Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Васильев, П. А. Смирнов, Калибровочно-неинвариантные токи полей высших спинов в четырехмерном пространстве Минковского, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 3, 449–463

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8735>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:11:13

© 2014 г.

М. А. Васильев*, П. А. Смирнов*

КАЛИБРОВОЧНО-НЕИНВАРИАНТНЫЕ ТОКИ ПОЛЕЙ ВЫСШИХ СПИНОВ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

Найдены сохраняющиеся токи произвольного спина $t > 0$, которые построены из безмассовых калибровочных полей высших спинов произвольного целого спина $s \geq t$ в четырехмерном пространстве Минковского. В частности, построен тензор энергии-импульса для поля произвольного высшего спина. Аналогично случаю псевдотензора энергии-импульса спина 2 рассматриваемые токи калибровочно-неинвариантны. Показано, что они, однако, порождают калибровочно-инвариантные заряды. Кроме ожидаемых четных относительно оператора четности токов высших спинов, обнаружены неожиданные нечетные токи, которые порождают меньше симметрий, чем четные. Приведены аргументы в пользу того, что эти нечетные токи вряд ли допускают последовательную АдС-деформацию.

Ключевые слова: теория высших спинов, законы сохранения.

DOI: 10.4213/tmf8735

1. ВВЕДЕНИЕ

Сохраняющиеся заряды и токи играют важную роль в теории поля, отвечая за симметрии теории. Дальнейшее изучение этого вопроса представляется нам уместным для статьи в честь Андрея Алексеевича Славнова, замечательные научные исследования которого на протяжении многих лет были посвящены различным аспектам локальных и глобальных симметрий в квантовой теории поля (см., например, работы [1], [2]).

Хотя сохраняющиеся токи для полей высших спинов (ВС) широко представлены в литературе [3]–[10], до сих пор основное внимание уделялось калибровочно-инвариантным токам. В общем случае сохраняющийся ток несет три спина (t, s_1, s_2) , где t – это спин тока, а s_1 и s_2 – спины полей, из которых он построен. В настоящей статье мы рассматриваем случай $s_1 = s_2 = s$. Например, тензор энергии-импульса ($t = 2$) существует для полей материи произвольных спинов $s_1 = s_2 = s$. Однако хорошо известно, что для $s = t = 2$ тензор энергии-импульса калибровочно-неинвариантен и соответствует так называемому гравитационному псевдотензору энергии-

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: smirnov.mipt@gmail.com

импульса [11]. Как показано Дезером и Валдроном [7], при $t = 2$ аналогичное явление имеет место для всех безмассовых полей спина $s > 2$. Токи с $t = 1$ обладают похожим свойством. Токи с $s < 1$ калибровочно-инвариантны (в этом случае по тривиальной причине: поля спина 0 не обладают калибровочной симметрией), в то время как токи спина 1, построенные из двух безмассовых полей спина 1, калибровочно-неинвариантны.

Цель статьи – представить полный список калибровочно-неинвариантных токов с $s \geq t$ в четырехмерном пространстве Минковского. Будучи калибровочно-неинвариантными, такие токи могут не сразу вести к допустимым нётеровым токовым взаимодействиям полей ВС. (Для подробного обсуждения взаимодействий полей ВС мы отсылаем читателя к статьям [12], [13] и ссылкам в этих работах.) С другой стороны, калибровочно-неинвариантные токи порождают калибровочно-инвариантные заряды.

Удивительный результат состоит в том, что мы обнаружили больше сохраняющихся токов, чем изначально ожидали. А именно, кроме четных относительно оператора четности токов ВС, мы обнаружили неожиданные нечетные токи, которые порождают меньше глобальных симметрий, чем четные. Как более подробно обсуждается в заключении, нечетные токи вряд ли допускают АдС-деформацию и, возможно, отвечают некоторым токам смешанной симметрии в произвольном числе измерений; эти токи сводятся к симметричным полям в случае $d = 4$.

Построение токов и зарядов может оказаться важным для анализа физики черных дыр в теории ВС [14], [15]. Для этого, однако, анализ настоящей работы нужно обобщить на случай фоновой геометрии АдС, так как нелинейная теория ВС может быть сформулирована только в искривленном пространстве (обзор и большое количество ссылок содержится в статье [4]). Эта задача будет рассмотрена в нашей следующей работе.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы напомним тетрадоподобную формулировку полей ВС в формализме двухкомпонентных спиноров. В разделе 3 найдены калибровочно-неинвариантные токи, построенные из безмассовых полей ВС в четырехмерном пространстве Минковского, а также показано, что эти токи порождают калибровочно-инвариантные заряды. В разделе 4 кратко обсуждаются дальнейшие перспективы.

Обозначения. Греческие индексы $\mu, \nu, \rho, \lambda, \sigma$ мировые и принимают значения от 0 до 3. Остальные греческие индексы спинорные и принимают значения 1, 2. Последние поднимаются и опускаются с помощью $sp(2)$ -антисимметричных форм $\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon^{\alpha\beta}, \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ следующим образом:

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma}^{\beta}, \quad \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} = \delta_{\dot{\gamma}}^{\dot{\beta}},$$

$$A_{\alpha} = A^{\beta}\varepsilon_{\beta\alpha}, \quad A^{\alpha} = A_{\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}, \quad A_{\dot{\alpha}} = A^{\dot{\beta}}\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}, \quad A^{\dot{\alpha}} = A_{\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}.$$

Комплексное сопряжение $\bar{A}$ связывает спиноры с точкой и без точки. Скобки $([\cdot])$ $\{\cdot\}$ подразумевают полную (анти)симметризацию, т. е.

$$A_{[\alpha}B_{\beta]} = \frac{1}{2}(A_{\alpha}B_{\beta} - A_{\beta}B_{\alpha}), \quad A_{\{\alpha}B_{\beta\}} = \frac{1}{2}(A_{\alpha}B_{\beta} + A_{\beta}B_{\alpha});$$

через $A^{\alpha(m)}$ обозначен полностью симметричный мультиспинор $A^{\{\alpha_1 \dots \alpha_m\}}$.

Символ внешнего произведения $\wedge$ везде опускается.

2. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ БЕЗМАССОВЫЕ ПОЛЯ ВС В ТЕТРАДОПОДОБНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ

В метрическом формализме [16] симметричные безмассовые поля целого спина s описываются полностью симметричным тензором $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ с наложенным условием двойной бесследовости $\varphi_{\rho}{}^{\rho}{}_{\lambda}{}^{\lambda}{}_{\mu_5 \dots \mu_s} = 0$, которое нетривиально для $s \geq 4$.

