Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Р. Клаудер, Нетривиальное квантование модели ϕ_n^4
при $n \geq 2$, *ТМФ*, 2015, том 182, номер 1, 103–111

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8731>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 07:36:16

© 2015 г.

Д. Р. Клаудер*

НЕТРИВИАЛЬНОЕ КВАНТОВАНИЕ МОДЕЛИ ϕ_n^4 ПРИ $n \geq 2$

Традиционное квантование ковариантных ϕ_n^4 -моделей скалярного поля является тривиальным для пространства-времени размерности $n \geq 5$, и это же может оказаться верным для $n = 4$. Однако альтернативный контрчлен порядка $O(\hbar)$ приводит к нетривиальным результатам для всех $n \geq 4$, а также дает иное квантование для $n = 2, 3$. Найден контрчлен, который обеспечивает эти свойства настолько просто и непосредственно, насколько это возможно. Тот же контрчлен также дает решение для таких моделей, как ϕ_n^p при любом четном p , в том числе для моделей с $p > 2n/(n - 2)$, которые традиционно рассматриваются как неперенормируемые.

Ключевые слова: нетривиальность фи четвертой степени, преодоление неперенормируемости, смешанная модель.

DOI: 10.4213/tmf8731

1. ВВЕДЕНИЕ

Традиционное каноническое квантование ϕ_n^4 -моделей скалярного поля оказывается тривиальным для пространства-времени размерности $n \geq 5$ [1], [2], возможно, тривиальным для $n = 4$ [3], [4] и нетривиальным для $n = 2, 3$ [5]. Более общим образом, ϕ_n^p -модели при $p > 2n/(n - 2)$ являются неперенормируемыми и некорректно определенными в рамках традиционного анализа методами теории возмущений [6]. Обычное квантование является неоднозначным с точностью до членов порядка $O(\hbar)$, которые обычно “определяются из эксперимента”. Например, гармонический осциллятор обычно имеет положительную энергию нулевых колебаний, за исключением случая, когда это одна из степеней свободы свободного поля. Цель настоящей работы – найти нетрадиционный контрчлен порядка $O(\hbar)$ для моделей скалярного поля. Мы описываем схему нетривиального квантования ϕ_n^4 -моделей для всех $n \geq 2$, включая альтернативное квантование для $n = 2, 3$.

Рассматриваемое семейство моделей имеет классический (хотя и с мнимым временем) функционал действия

$$I(\phi) = \int \left\{ \frac{1}{2}[(\nabla\phi)^2(x) + m_0^2\phi^2(x)] + g_0\phi^4(x) \right\} d^n x. \quad (1)$$

*Department of Physics and Department of Mathematics, University of Florida, Gainesville, FL, USA. E-mail: klauder@phys.ufl.edu

В свою очередь можно рассматривать квантование этого поля с помощью формального функционального интеграла

$$S(h) \equiv \mathcal{M} \int \exp \left\{ \frac{1}{h} \int h(x) \phi(x) d^n x - \frac{1}{h} \left(I(\phi) + \frac{F(\phi, h)}{2} \right) \right\} \prod_x d\phi(x), \quad (2)$$

где $\mathcal{M}$ выбрано так, что $S(0) = 1$, $h(x)$ – функция источника, а $F(\phi, h)$ представляет собой пока еще не определенный контрчлен, требующийся для контроля расходимостей, который должен обращаться в нуль при $h \rightarrow 0$, чтобы формально возникал должный классический предел. Традиционно разложение по теории возмущений вплоть до члена четвертого порядка по взаимодействию определяет выбор контрчлена для сокращения всех встречающихся расходимостей. Здесь же, напротив, мы попытаемся найти другой контрчлен, делающий возможным разложение по теории возмущений без всяких расходимостей. На первый взгляд кажется, что мы ищем иголку в стоге сена; к счастью, в нашем случае мы в состоянии найти эту “иголку”!

