действие $M \mapsto g_N M g_N^{-1}$ группы $\mathbb{G} = G^\Gamma$ (которая наделена скобкой Складина, построенной с помощью 0r) на матрицу монодромии пуассоново.

- Теперь мы можем выбрать правую r -матрицу в виде регуляризованного оператора:

$$r = (I + \tau)(I - \tau)^{-1} + {}^0r, \quad (41)$$

где матрица 0r выбирается исходя из свойств матрицы монодромии.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае $G = SL(2)$ “поправочное слагаемое” в 0r исчезает; в общем случае поправка в точности соответствует модифицированному определению квантованной алгебры $U_q(\mathfrak{g})$, при котором ее максимальная нильпотентная подалгебра имеет нетривиальные характеры (ср. выше замечание 3 к теореме 6.2).

Нетрудно увидеть, что матричные элементы первой строки матрицы $\psi \in \mathbb{W}$ образуют квадратичную пуассонову алгебру. Как мы видели, эту пуассонову алгебру можно отождествить с координатным кольцом приведенного пуассонова многообразия. Вычисления оказываются особенно простыми в случае $G = SL(2)$. Заметим, что левые градиенты матричных элементов первой строки лежат в аннуляторе алгебры Ли группы $\mathbb{N}_-$, т. е. в борелевской подалгебре $\mathbf{b}_-$, а проективные комбинации лежат в аннуляторе $\mathbf{b}_-$, т. е. в нильпотентной подалгебре $\mathbf{n}_-$. В результате вклад

левой r -матрицы в скобку Пуассона проективных волновых функций оказывается равным нулю. Положим $\eta(x) = \phi_1(x)/\phi_2(x)$; правый градиент “вычисляющего” функционала $\psi \mapsto \eta(x)$ дается формулой

$$\nabla'_{\eta(x)}(y) = \begin{pmatrix} -\eta(y) & 1 \\ \eta^2(y) & \eta(y) \end{pmatrix} \delta(y-x).$$

Это выражение приводит к формуле для скобок Пуассона

$$\{\eta(x), \eta(x')\} = R(x-x')(\eta(x) - \eta(x'))^2 + \eta^2(x) - \eta^2(x'),$$

где $R(x-x')$ – регуляризованное ядро интегрального оператора (41) (обобщенная функция двух переменных). “Гладкое слагаемое” $\eta^2(x) - \eta^2(x')$ в этой формуле соответствует вкладу конечномерной r -матрицы 0r . В простейшем случае алгебры функций на решетке получаем

$$\{\eta(n), \eta(m)\} = \epsilon(n-m)(\eta(n) - \eta(m))^2 + \eta^2(n) - \eta^2(m).$$

В решеточном случае эта формула была выведена (из других соображений) Фаддеевым и Тахтаджяном [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В работе [2] при выводе скобок Пуассона для волновых функций возникло дополнительное ограничение на выбор “правой” r -матрицы, которое исключает естественные r -матрицы вида (23), (26), связанные с разностными уравнениями. Это ограничение связано с алгеброй скобок Пуассона для вронскиана. Дело в следующем: в работе [2] мы рассматривали левоинвариантные скобки, т. е. не учитывали вклад от левой r -матрицы. Это корректно в случае обычных exchange-скобок, которые действительно левоинвариантны, и не влияет на скобки проективных волновых функций, для которых, как мы только что видели, вклад от левой r -матрицы исчезает. При вычислениях с вронскианом вклад левой r -матрицы является существенным, и это позволяет снять ограничения, наложенные в статье [2].

8. ПРОЕКТИВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ГРУППА ГАЛУА

Разностная группа Галуа, связанная со вспомогательной линейной задачей, до сих пор оставалась на периферии проделанных вычислений. Основной вывод состоит в том, что регуляризованная скобка в пространстве волновых функций автоматически оказывается ковариантной относительно правого действия группы Галуа; естественная пуассонова структура на группе Галуа – это скобка Складина, соответствующая r -матрице 0r .

Рассмотрим теперь пуассонову редукцию по правому действию группы Галуа и ее подгрупп⁷⁾. Так как группа Галуа пуассонова, редукция возможна только относительно допустимых подгрупп. Ограничимся для простоты случаем разностных уравнений второго порядка, для которых группа Галуа есть $G = SL(2)$ со стандартной r -матрицей ${}^0r = P_+ - P_-$, порожденной треугольным разложением матриц. Полный список допустимых подгрупп в этом случае состоит из подгруппы Картана H диагональных матриц, двух противоположных подгрупп Бореля $B_{\pm}$ и унипотентных подгрупп $N_{\pm}$; к нему следует добавить еще центр $Z = \{I, -I\}$. Заметим,

⁷⁾ Язык дифференциальной теории Галуа в теории уравнения КдФ и его высших аналогов впервые предложил использовать Вильсон [16]; связь с пуассоновыми группами описана в нашей работе [2].

что для сопряженных подгрупп условие допустимости, вообще говоря, не выполнено (за исключением тривиальных случаев). В нашем случае роль дифференциальной алгебры играет аффинное кольцо $A(\mathbb{G})$ группы $\mathbb{G}$ (или его поле отношений), снабженное автоморфизмом τ . Приведенное кольцо (т. е. кольцо функций на приведенном фазовом пространстве) можно отождествить с кольцом $\mathbb{C}\langle\psi_1, \psi_2\rangle$, порожденным всеми сдвигами волновых функций уравнения второго порядка. Подкольцо инвариантов $\mathbb{C}\langle\psi_1, \psi_2\rangle^Z \subset \mathbb{C}\langle\psi_1, \psi_2\rangle$ порождено проективной комбинацией⁸⁾ волновых функций $\eta = \psi_1/\psi_2$. Инварианты пуассоновых подгрупп образуют естественную башню расширений

причем все подкольца инвариантов – пуассоновы подалгебры.