Действие имеет вид

$$\begin{aligned} S[\varphi] = & \frac{1}{2} \int d^4x \left(\partial_{\nu} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_s} \partial^{\nu} \varphi^{\mu_1 \dots \mu_s} - \frac{1}{2} s(s-1) \partial_{\nu} \varphi^{\lambda}{}_{\lambda \mu_3 \dots \mu_s} \partial^{\nu} \varphi_{\rho}{}^{\rho \mu_3 \dots \mu_s} + \right. \\ & + s(s-1) \partial_{\nu} \varphi^{\lambda}{}_{\lambda \mu_3 \dots \mu_s} \partial_{\rho} \varphi^{\nu \rho \mu_3 \dots \mu_s} - s \partial_{\nu} \varphi^{\nu}{}_{\mu_2 \dots \mu_s} \partial_{\rho} \varphi^{\rho \mu_2 \dots \mu_s} - \\ & \left. - \frac{1}{4} s(s-1)(s-2) \partial_{\nu} \varphi^{\nu \rho}{}_{\rho \mu_4 \dots \mu_s} \partial_{\lambda} \varphi_{\sigma}{}^{\lambda \sigma \mu_4 \dots \mu_s} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Вместо того чтобы выводить сохраняющиеся токи из действия, используя теорему Нётер, которая требует нахождения соответствующих симметрий ВС, мы будем искать сохраняющиеся токи, используя тетрадоподобный формализм, в котором поле ВС в метрическом формализме заменяется на тетраду и набор 1-форм связности [17], [18]:

$$s \geq 2: \quad \varphi_{\mu_1 \dots \mu_s} \rightarrow \{ \omega^{\alpha(m)}, \dot{\beta}(n) \mid m+n = 2(s-1) \}, \quad \omega^{\alpha(m)}, \dot{\beta}(n) = dx^{\mu} \omega_{\mu}{}^{\alpha(m)}, \dot{\beta}(n);$$

связности симметричны по всем индексам с точкой и без точки и являются вещественными [18],

$$\omega^{\dagger}_{\alpha(m), \dot{\beta}(n)} = \omega_{\beta(n), \dot{\alpha}(m)}.$$

Сама тетрада является частным случаем связности при $n = m = s-1$:

$$h_{\mu}{}^{\alpha(s-1), \dot{\beta}(s-1)} dx^{\mu} := \omega_{\mu}{}^{\alpha(s-1), \dot{\beta}(s-1)} dx^{\mu}.$$

При наложении соответствующих связей связности $\omega^{\alpha(m), \dot{\beta}(n)}$ можно выразить через $t = |m-n|/2$ производных тетрады [18].

Оператор четности P , отражающий ось x_2 , $(A_0, A_1, A_2, A_3) \rightarrow (A_0, A_1, -A_2, A_3)$, определен следующим образом [18]:

$$P \omega_{\alpha(m), \dot{\beta}(n)} = \omega_{\beta(n), \dot{\alpha}(m)}, \quad P \tilde{h}_{\alpha, \dot{\beta}} = \tilde{h}_{\beta, \dot{\alpha}}.$$

По сравнению с эрмитовым сопряжением оператор P не изменяет порядок сомножителей и знак мнимой единицы i .

Фоновая гравитация описывается 1-формой тетрады $\tilde{h}^{\alpha}, \dot{\beta}$ и 1-формами связностей $\tilde{\omega}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \tilde{\omega}^{\alpha\beta}$. Лоренцева ковариантная производная действует обычным образом:

$$\tilde{D} A^{\alpha(m), \dot{\beta}(n)} = d A^{\alpha(m), \dot{\beta}(n)} + m \tilde{\omega}^{\alpha}{}_{\gamma} A^{\alpha(m-1)\gamma}, \dot{\beta}(n) + n \tilde{\omega}^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\delta}} A^{\alpha(m), \dot{\beta}(n-1)\dot{\delta}}$$

для любого мультиспинора $A^{\alpha(m), \dot{\beta}(n)}$. 2-Формы кривизны и кручения имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{\alpha}, \dot{\beta} &= \tilde{D} \tilde{h}^{\alpha}, \dot{\beta} = d \tilde{h}^{\alpha}, \dot{\beta} + \tilde{\omega}^{\alpha}{}_{\gamma} \tilde{h}^{\gamma}, \dot{\beta} + \tilde{\omega}^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\delta}} \tilde{h}^{\alpha}, \dot{\delta}, \\ \tilde{R}^{\alpha\beta} &= \tilde{D} \tilde{\omega}^{\alpha\beta} = d \tilde{\omega}^{\alpha\beta} + 2 \tilde{\omega}^{\alpha}{}_{\gamma} \tilde{\omega}^{\beta\gamma}, \quad \tilde{R}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \tilde{D} \tilde{\omega}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = d \tilde{\omega}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + 2 \tilde{\omega}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\gamma}} \tilde{\omega}^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}. \end{aligned}$$

Четырехмерное пространство Минковского описывается уравнениями

$$\tilde{R}^{\alpha}{}_{,\dot{\beta}} = 0, \quad \tilde{R}^{\alpha\beta} = 0, \quad \tilde{R}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 0.$$

Линеаризованные кривизны полей ВС имеют вид

$$R^{\alpha(m)}{}_{,\dot{\beta}(n)} = \tilde{D}\omega^{\alpha(m)}{}_{,\dot{\beta}(n)} + \\ + n\theta(m-n)\tilde{h}_{\gamma}{}_{,\dot{\beta}}\omega^{\gamma\alpha(m)}{}_{,\dot{\beta}(n-1)} + m\theta(n-m)\tilde{h}^{\alpha}{}_{,\dot{\delta}}\omega^{\alpha(m-1)}{}_{,\dot{\beta}(n)\dot{\delta}},$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Уравнения для свободного поля спина $s \geq 2$ в пространстве Минковского могут быть записаны в виде [18]

$$R^{\alpha(m)}{}_{,\dot{\beta}(n)} = 0 \quad \text{для } n > 0, \quad m > 0, \quad n + m = 2(s-1), \quad (2)$$

$$R^{\alpha(m)} = C^{\alpha(m)\gamma\delta}\tilde{h}_{\gamma,\dot{\theta}}\tilde{h}_{\delta,\dot{\theta}} \quad \text{для } m = 2(s-1), \quad (3)$$

$$R^{\dot{\beta}(n)} = C^{\dot{\beta}(n)\dot{\gamma}\dot{\delta}}\tilde{h}_{\varphi,\dot{\gamma}}\tilde{h}^{\varphi}{}_{,\dot{\delta}} \quad \text{для } n = 2(s-1). \quad (4)$$

Они эквивалентны уравнениям движения, которые следуют из действия (1), дополненным определенными алгебраическими связями, которые выражают связности $\omega_{\alpha(m),\dot{\beta}(n)}$ через $|m-n|/2$ производных динамического поля ВС в тетрадоподобном формализме.

Мультиспинорные 0-формы $C^{\alpha(2s)}$ и $C^{\dot{\beta}(2s)}$, которые остаются ненулевыми на массовой оболочке, являются аналогами спина s тензора Вейля в гравитации.

Калибровочные преобразования полей ВС имеют вид

$$\delta\omega^{\alpha(m)}{}_{,\dot{\beta}(n)} = \tilde{D}\epsilon^{\alpha(m)}{}_{,\dot{\beta}(n)} + \\ + n\theta(m-n)\tilde{h}_{\gamma}{}_{,\dot{\beta}}\epsilon^{\gamma\alpha(m)}{}_{,\dot{\beta}(n-1)} + m\theta(n-m)\tilde{h}^{\alpha}{}_{,\dot{\delta}}\epsilon^{\alpha(m-1)}{}_{,\dot{\beta}(n)\dot{\delta}}, \quad (5)$$

где калибровочный параметр $\epsilon^{\alpha(m)}{}_{,\dot{\beta}(n)}(x)$ является произвольной функцией от x .

3. ТОКИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

3.1. Постановка задачи. Мы будем описывать токи как дуальные по Ходжу дифференциальные формы. В этих терминах условие их замкнутости на массовой оболочке эквивалентно условию сохранения токов. В настоящей работе мы рассматриваем токи, построенные из двух связностей ВС с $s_1 = s_2 = s$ в четырехмерном пространстве Минковского, где ток спина t есть 3-форма $J^{\alpha(t-1)}{}_{,\dot{\beta}(t-1)}$. Мы покажем, что такой ток содержит t производных динамического поля спина s для любого s . Мы рассматриваем токи с $1 \leq t \leq s$. Те токи, у которых $t > s$, строятся из калибровочно-инвариантных обобщенных на случай ВС тензоров Вейля и их производных и известны в литературе [8], [10].