Хотя формальный функциональный интеграл (2) фактически не определен, ему можно придать смысл, если ввести регуляризацию на решетке, когда пространственно-временной континуум заменяется на периодическую гиперкубическую решетку с шагом $a > 0$ и с $L < \infty$ узлами вдоль каждой оси. Сами узлы нумерованы наборами целых чисел $k = \{k_0, k_1, \dots, k_s\} \in \mathbb{Z}^n$, $n = s + 1$, а h_k и ϕ_k – значения полей в k -м узле решетки; в частности, k_0 – евклидово время. Такая регуляризация дает L^n -мерный интеграл

$$\begin{aligned} S_{\text{latt}}(h) &\equiv M \int \exp \left\{ \frac{1}{h} Z^{-1/2} \sum_k h_k \phi_k a^n \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2h} \left(\sum_{k, k^*} (\phi_{k^*} - \phi_k)^2 a^{n-2} + m_0^2 \sum_k \phi_k^2 a^n \right) \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{h} g_0 \sum_k \phi_k^4 a^n - \frac{1}{2h} \sum_k F_k(\phi, h) a^n \right\} \prod_k d\phi_k \equiv \\ &\equiv \left\langle \exp \left\{ \frac{1}{h} Z^{-1/2} \sum_k h_k \phi_k a^n \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь мы ввели константу Z перенормировки напряженности поля. Каждый из множителей Z , m_0^2 и g_0 трактуется как голый параметр, неявно зависящий от шага решетки a ; k^* обозначает один из n ближайших соседей для узла k в положительном направлении, а M выбирается так, что $S_{\text{latt}}(0) = 1$. Контрчлен $F_k(\phi, h)$ также неявно зависит от a , а обозначение $F_k(\phi, h)$ показывает, что формальный локально порожденный контрчлен $F(\phi, h)$ может, если решетка регуляризована, зависеть от большого, но конечного числа значений поля, расположенных внутри небольшой конечной области решетки вокруг узла k .

Таким образом, мы приходим к контрчлену

$$\sum_k F_k(\phi, h) a^n \equiv \sum_{k_0} a [h^2 \Sigma'_k \mathcal{F}_k(\phi) a^s],$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(\phi) \equiv & \frac{1}{4}(1 - 2ba^s)^2 a^{-2s} \left(\sum'_t \frac{J_{t,k} \phi_k}{\sum'_m J_{t,m} \phi_m^2} \right)^2 - \\ & - \frac{1}{2}(1 - 2ba^s) a^{-2s} \sum'_t \frac{J_{t,k}}{\sum'_m J_{t,m} \phi_m^2} + (1 - 2ba^s) a^{-2s} \sum'_t \frac{J_{t,k}^2 \phi_k^2}{\left(\sum'_m J_{t,m} \phi_m^2 \right)^2}. \quad (4) \end{aligned}$$

Сумма со штрихом здесь и далее обозначает сумму по одному пространственному срезу, все узлы которого имеют одинаковое евклидово время k_0 . В соотношении (4) b – фиксированный положительный параметр размерности (длина) $^{-s}$, а $J_{k,l} = 1/(2s + 1)$, если $l = k$ или l – один из $2s$ ближайших пространственных соседей узла k ; во всех других случаях $J_{k,l} = 0$. Хотя $\mathcal{F}_k(\phi)$ зависит не только от ϕ_k , он является локальным потенциалом в формальном континуальном пределе.

На первый взгляд успех такого контрчлена представляется невозможным, поскольку он является значительным для малых значений поля, тогда как обычные сложности, связанные с расходимостью, возникают из-за больших значений поля. Ранее даже было высказано предположение, что такой член должен обращаться в нуль, если пользоваться ренормализационной группой. Если читатель поддерживает такую точку зрения, то настоящая работа адресована именно ему, потому что этот контрчлен справляется с возложенными на него обязанностями!