Как легко видеть, каждая подалгебра в этой башне в действительности порождена сдвигами одной образующей функции:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(\eta)^N &= \mathbb{C}(\theta), & \theta &= (\tau - I)\eta, \\ \mathbb{C}(\eta)^B &= \mathbb{C}(\lambda), & \lambda &= \frac{\eta^{\tau^2} - \eta^\tau}{\eta^\tau - \eta}, \\ \mathbb{C}(\eta)^H &= \mathbb{C}(\rho), & \rho &= \frac{\eta^\tau}{\eta}.\end{aligned}$$

Переменная λ связана соотношением $\lambda = vv^\tau$ с потенциалом v оператора второго порядка из факторизованной формулы (38).

Наконец, подкольцо проективных инвариантов $\mathbb{C}(\eta)^G$ порождено ангармоническим отношением

$$s = \frac{\eta^{\tau^2} - \eta}{\eta^\tau - \eta} \frac{\eta^{\tau^3} - \eta^\tau}{\eta^{\tau^3} - \eta^{\tau^2}}.$$

При этом образующая s связана с потенциалом u в операторе второго порядка соотношением $s = uu^\tau$. В отличие от s потенциал восстанавливается по η с помощью сложной нелокальной формулы.

В непрерывном пределе пуассонова структура для проективных волновых функций по-прежнему остается ковариантной (а не инвариантной) относительно действия

⁸⁾Пару линейно независимых решений уравнения второго порядка можно рассматривать как кривую в $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Ее проективизация есть кривая в $\mathbb{CP}(1)$; функция $\eta = \psi_1/\psi_2$ задает ее аффинную модель при $\psi_2 \neq 0$.

проективной группы. Скобка Пуассона для проективных волновых функций в этом пределе совпадает со скобкой, построенной Фаддеевым и Тахтаджяном [3] при изучении нулевых мод в уравнении Лиувилля:

$$\{\eta(x), \eta(y)\} = \epsilon(x - y)(\eta(x) - \eta(y))^2 + \eta^2(x) - \eta^2(y).$$

Формула для потенциала в непрерывном пределе также упрощается: в отличие от разностного случая, естественный проективный инвариант – производная Шварца $S(\eta)$ – совпадает с потенциалом в дифференциальном уравнении второго порядка (этот результат является классическим).

Наконец, замены переменных $\eta \mapsto \theta$, $\eta \mapsto \rho$, $\eta \mapsto \lambda$ превращаются в дифференциальные подстановки, связывающие различные уравнения типа КдФ; все эти дифференциальные подстановки автоматически являются пуассоновыми отображениями. Коммутативная диаграмма, образованная этими отображениями, выглядит следующим образом [2]:

Уравнение $\eta_t = S(\eta)\eta_x$ на вершине башни расширений – это так называемое уравнение Шварца–КдФ; стандартное уравнение КдФ находится на ее нижнем этаже. Все уравнения гамильтоновы относительно пуассоновых структур, определенных на каждом этаже, причем гамильтонианы получаются подъемом стандартного гамильтониана КдФ. Диаграмма сохраняет свой вид и в разностном случае, но разностные аналоги уравнений КдФ достаточно громоздки, и мы их не приводим.

Благодарности. Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00341).

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев, *Функц. анализ и его прил.*, **5:4** (1971), 18–27.
- [2] I. Marshall, M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Commun. Math. Phys.*, **284:2** (2008), 537–552.
- [3] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, “Liouville model on the lattice”, *Field Theory, Quantum Gravity and Strings*, Lecture Notes in Physics, **246**, eds. H. J. de Vega, N. Sánchez, 1986, 166–179.
- [4] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, *Докл. АН СССР*, **258:1** (1981), 11–16.
- [5] E. Frenkel, N. Reshetikhin, M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Commun. Math. Phys.*, **192:3** (1998), 605–629.

- [6] O. Babelon, *Phys. Lett. B*, **238**:2–4 (1990), 234–238.
- [7] M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **21**:6 (1985), 1237–1260.
- [8] P. Etingof, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, **1**:1 (1995), 1–9.
- [9] А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:3 (1982), 1–29.
- [10] M. A. Semenov-Tian-Shansky, A. V. Sevostyanov, *Commun. Math. Phys.*, **192**:3 (1998), 631–647.
- [11] B. Kostant, *Invent. Math.*, **48**:2 (1978), 101–184.
- [12] B. Kostant, “Quantization and representation theory”, *Representation Theory of Lie Groups* (Oxford, June 28–July 15, 1977), London Mathematical Society Lecture Note Series, **34**, ed. G. L. Luke, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979, 287–316.
- [13] M. A. Semenov-Tian-Shansky, “Quantization of open Toda lattices”, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, v. 16: *Dynamical Systems VII*, eds. V. I. Arnol’d, S. P. Novikov, Springer, 1994, 226–259.
- [14] A. V. Sevostyanov, *Commun. Math. Phys.*, **204** (1999), 1–16.
- [15] V. Ovsienko, S. Tabachnikov, *Projective differential geometry old and new: from Schwarzian derivative to cohomology of diffeomorphism group.*, Cambridge Tracts in Math., **165**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [16] G. Wilson, *Phys. Lett. A*, **132** (1988), 445–450.

Поступила в редакцию 11.06.2014