Сохраняющиеся токи порождают сохраняющиеся заряды. Согласно теореме Нётер последние являются генераторами глобальных симметрий. Поэтому следует

ожидать столько же сохраняющихся зарядов, сколько и глобальных симметрий. Последние можно отождествить с параметрами калибровочной симметрии, оставляющими инвариантными калибровочные поля. Обозначим параметры глобальной симметрии через $\xi_{\alpha(m),\dot{\beta}(n)}(x)$; из (5) следует, что они удовлетворяют условиям

$$D\xi^{\alpha(m),\dot{\beta}(n)} := \tilde{D}\xi^{\alpha(m),\dot{\beta}(n)} + n\theta(m-n)\tilde{h}_{\gamma,\dot{\beta}}\xi^{\gamma\alpha(m),\dot{\beta}(n-1)} + m\theta(n-m)\tilde{h}^{\alpha}_{,\dot{\delta}}\xi^{\alpha(m-1),\dot{\beta}(n)\dot{\delta}} = 0. \quad (6)$$

Например, рассмотрим глобальные симметрии спина 2 с параметрами $\xi^{\alpha,\dot{\beta}}, \xi^{\alpha\alpha}$ и $\xi^{\dot{\beta}\dot{\beta}}$, которые удовлетворяют условиям

$$\tilde{D}\xi^{\alpha,\dot{\beta}} + \tilde{h}_{\gamma,\dot{\beta}}\xi^{\alpha\gamma} + \tilde{h}^{\alpha}_{,\dot{\delta}}\xi^{\dot{\beta}\dot{\delta}} = 0, \quad \tilde{D}\xi^{\alpha\alpha} = 0, \quad \tilde{D}\xi^{\dot{\beta}\dot{\beta}} = 0.$$

В декартовых координатах имеем

$$d\xi^{\alpha,\dot{\beta}} + \tilde{h}_{\gamma,\dot{\beta}}\xi^{\alpha\gamma} + \tilde{h}^{\alpha}_{,\dot{\delta}}\xi^{\dot{\beta}\dot{\delta}} = 0, \quad d\xi^{\alpha\alpha} = 0, \quad d\xi^{\dot{\beta}\dot{\beta}} = 0.$$

Общее решение системы выглядит следующим образом:

$$\xi^{\alpha,\dot{\beta}} = a^{\alpha,\dot{\beta}} - x_{\gamma,\dot{\beta}}b^{\alpha\gamma} - x^{\alpha}_{,\dot{\delta}}c^{\dot{\beta}\dot{\delta}}, \quad \xi^{\alpha\alpha} = b^{\alpha\alpha}, \quad \xi^{\dot{\beta}\dot{\beta}} = c^{\dot{\beta}\dot{\beta}},$$

где параметры $a^{\alpha,\dot{\beta}}, b^{\alpha\alpha}, c^{\dot{\beta}\dot{\beta}}$ – произвольные константы, параметризующие алгебру Пуанкаре. Аналогично, для спина s существует столько параметров глобальной симметрии, сколько калибровочных параметров $\epsilon_{\alpha(m),\dot{\beta}(n)}$ с $n+m=2(s-1)$.

Чтобы вычислить заряд поля ВС как интеграл по трехмерному пространству, мы должны найти 3-форму $J_{\alpha(m),\dot{\beta}(n)}(x)$, построенную из динамического поля ВС,

$$J_{\xi}(x) = \sum_{n,m} \xi_{\alpha(m),\dot{\beta}(n)}(x) J^{\alpha(m),\dot{\beta}(n)}(x), \quad n+m=2(t-1),$$

которая замкнута при условии (6) и на уравнениях движения ВС (2)–(4). Из этого требования вытекает, что $J_{\alpha(m),\dot{\beta}(n)}(x)$ удовлетворяет следующему условию сохранения:

$$D^*J^{\alpha(m),\dot{\beta}(n)} := \tilde{D}J^{\alpha(m),\dot{\beta}(n)} + (2t-n-1)\theta(n-m-1)\tilde{h}_{\gamma,\dot{\beta}}J^{\gamma\alpha(m),\dot{\beta}(n-1)} + (2t-m-1)\theta(m-n-1)\tilde{h}^{\alpha}_{,\dot{\delta}}J^{\alpha(m-1),\dot{\beta}(n)\dot{\delta}} \simeq 0, \quad (7)$$

где $\simeq$ означает, что равенство выполнено на массовой оболочке. Заметим, что как следствие (7) ток $J^{\alpha(t-1),\dot{\beta}(t-1)}$ спина t удовлетворяет следующему обычному условию сохранения:

$$\tilde{D}J^{\alpha(t-1),\dot{\beta}(t-1)} \simeq 0. \quad (8)$$

Принимая во внимание, что 3-формы токов связаны с обычными токами с помощью символа Леви-Чивиты $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, который является нечетным по отношению к оператору четности, мы будем называть ток $J_{\alpha(t-1),\dot{\beta}(t-1)}$ четным, если $PJ_{\alpha(t-1),\dot{\beta}(t-1)} = -J_{\beta(t-1),\dot{\alpha}(t-1)}$, и нечетным, если $PJ_{\alpha(t-1),\dot{\beta}(t-1)} = J_{\beta(t-1),\dot{\alpha}(t-1)}$.

Производные D и D^* определены таким образом, что

$$dJ_\xi(x) = \sum_{n,m} D\xi_{\alpha(m),\dot{\beta}(n)}(x) J^{\alpha(m),\dot{\beta}(n)}(x) + \sum_{n,m} \xi_{\alpha(m),\dot{\beta}(n)}(x) D^* J^{\alpha(m),\dot{\beta}(n)}(x). \quad (9)$$

Это означает, что D и D^* взаимно сопряжены. Мы называем D и D^* присоединенной и коприсоединенной производными соответственно, так как они происходят из ограничений соответствующих производных плоского сужения алгебры ВС на ее подалгебру Пуанкаре.

Уравнение (9) подразумевает, что заряд

$$Q_\xi = \int_{M^3} J_\xi$$

сохраняется при условиях (6) и (7). В результате существует столько же сохраняющихся зарядов Q_ξ , сколько независимых параметров ξ глобальных симметрий. Сохранение токов не подразумевает того, что они инвариантны относительно калибровочных преобразований (5). Однако, как показано ниже, калибровочная вариация тока J_ξ является точной формой:

$$\delta J_\xi(x) \simeq dH_\xi(x).$$

Поэтому заряд Q_ξ оказывается калибровочно-инвариантным.

Нетривиальные заряды представлены нетривиальной когомологией тока $J_\xi(x)$, т. е. замкнутыми токами по модулю точных форм $J_\xi \simeq d\Psi_\xi$. Так как токи должны быть замкнуты на массовой оболочке, т. е. на уравнениях свободного поля (2)–(4), анализ сильно упрощается из-за того, что все линеаризованные кривизны ВС $R^{\alpha(m),\dot{\beta}(n)}$ при $m > 0$, $n > 0$ равны нулю на массовой оболочке.

Поэтому задача состоит в том, чтобы:

а) найти все 3-формы $J^{\alpha(t-1),\dot{\beta}(t-1)}$, построенные из полей спина s с $1 \leq t \leq s$, которые замкнуты на массовой оболочке (т. е. удовлетворяют уравнению (8), но не точны);

б) найти все 3-формы $J^{\alpha(m),\dot{\beta}(n)}$, $m \neq n$, $m + n = 2(t-1)$, которые удовлетворяют условию (7);

в) проверить, что $J^{\alpha(t-1),\dot{\beta}(t-1)}$ эрмитовы, $(J^{\alpha(t-1),\dot{\beta}(t-1)})^\dagger = J^{\beta(t-1),\dot{\alpha}(t-1)}$;

г) проверить, что заряды ВС калибровочно-инвариантны.