Хотя большинство наших рассуждений является достаточно непосредственными, обнаружение специального контрчлена будет непрямым. Для начала заметим, что если $\langle [\sum_k g_0 \phi_k^4 a^n]^p \rangle$ обозначает среднее значение по пространственно-временной решетке, а $\langle [\sum'_k g_0 \phi_k^4 a^s]^p \rangle$ – среднее значение по пространственной решетке в фиксированный момент евклидова времени k_0 , то

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \left[\sum_k g_0 \phi_k^4 a^n \right]^p \right\rangle \right| &= \sum_{k_0(1)} \dots \sum_{k_0(p)} a^p \left| \left\langle \left\{ \left[\sum'_{k(1)} g_0 \phi_{k(1)}^4 a^s \right] \dots \left[\sum'_{k(p)} g_0 \phi_{k(p)}^4 a^s \right] \right\} \right\rangle \right| \leq \\ &\leq \sum_{k_0(1)} \dots \sum_{k_0(p)} a^p \left| \left\langle \left[\sum'_{k(1)} g_0 \phi_{k(1)}^4 a^s \right]^p \right\rangle \dots \left\langle \left[\sum'_{k(p)} g_0 \phi_{k(p)}^4 a^s \right]^p \right\rangle \right|^{1/p} \quad (5) \end{aligned}$$

на основании неравенств Гёльдера. Отсюда следует, что если пространственное среднее конечно, то и пространственно-временное среднее конечно; ясно, что если пространственный член расходится, то и пространственно-временной член расходится.

Теперь напомним, что основное состояние системы определяет оператор Гамильтона, который, в свою очередь, определяет решеточное действие, включая соответствующий контрчлен. Таким образом, чтобы продолжать поиск нового контрчлена, мы должны сначала сконцентрироваться на исследовании волновой функции основного состояния.

2. НАХОЖДЕНИЕ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО КОНТРЧЛЕНА

Вернемся к решеточно-регуляризованному функциональному интегралу (3). Чтобы данное математическое выражение было физически актуальным после поворота Вика к вещественному времени, наложим требование положительности отраже-

ния [5], которое выполнено, если контрчлен удовлетворяет условию

$$\sum_k F_k(\phi, \hbar) \equiv \sum_{k_0} \left(\sum'_k F_k(\phi, \hbar) \right),$$

где за скобками стоит сумма по решетке евклидова времени. Таким образом, каждое слагаемое $\sum'_k F_k(\phi, \hbar)$ внешней суммы содержит поля, которые имеют одно и то же значение времени k_0 и могут содержать несколько других полей в узлах, ближайших к k , только в пространственных направлениях.

Решеточная формулировка (3) есть функциональное представление операторного выражения

$$S_{\text{latt}}(h) = N \text{tr} \left(\mathbb{T} \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \sum_{k_0} \left[Z^{-1/2} \sum'_k h_k \hat{\phi}_k a^n - \mathcal{H} a \right] \right\} \right),$$

где $N = \{\text{tr}(e^{-(La)\mathcal{H}/\hbar})^{-1} - \text{нормировочный множитель}$, $\mathbb{T}$ означает временное упорядочивание, $\hat{\phi}_k$ – полевой оператор, а $\mathcal{H}$ – оператор Гамильтона. Если функция h ограничена на один пространственный срез, например $h_k \equiv a^{-1} \delta_{k_0,0} f_k$, то это выражение сводится к формуле

$$S'_{\text{latt}}(f) = N \text{tr} \left(\exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} (L-1) \mathcal{H} a \right\} \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \left[Z^{-1/2} \sum'_k f_k \hat{\phi}_k a^s - \mathcal{H} a \right] \right\} \right),$$

которая при больших La приобретает вид

$$S'_{\text{latt}}(f) = \int \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} Z^{-1/2} \sum'_k f_k \phi_k a^s \right\} \Psi_0(\phi)^2 \prod'_k d\phi_k, \quad (6)$$

где произведение со штрихом обозначает произведение по одному пространственному срезу при фиксированном k_0 , а $\Psi_0(\phi)$ – единственная нормированная волновая функция основного состояния оператора Гамильтона $\mathcal{H}$ для задачи в представлении Шредингера, $\mathcal{H}\Psi_0(\phi) = 0$. Сделаем замену $N' \equiv L^s$ переменных интегрирования $\{\phi_k\}$ на “гиперсферические координаты” $\{\kappa, \eta_k\}$, которые определяются как

$$\phi_k \equiv \kappa \eta_k, \quad \kappa^2 \equiv \sum'_k \phi_k^2, \quad \sum'_k \eta_k^2 \equiv 1,$$