Сначала рассмотрим несколько примеров.

3.2. Примеры.

3.2.1. Ток спина 1. Ток J спина 1 не несет индексов и является обобщением стандартного тока, построенного из комплексного скалярного поля $j_\mu = \varphi \partial_\mu \varphi^* - \varphi^* \partial_\mu \varphi$ на безмассовые поля произвольного спина, содержащие одну производную динамического поля спина s . Как обычно, чтобы построить нетривиальный ток спина 1, нужен цветной индекс, т. е. связности ВС $\omega^{i;\alpha(m),\dot{\beta}(n)}$ снабжаются дополнительным индексом $i = 1, \dots, N$, который нумерует независимые динамические поля. Чтобы сворачивать цветные индексы, мы вводим вещественную матрицу с элементами c_{ij} , которая может быть либо симметричной, $c_{ij} = c_{ji}$, либо антисимметричной, $c_{ij} = -c_{ji}$.

Рассмотрим 3-форму

$$J = c_{ij} [\omega^{i;\varphi\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-1)} \omega^j;_{\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-1)} \dot{\theta} + \omega^{i;\varphi\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-2)} \omega^j;_{\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-2)} \dot{\theta}] \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}. \quad (10)$$

Заметим, что антикоммутативность фоновых 1-форм тетрад,

$$\tilde{h}_{\alpha, \dot{\beta}} \tilde{h}_{\gamma, \dot{\delta}} = -\tilde{h}_{\gamma, \dot{\delta}} \tilde{h}_{\alpha, \dot{\beta}}, \quad (11)$$

означает, что

$$\tilde{h}_{\alpha, \dot{\beta}} \tilde{h}_{\gamma, \dot{\delta}} = \epsilon_{\alpha\gamma} \bar{H}_{\dot{\beta}\dot{\delta}} + \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\delta}} H_{\alpha\gamma}, \quad (12)$$

где

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \tilde{h}_{\alpha, \dot{\gamma}} \tilde{h}_{\beta, \dot{\gamma}}, \quad \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \frac{1}{2} \tilde{h}_{\gamma, \dot{\alpha}} \tilde{h}_{\gamma, \dot{\beta}} \quad (13)$$

образуют базис 2-форм в четырехмерном пространстве Минковского.

Используя (12) и (13), прямым вычислением получаем

$$\begin{aligned} dJ = c_{ij} [& R^{i;\varphi\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-1)} \omega^j;_{\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-1)} \dot{\theta} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} - \omega^{i;\varphi\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-1)} R^j;_{\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-1)} \dot{\theta} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} - \\ & - R^{i;\varphi\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-2)} \omega^j;_{\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-2)} \dot{\theta} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} - \omega^{i;\varphi\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-2)} R^j;_{\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-2)} \dot{\theta} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} + \\ & + s(\omega^{i;\varphi\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-1)} \dot{\psi} \omega^j;_{\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-1)} \dot{\theta} \bar{H}_{\dot{\psi}}^{\dot{\theta}} + \omega^{i;\varphi\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-2)} \omega^j;_{\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-2)} H_{\chi\varphi}) - \\ & - (s-2)(\omega^{i;\varphi\gamma(s-3), \dot{\delta}(s)} \omega^j;_{\chi\gamma(s-3), \dot{\delta}(s)} H_{\chi\varphi} + \omega^{i;\gamma(s), \dot{\delta}(s-3)} \dot{\psi} \omega^j;_{\gamma(s), \dot{\delta}(s-3)} \dot{\theta} \bar{H}_{\dot{\psi}}^{\dot{\theta}})]. \end{aligned}$$

Для $s > 2$ члены с кривизнами исчезают в силу уравнения (2). Для $s = 2$

$$R^{\alpha(2)} = C^{\alpha(2)\gamma\dot{\delta}} \tilde{h}_{\gamma, \dot{\theta}} \tilde{h}_{\delta, \dot{\theta}}, \quad R^{\dot{\beta}(2)} = C^{\dot{\beta}(2)\dot{\gamma}\dot{\delta}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\gamma}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\delta}}.$$

В этом случае зависящие от C члены также исчезают, так как антисимметризация по любым трем индексам, принимающим два значения, равна нулю. Например,

$$X := \omega^{\varphi, \dot{\delta}} C_{\dot{\delta}\dot{\chi}\dot{\theta}\dot{\psi}} \tilde{h}_{\gamma, \dot{\chi}} \tilde{h}_{\gamma, \dot{\psi}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} = 0, \quad (14)$$

поскольку антисимметризация по трем индексам без точки возникает из-за антикоммутативности 1-форм $\tilde{h}_{\gamma, \dot{\gamma}}$.

В итоге мы получаем выражение

$$\begin{aligned} dJ \simeq & c_{ij} [s(\omega^{i;\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-1)} \dot{\psi} \omega^j;_{\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-1)} \dot{\theta} \bar{H}_{\dot{\psi}}^{\dot{\theta}} + \omega^{i;\varphi\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-2)} \omega^j;_{\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-2)} H_{\chi\varphi}) - \\ & - (s-2)(\omega^{i;\varphi\gamma(s-3), \dot{\delta}(s)} \omega^j;_{\chi\gamma(s-3), \dot{\delta}(s)} H_{\chi\varphi} + \omega^{i;\gamma(s), \dot{\delta}(s-3)} \dot{\psi} \omega^j;_{\gamma(s), \dot{\delta}(s-3)} \dot{\theta} \bar{H}_{\dot{\psi}}^{\dot{\theta}})], \end{aligned}$$

которое равно нулю, если элементы c_{ij} антисимметричны. Ток J оказывается эрмитовым, $J^\dagger = J$, если c_{ij} чисто мнимые.

Чтобы доказать, что J не является точной формой, рассмотрим точную форму $d\Psi$ на массовой оболочке, где 2-форма Ψ не содержит производных динамического поля ВС, чтобы породить ток с одной производной. Существует лишь одна такая форма с антисимметричными c_{ij} :

$$\Psi = c_{ij} \omega^{i;\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-1)} \omega^j;_{\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-1)}.$$

Отсюда следует, что

$$d\Psi \simeq -2(s-1)c_{ij}(-\omega^{i;\varphi\gamma(s-2)}, \dot{\delta}(s-1)\omega^{j;}, \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-1)\dot{\theta}\tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} + \\ + \omega^{i;\varphi\gamma(s-1)}, \dot{\delta}(s-2)\omega^{j;}, \gamma(s-1), \dot{\delta}(s-2)\dot{\theta}\tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}).$$

Так как два члена в (10) имеют одинаковые знаки, 3-форма J является замкнутой, но не точной, тем самым представляя токовую когомологию на массовой оболочке.

3.2.2. *Ток спина 2.* Ток спина 2 представлен 3-формой

$$J^{\alpha, \dot{\beta}} = 2c_{ij}\omega^{i;\alpha\varphi\gamma(s-2)}, \dot{\delta}(s-2)\omega^{j;}, \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-2)\dot{\theta}\tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}, \quad (15)$$

которая несет две производные поля ВС. Как в случае спина 1, опуская содержащие кривизны члены (для $s = 2$ зависящие от C члены исчезают, как и в (14)), получаем с помощью прямого вычисления, что

$$\tilde{D}J^{\alpha, \dot{\beta}} \simeq 0$$

вне зависимости от свойств симметрии элементов c_{ij} .

Чтобы увидеть, что 3-форма $J^{\alpha, \dot{\beta}}$ не точна, заметим, что единственные подходящие 2-формы имеют вид

$$\Psi_1^{\alpha, \dot{\beta}} = c_{ij}\omega^{i;\alpha\gamma(s-2)}, \dot{\delta}(s-1)\omega^{j;}, \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-1)\dot{\theta}\tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}, \\ \Psi_2^{\alpha, \dot{\beta}} = c_{ij}\omega^{i;\alpha\gamma(s-1)}, \dot{\delta}(s-2)\omega^{j;}, \gamma(s-1), \dot{\delta}(s-2)\dot{\theta}\tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}.$$

Простое вычисление дает

$$\tilde{D}\Psi_1^{\alpha, \dot{\beta}} \simeq c_{ij}[-\omega^{i;\gamma(s-2)}, \dot{\delta}(s-1)\dot{\theta}\omega^{j;}, \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-1)\dot{\theta}\tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\alpha} - \\ - (s-2)\omega^{i;\alpha\gamma(s-3)}, \dot{\delta}(s-1)\dot{\theta}\omega^{j;}, \varphi\gamma(s-3), \dot{\delta}(s-1)\dot{\theta}\tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}} - \\ - (s-1)\omega^{i;\alpha\varphi\gamma(s-2)}, \dot{\delta}(s-2)\omega^{j;}, \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-2)\dot{\theta}\tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}} - \\ - (s-2)\omega^{i;\alpha\varphi\gamma(s-3), \dot{\delta}(s-1)\omega^{j;}, \gamma(s-3), \dot{\delta}(s-1)\dot{\theta}\tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}}], \\ \tilde{D}\Psi_2^{\alpha, \dot{\beta}} \simeq c_{ij}[-(s-2)\omega^{i;\alpha\varphi\gamma(s-1)}, \dot{\delta}(s-3)\omega^{j;}, \gamma(s-1), \dot{\delta}(s-3)\dot{\theta}\tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}} - \\ - \omega^{i;\alpha\gamma(s-1)}, \dot{\delta}(s-2)\omega^{j;}, \varphi\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-2)\dot{\theta}\tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}} - \\ - (s-2)\omega^{i;\alpha\gamma(s-1)}, \dot{\delta}(s-3)\dot{\theta}\omega^{j;}, \varphi\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-3)\dot{\theta}\tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}} - \\ - (s-1)\omega^{i;\alpha\varphi\gamma(s-2)}, \dot{\delta}(s-2)\omega^{j;}, \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-2)\dot{\theta}\tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}}].$$

Форма $J^{\alpha, \dot{\beta}}$ (15) не является линейной комбинацией $\tilde{D}\Psi_1^{\alpha, \dot{\beta}}$ и $\tilde{D}\Psi_2^{\alpha, \dot{\beta}}$, так как последние содержат члены типа $c_{ij}\omega^{i;\alpha\gamma(s-1)}, \dot{\delta}(s-2)\omega^{j;}, \varphi\gamma(s-1), \dot{\delta}(s-2)\dot{\theta}\tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}}$, не присутствующие в (15). (Хотя с помощью антисимметризации по некоторым трем индексам можно поменять местами спинорные индексы в этом члене, $\tilde{D}\Psi_1^{\alpha, \dot{\beta}}$ и $\tilde{D}\Psi_2^{\alpha, \dot{\beta}}$ будут все равно содержать дополнительные члены по сравнению с (15).) Это приводит

к удивительному выводу, что существуют два независимых эрмитовых сохраняющихся тока (15):

$$\begin{aligned} J_+^{\alpha, \dot{\beta}} &= J^{\alpha, \dot{\beta}} & \text{с} & \quad c_{ij} = c_{ji}, \\ J_-^{\alpha, \dot{\beta}} &= iJ^{\alpha, \dot{\beta}} & \text{с} & \quad c_{ij} = -c_{ji}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала ток $J_+^{\alpha, \dot{\beta}}$; он является четным, так как $PJ_+^{\alpha, \dot{\beta}} = -J_+^{\beta, \dot{\alpha}}$. Для $J_+^{\alpha, \dot{\beta}}$ уравнения (7) дают

$$D^* J_+^{\dot{\beta}\dot{\beta}} = \tilde{h}_{\gamma, \dot{\beta}} J_+^{\gamma, \dot{\beta}} + \tilde{D} J_+^{\dot{\beta}\dot{\beta}} \simeq 0, \quad (16)$$

$$D^* J_+^{\alpha\alpha} = \tilde{h}^{\alpha, \dot{\delta}} J_+^{\alpha, \dot{\delta}} + \tilde{D} J_+^{\alpha\alpha} \simeq 0. \quad (17)$$

Решениями этих уравнений являются

$$J_+^{\dot{\beta}\dot{\beta}} = 2c_{ij} \omega^{i; \varphi \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-2) \dot{\beta}} \omega^{j; \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-2) \dot{\theta}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}, \quad (18)$$

$$J_+^{\alpha\alpha} = 2c_{ij} \omega^{i; \alpha \varphi \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-2) \omega^{j; \alpha}_{\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-2) \dot{\theta}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}. \quad (19)$$

Действительно, прямое вычисление при помощи соотношения (11) дает на массовой оболочке

$$\begin{aligned} \tilde{D} J_+^{\dot{\beta}\dot{\beta}} &\simeq 2c_{ij} [s \omega^{i; \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-2) \dot{\psi} \dot{\beta}} \omega^{j; \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-2) \dot{\theta}} \tilde{H}_{\dot{\psi}}^{\dot{\theta}} - \\ &\quad - (s-2) \omega^{i; \varphi \gamma(s-3), \dot{\delta}(s-1) \dot{\beta}} \omega^{j; \chi \gamma(s-3), \dot{\delta}(s-1) \dot{\theta}} H_{\chi}^{\dot{\theta}} - \\ &\quad - \omega^{i; \varphi \chi \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-2) \dot{\omega}^{j; \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-2) \dot{\theta}} \tilde{h}_{\chi, \dot{\theta}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}]. \end{aligned}$$

Здесь первые два члена исчезают при симметричных c_{ij} . В результате имеем

$$\tilde{D} J_+^{\dot{\beta}\dot{\beta}} \simeq -2c_{ij} \omega^{i; \varphi \chi \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-2) \dot{\omega}^{j; \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-2) \dot{\theta}} \tilde{h}_{\chi, \dot{\theta}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} = -\tilde{h}_{\chi, \dot{\beta}} J_+^{\chi, \dot{\beta}}.$$

Аналогично, ток $J_+^{\alpha\alpha}$, заданный в (19), удовлетворяет уравнению (17).

Таким образом, четный сохраняющийся ток $J_+^{\alpha, \dot{\beta}}$ (15) с симметричными c_{ij} порождает замкнутый ток J_{ξ} , который в свою очередь порождает полный набор зарядов спина 2 для полей произвольного спина $s \geq 2$. Этот ток существует при $s \geq 2$ и соответствует тензору энергии-импульса для полей ВС, которые являются тетрадными аналогами токов, рассмотренных в работе [7].

Теперь рассмотрим нечетный ток $J_-^{\alpha, \dot{\beta}}$. Можно видеть, что в этом случае система уравнений (7) не имеет решений. В результате получаем, что из условия сохранения заряда следует $\xi_{\alpha\alpha} = 0$, $\xi_{\dot{\beta}\dot{\beta}} = 0$. Сохраняющийся заряд имеет вид

$$Q_{\xi} = \int_{M^3} \xi_{\alpha, \dot{\beta}} J_-^{\alpha, \dot{\beta}},$$

где $\xi_{\alpha, \dot{\beta}}$ удовлетворяет уравнению $\tilde{D} \xi_{\alpha, \dot{\beta}} = 0$ и, следовательно, является константой в декартовых координатах. Поэтому нечетный ток $J_-^{\alpha, \dot{\beta}}$ порождает меньше зарядов, чем $J_+^{\alpha, \dot{\beta}}$.