где $0 \leq \kappa < \infty$ и $-1 \leq \eta_k \leq 1$. Тогда равенство (6) принимает вид

$$\begin{aligned} S'_{\text{latt}}(h) &= \int \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} Z^{-1/2} \kappa \sum'_k h_k \eta_k a^s \right\} \Psi_0(\kappa \eta)^2 \kappa^{N'-1} d\kappa \times \\ &\times 2\delta \left(1 - \sum'_k \eta_k^2 \right) \prod'_k d\eta_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Определим континуальный предел как $a \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$ при условии, что La велико и фиксировано. В континуальном пределе $N' = L^s \rightarrow \infty$, и в разложении по теории возмущений, вообще говоря, будут возникать расхожимости, потому что если меняются такие параметры, как m_0 или g_0 , то меры в (7) в континуальном пределе

становятся взаимно сингулярными из-за подавляющего влияния величины N' в множителе меры $\kappa^{N'-1}$. Однако этого можно избежать, если распределение в основном состоянии $\Psi_0^2(\phi)$ содержит множитель, который служит для того, чтобы сделать меру более “мягкой”, т. е. эффективно изменить $\kappa^{N'-1}$ на κ^{R-1} , где $R > 0$ фиксировано и конечно. Конкретно, мы хотим, чтобы волновая функция основного состояния имела вид

$$\Psi_0(\phi) = M' e^{-U(\phi, \hbar, a)/2} \kappa^{-(N'-R)/2},$$

где приведенное выше выражение указывает на качественное поведение по κ , которое эффективно “смягчает” меру, или, в явном виде,

$$\begin{aligned} \Psi_0(\phi) &= M' e^{-U(\kappa\eta, \hbar, a)/2} \kappa^{-(N'-R)/2} \prod_k \left(\sum_l' J_{k,l} \eta_l^2 \right)^{-(1-R/N')/4} = \\ &= M' e^{-U(\phi, \hbar, a)/2} \prod_k \left(\sum_l' J_{k,l} \phi_l^2 \right)^{-(1-R/N')/4}, \end{aligned}$$

где показана конкретная функциональная зависимость от полевых переменных, что дает нам искомый множитель. Здесь мы выбрали постоянные коэффициенты $J_{k,l} \equiv 1/(2s+1)$ для $l = k$ и для l , равного каждому из $2s$ ближайших пространственных соседей к узлу k ; во всех других случаях $J_{k,l} \equiv 0$. Таким образом, $\sum_l' J_{k,l} \phi_l^2$ дает пространственное среднее значений квадрата поля в узле и вблизи узла k . Как часть распределения в основном состоянии этот множитель является доминантным при малых значениях поля, и его вид не менее фундаментален, чем остальная часть распределения в основном состоянии, которая определяется градиентным и массовым членом и членами взаимодействия, фиксирующими поведение при больших значениях поля.

Множитель R/N' появляется в локальном выражении множителя для малых значений поля, и по физическим соображениям он не должен зависеть ни от числа узлов решетки в пространственном срезе, ни от конкретных упомянутых выше параметров, определяющих модель. Поэтому можно предположить, что $R \propto N'$, таким образом, мы считаем, что

$$R \equiv 2ba^s N',$$

где $b > 0$ – фиксированный множитель с размерностью (длина) $^{-s}$, чтобы R был безразмерным. Хотя распределение даже в основном состоянии расходится, если некоторые из множителей η_k одновременно равны нулю, все они представляют собой интегрируемые особенности, поскольку если любое подмножество множества переменных $\{\eta_k\}$ состоит из нулей, то всегда имеется меньшее число нулевых множителей, которые возникают из особенностей благодаря процедуре локального усреднения. Именно этот факт побудил нас провести процедуру усреднения.

Таким образом, имеются следующие преимущества “смягчения” меры: если разложение некоторого члена в теории возмущений по степеням $U(\phi, \hbar, a)$ проведено после замены $\kappa^{N'-1}$ на κ^{R-1} , то различные меры являются эквивалентными, а все члены в разложении по теории возмущений конечны. Поскольку пространственные члены в разложении по теории возмущений являются конечными, в силу неравенства (5) конечными будут и соответствующие пространственно-временные члены.