Например, в тензорных обозначениях нечетный ток для $s = t = 2$ имеет вид

$$J^a = c_{ij} [\omega^{i;mn} \omega^{j;mn} \tilde{e}^a - 4 \omega^{i;an} \omega^{j;mn} \tilde{e}^m],$$

где коэффициенты c_{ij} антисимметричны.

Существование нечетных сохраняющихся токов представляется удивительным. В следующем пункте показано, что аналогичные “неожиданные” токи существуют для всех токов полей ВС с $t > 2$ в пространстве Минковского. В заключении мы приводим аргументы в пользу того, что нечетные токи существуют только в пространстве Минковского и вряд ли допускают обобщение на четырехмерное пространство АдС.

3.3. Общий случай. В случае $t \geq 1$ сохраняющийся ток $J^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}$ для значений $s \geq 2$, $s \geq t$, который несет t производных поля ВС, выглядит следующим образом:

$$J^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)} = c_{ij} [\omega^{i;\alpha(t-1)\varphi\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t)} \omega^{j; \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t)\dot{\theta}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}(t-1)} + \omega^{i;\alpha(t-1)\varphi\gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2)} \omega^{j; \gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2)\dot{\theta}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}(t-1)}]. \quad (20)$$

Аналогично случаю $t = 2$ нетрудно видеть, что $\tilde{D} J^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)} \simeq 0$ вне зависимости от симметрии элементов c_{ij} . Для $t = s - 1$ члены с тензорами типа Вейля исчезают, как в примере (14). Доказательство того факта, что ток $J^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}$ (20) не является точным вне зависимости от симметрии элементов c_{ij} , производится прямым, но технически сложным вычислением. Подробности приведены в приложении.

Аналогично случаю $t = 2$ (см. формулу (15)) существуют два эрмитовых сохраняющихся тока $J_+^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)} = J^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}$, где c_{ij} (анти)симметричны для (не)четных t , и $J_-^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)} = i J^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}$, где c_{ij} (анти)симметричны для (четных) нечетных t . Заметим, что уравнение (20) при $t = 2$ дает $J_+^{\alpha, \dot{\beta}}$ из (15).

Рассмотрим четный ток $J_+^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}$. Чтобы построить ток J_ξ , мы должны решить систему уравнений (7). Используя уравнения (2)–(4), можно убедиться, что следующий набор 3-форм $J_+^{\alpha(m), \dot{\beta}(n)}$, $m \neq n$, $m + n = 2(t - 1)$, является решением:

$$\begin{aligned} J_+^{\alpha(m), \dot{\beta}(n)} = & \theta(n - m - 4) g(n) c_{ij} \omega^{i;\alpha(m)\varphi\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t)\dot{\beta}(n-t+1)} \omega^{j; \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t)\dot{\theta}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}(t-1)} + \\ & + \delta_{n,t} c_{ij} [2(t - 1) \omega^{i;\alpha(m)\varphi\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t)\dot{\beta}} \omega^{j; \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t)\dot{\theta}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}(n-1)} + \\ & + \sum_{p=1}^{t-2} f(p) \omega^{i;\alpha(m)\varphi\gamma(s-p-1), \dot{\delta}(s-t+p)} \omega^{j; \gamma(s-p-1), \dot{\delta}(s-t+p)} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}(n-1)}] + \\ & + \theta(m - n - 4) g(m) c_{ij} \omega^{i;\alpha(t-1)\varphi\gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2)} \omega^{j;\alpha(m-t+1)} \gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2)\dot{\theta} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}(n)} + \\ & + \delta_{m,t} c_{ij} [2(t - 1) \omega^{i;\alpha(m-1)\varphi\gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2)} \omega^{j;\alpha} \gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2)\dot{\theta} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}(n)} + \\ & + \sum_{p=1}^{t-2} f(p) \omega^{i;\alpha(m-1)\varphi\gamma(s-t+p), \dot{\delta}(s-p-1)} \omega^{j; \gamma(s-t+p), \dot{\delta}(s-p-1)} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}^{\dot{\beta}(n)}], \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$g(m) = \frac{2(t-1)!}{(2t-m-2)!(m-t+1)!}, \quad m \geq t+1,$$

$$f(1) = \frac{t-1}{s-t+1}, \quad f(p) = (t-1) \frac{(s-t)!(s-p)!}{(s-3)!(s-t+p)!}, \quad p > 1.$$

Следует подчеркнуть, что формы $J_+^{\dot{\beta}(2t-2)}$ и $J_+^{\alpha(2t-2)}$ удовлетворяют уравнениям (7), только если c_{ij} антисимметричны для нечетных t и симметричны для четных t .

Таким образом, эрмитова 3-форма тока $J_+^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}$ (20) с антисимметричными c_{ij} для нечетных t и симметричными c_{ij} для четных t замкнута, но не точна на массовой оболочке. Она порождает замкнутый ток J_ξ и соответствующий сохраняющийся заряд $Q_\xi = \int_{M^3} J_\xi$, который содержит столько же параметров симметрии, сколько локальных калибровочных симметрий ВС.

Так как ток $J_+^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}$ (20) замкнут, но не точен вне зависимости от симметрии элементов c_{ij} , нечетный эрмитов ток с симметричными c_{ij} для нечетных t и антисимметричными c_{ij} для четных есть $J_-^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)} = iJ_+^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}$. Нечетный ток существует для $t \geq 2$. Чтобы построить J_ξ , нужно решить уравнения (7). Оказывается, что эти уравнения допускают решение при $m \neq 2(t-1)$, $n \neq 2(t-1)$, $m+n = 2(t-1)$. Решение может быть представлено в виде $J_-^{\alpha(m), \dot{\beta}(n)} = iJ_+^{\alpha(m), \dot{\beta}(n)}$ (см. соотношение (21)), но с элементами c_{ij} , антисимметричными для четных t и симметричными для нечетных t . Однако уравнения не имеют решения на последнем шаге, т.е. для $J_-^{\dot{\beta}(2t-2)}$ и $J_-^{\alpha(2t-2)}$. Следовательно, как и в случае $t = 2$, условие сохранения заряда требует $\xi_{\alpha(2t-2)} = 0$, $\xi_{\dot{\beta}(2t-2)} = 0$. Так как уравнение (6) имеет меньше решений, нечетные токи порождают меньше зарядов, чем четные.