Чтобы получить искомый функциональный вид волновой функции основного состояния при малых значениях поля, выберем наш контрчлен $F_k(\phi, \hbar)$ так, чтобы “встроить” это свойство в гамильтониан. При этом контрчлен представляет собой специальный потенциальный член вида

$$\frac{1}{2} \sum'_k F_k(\phi, \hbar) a^s \equiv \frac{1}{2} \hbar^2 \sum'_k \mathcal{F}_k(\phi) a^s,$$

где

$$T(\phi) \equiv \prod_r \left(\sum'_l J_{r,l} \phi_l^2 \right)^{-(1-2ba^s)/4}$$

и

$$\mathcal{F}_k(\phi) \equiv \frac{a^{-2s}}{T(\phi)} \frac{\partial^2 T(\phi)}{\partial \phi_k^2},$$

что приводит к выражению (4).

Более общим образом, полный нелинейный оператор Гамильтона, включающий искомый контрчлен, определяется как

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{1}{2} \hbar^2 a^{-2s} \sum'_k \frac{\partial}{\partial \phi_k^2} a^s + \frac{1}{2} \sum'_{k,k^*} (\phi_{k^*} - \phi_k)^2 a^{s-2} + \\ & + \frac{1}{2} m_0^2 \sum'_k \phi_k^2 a^s + g_0 \sum'_k \phi_k^4 a^s + \frac{1}{2} \hbar^2 \sum'_k \mathcal{F}_k(\phi) a^s - E_0. \end{aligned} \quad (8)$$

В действительности это уравнение неявно определяет волновую функцию основного состояния $\Psi_0(\phi)$.

Ранее в работе [7] мы использовали несколько других аргументов с целью предложить данную альтернативную модель для нетривиального квантования скалярного поля. В настоящей работе приводятся простые доводы, что нетрадиционный контрчлен порядка $O(\hbar)$, добавленный к исходному наивному гамильтониану, дает всё, что нужно для достижения заслуживающих внимания результатов. В конце концов, традиционное квантование предполагает (даже когда используются излюбленные декартовы координаты), что подходящий оператор Гамильтона приобретает различные квантовые поправки, которые можно определить только экспериментально или исходя из математической согласованности. В двух словах, этого достаточно для обоснования нашего предложения.

Важно отметить, что к слагаемым гамильтониана не применяется нормального упорядочения. Вместо этого произведения локальных полевых операторов определяются с помощью операторного разложения [6]. Кроме того, отметим, что контрчлен $\hbar^2 \sum'_k \mathcal{F}_k(\phi)$ не зависит ни от каких параметров модели и, в частности, не зависит от g_0 . Это связано с тем, что контрчлен на самом деле является контрчленом для кинетической энергии. Это следует из того, что не только $\mathcal{H}\Psi_0(\phi) = 0$, но и $\mathcal{H}^q \Psi_0(\phi) = 0$ для всех целых $q \geq 2$. Несмотря на то что $[\sum'_k \partial^2 / \partial \phi_k^2] \Psi_0(\phi)$ может быть квадратично-интегрируемой функцией, $[\sum'_k \partial^2 / \partial \phi_k^2]^q \Psi_0(\phi)$ наверняка не будет квадратично-интегрируемой при достаточно больших q . Чтобы $\Psi_0(\phi)$ лежала в области определения оператора $\mathcal{H}^q$ при всех q , член с производными и контрчлен необходимо рассматривать вместе, откуда и вытекает наше утверждение, что контрчлен следует рассматривать как “перенормировку” кинетической энергии.

Напомним концепцию псевдосвободной теории [8], которая хорошо иллюстрируется моделью ангармонического осциллятора с классическим функционалом действия

$$A_g \equiv A_0 + gA_I = \int_0^T \left(\frac{1}{2}[\dot{x}^2(t) - x(t)^2] - gx^{-4}(t) \right) dt.$$

Ясно, что область определения $D(A_g)$ разрешенных путей $\{x(t)\}_0^T$ удовлетворяет свойству $D(A_g) = D(A_0) \cap D(A_I)$, откуда следует, что

$$\lim_{g \rightarrow 0} D(A_g) \equiv D(A'_0) \subset D(A_0).$$

Короче говоря, модель со взаимодействием связана непрерывным образом не со своей свободной теорией (A_0), а с псевдосвободной теорией (A'_0), которая имеет тот же формальный функционал действия, что и свободная теория, но строго меньшую область определения. Такое поведение сохраняется и в квантовой теории, поскольку при $g \rightarrow 0$ пропагатор для взаимодействующей модели непрерывным образом переходит не в свободный квантовый пропагатор, а в псевдосвободный квантовый пропагатор с другими собственными функциями и собственными значениями. Теперь покажем, что аналогичное поведение можно наблюдать в наших моделях скалярного поля.

Поскольку контрчлен не зависит от константы взаимодействия, он сохраняется даже при $g_0 \rightarrow 0$, а это означает, что при $g_0 \rightarrow 0$ взаимодействующая квантовая теория поля переходит не в обычную свободную квантовую теорию поля, а в псевдосвободную квантовую теорию поля. Чтобы установить это, сначала рассмотрим классический (евклидов) функционал действия (1). Если рассматривать отдельные компоненты этого выражения и считать, что $m_0 > 0$, то согласно мультипликативному неравенству [8], [9] имеем

$$\left\{ \int \phi^4(x) d^n x \right\}^{1/2} \leq \tilde{C} \int [(\nabla \phi)^2(x) + m_0^2 \phi^2(x)] d^n x, \quad (9)$$

где $\tilde{C} = (4/3)m_0^{(n-4)/2}$ при $n \leq 4$ (перенормируемые случаи) и $\tilde{C} = \infty$ при $n \geq 5$ (неперенормируемые случаи). В последнем случае это означает, что имеются поля $\phi(x)$, для которых интеграл в левой части неравенства расходится, в то время как интеграл в правой части является конечным; например, $\phi_{\text{sing}}(x) = |x|^{-\alpha} e^{-x^2}$ при $n/4 \leq \alpha < (n-2)/2$. Другими словами, для ϕ_n^4 -модели, в частности, имеются различные псевдосвободные и свободные классические теории при $n \geq 5$. Таким образом, при $n \geq 5$ логично предположить, что псевдосвободная квантовая теория отличается от свободной квантовой теории поля.

Важно, что выполнено аналогичное (9) неравенство

$$\left\{ \int \phi^p(x) d^n x \right\}^{2/p} \leq \tilde{C}' \int [(\nabla \phi)^2(x) + m_0^2 \phi^2(x)] d^n x, \quad (10)$$

где $\tilde{C}' = (4/3)m_0^{[(p-2)n/p-2]}$ при $p \leq 2n/(n-2)$ (перенормируемые случаи) и $\tilde{C}' = \infty$ при $p > 2n/(n-2)$ (неперенормируемые случаи) [8]. Поскольку наш выбор контрчлена не опирался на четвертую степень члена взаимодействия, заключаем, что в точности тот же контрчлен применим для любого взаимодействия вида $\int \phi^p(x) d^n x$, и это

также справедливо для суммы таких членов, если потенциал имеет более низкую границу.

Таким образом, рассмотренные в настоящей работе квантовые модели с нетрадиционным контрчленом порождают заслуживающих внимания кандидатов в тех квантовых теориях, которые обычно классифицируются как неперенормируемые, причем при анализе в рамках теории возмущений не возникает расходимостей, поскольку все соответствующие меры эквивалентны и взаимно несингулярны (обсуждение свойства свободы от расходимостей с точки зрения теории возмущений имеется в работе [7], где также определяется зависимость величин Z , m_0^2 и g_0 от параметров a и N'). Поскольку нетрадиционный контрчлен проявляет хорошие свойства в случае неперенормируемых моделей, естественно распространить такое хорошее поведение на традиционные перенормируемые модели, также используя для них нетрадиционный контрчлен.