3.4. Калибровочные преобразования. Калибровочная вариация на массовой оболочке 3-формы тока (20) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \delta J_+^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)} &\simeq c_{ij} \tilde{D} [\epsilon^{i; \alpha(t-1) \varphi \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t)} \omega^{j; \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t) \dot{\theta}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} + \\ &+ \omega^{i; \alpha(t-1) \varphi \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t)} \epsilon^{j; \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t) \dot{\theta}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} + \\ &+ \epsilon^{i; \alpha(t-1) \varphi \gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2)} \omega^{j; \gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2) \dot{\theta}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} + \\ &+ \omega^{i; \alpha(t-1) \varphi \gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2)} \epsilon^{j; \gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2) \dot{\theta}} \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}] = \\ &= \tilde{D} H^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}. \end{aligned}$$

Аналогично, калибровочная вариация 3-форм (21) на массовой оболочке имеет вид

$$\begin{aligned} \delta J_+^{\alpha(m), \dot{\beta}(n)} &\simeq D^* H^{\alpha(m), \dot{\beta}(n)}, \quad m \neq n, \\ \delta J_-^{\alpha(m), \dot{\beta}(n)} &\simeq iD^* H^{\alpha(m), \dot{\beta}(n)}, \quad m \neq n, \quad m \neq 2(t-1), \quad n \neq 2(t-1). \end{aligned}$$

2-Форма $H^{\alpha(m)}, \dot{\beta}(n)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 H^{\alpha(m)}, \dot{\beta}(n) = & \\
 & = \theta(n-m-4) g(n) c_{ij} [\epsilon^{i; \alpha(m) \varphi \gamma(s-2)}, \dot{\delta}(s-t) \dot{\beta}(n-t+1) \omega^j;_{\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t) \dot{\theta}} \dot{\beta}(t-1) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} + \\
 & + \omega^{i; \alpha(m) \varphi \gamma(s-2)}, \dot{\delta}(s-t) \dot{\beta}(n-t+1) \epsilon^j;_{\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t) \dot{\theta}} \dot{\beta}(t-1) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}] + \\
 & + \delta_{n,t} c_{ij} [2(t-1) \epsilon^{i; \alpha(m) \varphi \gamma(s-2)}, \dot{\delta}(s-t) \dot{\beta} \omega^j;_{\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t) \dot{\theta}} \dot{\beta}(n-1) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} + \\
 & + 2(t-1) \omega^{i; \alpha(m) \varphi \gamma(s-2)}, \dot{\delta}(s-t) \dot{\beta} \epsilon^j;_{\gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t) \dot{\theta}} \dot{\beta}(n-1) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} + \\
 & + \sum_{p=1}^{t-2} f(p) \epsilon^{i; \alpha(m) \varphi \gamma(s-p-1)}, \dot{\delta}(s-t+p) \omega^j;_{\gamma(s-p-1), \dot{\delta}(s-t+p)} \dot{\beta}(n-1) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\beta}} + \\
 & + \sum_{p=1}^{t-2} f(p) \omega^{i; \alpha(m) \varphi \gamma(s-p-1)}, \dot{\delta}(s-t+p) \epsilon^j;_{\gamma(s-p-1), \dot{\delta}(s-t+p)} \dot{\beta}(n-1) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\beta}}] + \\
 & + \theta(m-n-4) g(m) c_{ij} [\epsilon^{i; \alpha(t-1) \varphi \gamma(s-t)}, \dot{\delta}(s-2) \omega^j; \alpha(m-t+1)_{\gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2) \dot{\theta}} \dot{\beta}(n) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} + \\
 & + \omega^{i; \alpha(t-1) \varphi \gamma(s-t)}, \dot{\delta}(s-2) \epsilon^j; \alpha(m-t+1)_{\gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2) \dot{\theta}} \dot{\beta}(n) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}] + \\
 & + \delta_{m,t} c_{ij} [2(t-1) \epsilon^{i; \alpha(m-1) \varphi \gamma(s-t)}, \dot{\delta}(s-2) \omega^j; \alpha_{\gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2) \dot{\theta}} \dot{\beta}(n) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} + \\
 & + 2(t-1) \omega^{i; \alpha(m-1) \varphi \gamma(s-t)}, \dot{\delta}(s-2) \epsilon^j; \alpha_{\gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2) \dot{\theta}} \dot{\beta}(n) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}} + \\
 & + \sum_{p=1}^{t-2} f(p) \epsilon^{i; \alpha(m-1) \gamma(s-t+p)}, \dot{\delta}(s-p-1) \omega^j;_{\gamma(s-t+p), \dot{\delta}(s-p-1)} \dot{\theta} \dot{\beta}(n) \tilde{h}_{\alpha, \dot{\theta}} + \\
 & + \sum_{p=1}^{t-2} f(p) \omega^{i; \alpha(m-1) \gamma(s-t+p)}, \dot{\delta}(s-p-1) \epsilon^j;_{\gamma(s-t+p), \dot{\delta}(s-p-1)} \dot{\theta} \dot{\beta}(n) \tilde{h}_{\alpha, \dot{\theta}}],
 \end{aligned}$$

где $m+n=2(t-1)$.

В результате калибровочная вариация заряда Q_ξ имеет вид

$$\begin{aligned}
 \delta Q_\xi & \simeq \int_{M^3} \sum_{m,n} \xi_{\alpha(m), \dot{\beta}(n)} D^* H^{\alpha(m)}, \dot{\beta}(n) = \\
 & = \int_{M^3} d \left(\sum_{m,n} \xi_{\alpha(m), \dot{\beta}(n)} H^{\alpha(m)}, \dot{\beta}(n) \right) = \int_{M^3} dH_\xi = 0.
 \end{aligned}$$

Поэтому, хотя ток J_ξ и калибровочно-неинвариантен, соответствующий заряд калибровочно-инвариантен.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе найдены токи ВС $J_+^{\alpha(t-1)}, \dot{\beta}(t-1)$ спина t в четырехмерном пространстве Минковского, построенные из полей спина s (при $s \geq t$) и несущие t производных (что является минимальным возможным числом). Будучи представленными 3-формами, токи $J^{\alpha(t-1)}, \dot{\beta}(t-1)$ замкнуты, но не точны, что ведет к нетривиальным сохраняющимся зарядам ВС. Чтобы породить полный набор сохраняющихся зарядов, ток $J^{\alpha(t-1)}, \dot{\beta}(t-1)$ (20) был расширен до набора токов $J^{\alpha(m)}, \dot{\beta}(n)$

с $m + n = 2(t - 1)$, которые вместе удовлетворяют условию косопряженного ковариантного постоянства и образуют полный ток J_ξ , зависящий от параметров ξ глобальной симметрии.

Аналогично случаю тензора энергии-импульса ($t = 2$), рассмотренному в работе [7], построенные токи неинвариантны относительно калибровочных преобразований ВС. Однако соответствующие заряды ВС являются калибровочно-инвариантными, так как калибровочная вариация δJ_ξ точна.

В дополнение к ожидаемому набору P -четных токов, отвечающих обычным симметриям ВС, был найден неожиданный набор P -нечетных относительно оператора четности токов спина $t > 1$, которые имеют противоположную по сравнению с обычными четными токами симметрию по отношению к цветным индексам полей ВС. Происхождение этих токов довольно загадочно. Ожидается, что в старших размерностях они соответствуют токам полей некоторой смешанной симметрии, которые становятся эквивалентны симметричным полям в конкретном случае четырех измерений. С этим связано также то свойство, что нечетные токи вряд ли выживают после деформации пространства Минковского в четырехмерное пространство АдС. Это следует из того факта, что, как показано в настоящей работе, пространство параметров глобальной симметрии, связанное с нечетными токами, меньше, чем в случае четных токов. Такая редукция возможна в геометрии Минковского, где связности ВС принимают значения в неразложимом модуле алгебры Пуанкаре, допускающей редукцию на подмодуль. Однако это невозможно в геометрии АдС, в которой $sp(4)$ -симметрия четырехмерного пространства АдС проста и связности ВС принимают значения в неприводимых модулях для любого заданного спина. Фактически этот аргумент находится в соответствии с тем свойством, что поля смешанной симметрии в пространствах АдС и Минковского существенно отличаются [19], [20] в том смысле, что поля смешанной симметрии в пространстве АдС содержат больше степеней свободы, чем в пространстве Минковского, и это нарушает гладкость АдС-деформации токов, связанных с полями смешанной симметрии.

Интересно обобщить полученные результаты на токи, построенные из полей различных спинов и/или токи типа связность-тензор Вейля (т. е. $\omega \times C$). Например, в случае $t = s = 1$ ток имеет вид

$$J = ic_{ij}[\omega^i C^{j;\alpha\alpha} H_{\alpha\alpha} - \omega^i C^{j;\dot{\beta}\dot{\beta}} \bar{H}_{\dot{\beta}\dot{\beta}}],$$

где c_{ij} антисимметричны.