Таким образом, мы подходим к тому, чтобы принять решеточный регуляризованный гамильтониан $\mathcal{H}$ (8) с контрчленом для всех размерностей пространства-времени $n \geq 2$. Разумеется, традиционное квантование для ϕ_n^4 -модели при $n = 2, 3$ по-прежнему полезно с точки зрения физических применений.

Кроме того, решеточный гамильтониан (8) определяет решеточное евклидово действие с нетрадиционным контрчленом, который в этом случае дается выражением

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k,k^*} (\phi_{k^*} - \phi_k)^2 a^{n-2} + \frac{1}{2} m_0^2 \sum_k \phi_k^2 a^n + g_0 \sum_k \phi_k^4 a^n + \frac{1}{2} \sum_k \hbar^2 \mathcal{F}_k(\phi) a^n, \quad (11)$$

где k^* пробегает все n ближайших соседей узла k в положительном направлении. Хотя решеточный вид контрчлена включает средние по значениям квадратичных полей в областях, соседствующих в пространстве с центральным узлом, оказывается, что континуальный предел контрчлена по своей природе является локальным, как отмечалось ранее. Примечательно, что предварительные исследования методом Монте-Карло, основанные на решеточном действии (11), свидетельствуют о нетривиальном поведении ϕ_n^4 -модели, демонстрирующей положительную перенормированную константу взаимодействия [10].

3. КОММЕНТАРИИ

Для ϕ_2^4 - и ϕ_3^4 -моделей имеются корректно определенные традиционные результаты, и тем не менее, имея в виду другие применения, мы предлагаем альтернативное квантование этих моделей. Нетрадиционный контрчлен (4) зависит от числа пространственных размерностей, но не зависит от степени p взаимодействия ϕ_n^p . Таким образом, этот контрчлен применим к “смешанным моделям”, таким как модели со взаимодействием $g_0 \phi_3^4 + g'_0 \phi_3^8$ или $g''_0 \phi_5^4 + g'''_0 \phi_5^8 + g''''_0 \phi_5^{138}$ и т. п., которые имеют разумные свойства, когда константы взаимодействия снова и снова включаются и выключаются в различном порядке. В отличие от традиционного подхода, в новой формулировке пертурбативные разложения не содержат расходимостей в окрестности псевдосвободной модели, после того как для локальных операторов введено операторное произведение. Хотя все члены разложения по теории возмущений являются конечными, их нельзя вычислить, используя диаграммы Фейнмана, поскольку обоснованность таких диаграмм опирается на функциональный интеграл для свободной

модели, имеющей гауссово распределение, а это не так для псевдосвободной модели. Для такого важного примера, как ϕ_4^4 -модель, традиционные методы приводят к перенормируемой теории, и тем не менее непертурбативные методы свидетельствуют о тривиальном (т. е. свободном) поведении. С другой стороны, можно ожидать, что наши процедуры для ϕ_4^4 -модели будут свободными от расходимостей и нетривиальными.

Посвящение. Мне приятно посвятить эту работу профессору Андрею Славнову по случаю его семидесятилетия. Андрей – выдающийся ученый, он также является моим давним другом и первоклассным коллегой. Для меня большая честь пожелать ему крепкого здоровья и творческих успехов.

Список литературы

- [1] M. Aizenman, *Phys. Rev. Lett.*, **47**:1 (1981), 1–4.
- [2] J. Fröhlich, *Nucl. Phys. B*, **200**:2 (1982), 281–296.
- [3] B. Freedman, P. Smolensky, D. Weingarten, *Phys. Lett. B*, **113**:6 (1982), 481–486.
- [4] D. J. E. Callaway, *Phys. Rep.*, **167**:5 (1988), 241–320.
- [5] J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics*, Springer, New York, 1987.
- [6] К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля*, Мир, М., 1984.
- [7] J. R. Klauder, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:27 (2011), 273001, 30 pp., arXiv:1101.1706; *Modern Phys. Lett. A*, **27**:21 (2012), 1250117, 9 pp., arXiv:1112.0803.
- [8] J. R. Klauder, *Beyond Conventional Quantization*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [9] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.
- [10] J. Stankowicz, private communication, 2010.

Поступила в редакцию 12.06.2014