Чтобы стало возможно использовать заряды ВС для анализа конкретных решений нелинейной калибровочной теории ВС, важно обобщить построенные токи на случай пространства АдС. Эта задача сейчас решается. Как упоминалось выше, также интересно проследить за судьбой нечетных токов ВС в четырехмерном пространстве АдС.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Неточность тока $J^{\alpha(t-1),\dot{\beta}(t-1)}$

Чтобы проверить, может ли ток (20) быть представлен в точной форме, вводится следующая величина:

$$J^{\alpha(t-1),\dot{\beta}(t-1)} = \Phi_1^{\alpha(t-1),\dot{\beta}(t-1)} + \Phi_2^{\alpha(t-1),\dot{\beta}(t-1)}, \quad (\text{П.1})$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)} &= c_{ij} \omega^{i; \alpha(t-1) \varphi \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t)} \omega^{j; \gamma(s-2), \dot{\delta}(s-t) \dot{\theta}} \dot{\beta}(t-1) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}, \\ \Phi_2^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)} &= c_{ij} \omega^{i; \alpha(t-1) \varphi \gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2)} \omega^{j; \gamma(s-t), \dot{\delta}(s-2) \dot{\theta}} \dot{\beta}(t-1) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\theta}}.\end{aligned}$$

Базис в 2-формах, билинейных по полям, имеет вид

$$\Psi^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}(k, l) = c_{ij} \omega^{i; \alpha(t-l-1) \gamma(s-k), \dot{\delta}(s-t+k-1) \dot{\beta}(l)} \omega^{j; \alpha(l) \gamma(s-k), \dot{\delta}(s-t+k-1)} \dot{\beta}(t-l-1).$$

Выбор k, l ограничен тем, что $\Psi^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}(k, l)$ содержит $t-1$ производную динамического поля.

Ток точен, если

$$J^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)} \simeq \sum_{k, l} a_{kl} \tilde{D} \Psi^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}(k, l).$$

Нетрудно проверить, что формы $\tilde{D} \Psi^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}(k, l)$ с $l \neq 0$ не дают вклада, так как они порождают неисчезающие члены, отличные от $\Phi_{1,2}^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}$. Поэтому ток, заданный в (II.1), с необходимостью должен содержать формы $\tilde{D} \Psi^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}(2, 0)$ и $\tilde{D} \Psi^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}(t-1, 0)$, поскольку среди форм с $l = 0$ только указанные содержат член $\Phi_{1,2}^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}$.

Попробуем построить возможное “улучшение” (коэффициенты неважны и обозначены как $a_i > 0$)

$$I^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)} = -a_1 \tilde{D} \Psi^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}(2, 0) + \dots$$

Дифференциал $\Psi^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}(2, 0)$ на массовой оболочке имеет вид

$$\begin{aligned}-\tilde{D} \Psi^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}(2, 0) &\simeq (s-t+1) \Phi_1^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)} - \\ &- (s-2) c_{ij} \omega^{i; \alpha(t-1) \varphi \gamma(s-3), \dot{\delta}(s-t+1)} \omega^{j; \gamma(s-3), \dot{\delta}(s-t+1) \dot{\psi}} \dot{\beta}(t-1) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\psi}}.\end{aligned}$$

Второй член можно убрать с помощью соотношения

$$\begin{aligned}\tilde{D} \Psi^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}(3, 0) &\simeq \\ &\simeq c_{ij} [-(s-t+2) \omega^{i; \alpha(t-1) \varphi \gamma(s-3), \dot{\delta}(s-t+1)} \omega^{j; \gamma(s-3), \dot{\delta}(s-t+1) \dot{\psi}} \dot{\beta}(t-1) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\psi}} + \\ &+ (s-3) \omega^{i; \alpha(t-1) \varphi \gamma(s-4), \dot{\delta}(s-t+2)} \omega^{j; \gamma(s-4), \dot{\delta}(s-t+2) \dot{\psi}} \dot{\beta}(t-1) \tilde{h}_{\varphi, \dot{\psi}}]\end{aligned}$$

и так далее. В результате

$$\begin{aligned}I^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)} &= -a_1 \tilde{D} \Psi^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}(2, 0) - \\ &- a_2 \tilde{D} \Psi^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}(3, 0) - \dots - a_n \tilde{D} \Psi^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}(t-1, 0) \simeq \\ &\simeq \Phi_1^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)} - \Phi_2^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}\end{aligned}$$

и $I^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)} \neq J^{\alpha(t-1), \dot{\beta}(t-1)}$ для элементов c_{ij} произвольной симметрии.

Благодарности. Работа финансово поддержана РФФИ (гранты № 11-02-00814_а и 12-02-31838).

Список литературы

- [1] А. А. Славнов, *ТМФ*, **10**:2 (1972), 153–161.
- [2] А. А. Славнов, К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **135**:2 (2003), 265–279, arXiv: hep-th/0208006.
- [3] F. A. Berends, G. J. H. Burgers, H. Van Dam, *Nucl. Phys. B*, **271**:2 (1986), 429–441.
- [4] M. A. Vasiliev, “Higher spin gauge theories: star-product and AdS space”, *The Many Faces of the Superworld*, ed. M. A. Shifman, World Sci., Singapore, 2000, 533–610, arXiv: hep-th/9910096.
- [5] D. Anselmi, *Class. Quantum Grav.*, **17**:6 (2000), 1383–1400, arXiv: hep-th/9906167.
- [6] S. E. Konstein, M. A. Vasiliev, V. N. Zaikin, *JHEP*, **12** (2000), 018, 12 pp., arXiv: hep-th/0010239.
- [7] S. Deser, A. Waldron, *Stress and strain: $T^{\mu\nu}$ of higher spin gauge fields*, arXiv: hep-th/0403059.
- [8] М. А. Васильев, О. А. Гельфонд, Е. Д. Скворцов, *ТМФ*, **154**:2 (2008), 344–353.
- [9] X. Bekaert, E. Meunier, *JHEP*, **11** (2010), 116, 31 pp., arXiv: 1007.4384.
- [10] D. S. Kaparulin, S. L. Lyakhovich, A. A. Sharapov, *SIGMA*, **8** (2012), 021, 18 pp., arXiv: 1112.1860.
- [11] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 2: *Теория поля*, Наука, М., 1988.
- [12] M. A. Vasiliev, *Nucl. Phys. B*, **862**:2 (2012), 341–408, arXiv: 1108.5921.
- [13] E. Joung, M. Taronna, *Cubic-interaction-induced deformations of higher-spin symmetries*, arXiv: 1311.0242.
- [14] V. E. Didenko, M. A. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **682**:3 (2009), 305–315, arXiv: 0906.3898; Erratum **722**:4–5 (2013), 389.
- [15] C. Iazeolla, P. Sundell, *JHEP*, **12** (2011), 084, 81 pp., arXiv: 1107.1217.
- [16] C. Fronsdal, *Phys. Rev. D*, **18**:10 (1978), 3624–3629.
- [17] М. А. Васильев, *ЯФ*, **32** (1980), 855–861.
- [18] M. A. Vasiliev, *Fortsch. Phys.*, **35**:11 (1987), 741–770.
- [19] R. R. Metsaev, *Phys. Lett. B*, **354**:1–2 (1995), 78–84.
- [20] L. Brink, R. R. Metsaev, M. A. Vasiliev, *Nucl. Phys. B*, **586**:1 (2000), 183–205, arXiv: hep-th/0005136.

Поступила в редакцию 19.06.2014