Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Пупышев, Приближение эффективного радиуса в задаче двумерного рассеяния центральным короткодействующим потенциалом, *ТМФ*, 2015, том 182, номер 2, 315–337

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8738>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:11:18

© 2015 г.

В. В. Пупышев*

ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА В ЗАДАЧЕ ДВУМЕРНОГО РАССЕЯНИЯ ЦЕНТРАЛЬНЫМ КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Исследуется роль слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний квантовой частицы в ее двумерном упругом низкоэнергетическом рассеянии. Энергии таких состояний определяются в приближении эффективного радиуса через корни трансцендентных уравнений. Это же приближение используется для анализа рассеяния. Получены и исследованы явные низкоэнергетические асимптотики всех парциальных фаз и сечений. Эти асимптотики содержат энергии слабосвязанных или околопороговых резонансных состояний.

Ключевые слова: двумерное рассеяние, короткодействующий потенциал, слабосвязанные и околопороговые резонансные состояния.

DOI: 10.4213/tmf8738

1. ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что квантовая частица p_1 движется в трехмерном координатном пространстве $\mathcal{R}^3$ в поле неподвижного силового центра O , который воздействует на нее посредством центрального короткодействующего потенциала. Как известно [1]–[3], в этом случае сохраняющимися квантовыми числами являются волновое число k и угловой момент $\ell = 0, 1, \dots$ частицы p_1 . Функция эффективного радиуса [1], [3] для состояния рассеяния $|k, \ell\rangle$ этой же частицы в трехмерном координатном пространстве $\mathcal{R}^3$ определяется через парциальную фазу $\delta_\ell(k)$ рассеяния формулой

$$K^s(k) \equiv k^{2\ell+1} \operatorname{ctg} \delta_\ell(k) = -\frac{1}{a^s} + \frac{k^2}{2} r_{\text{eff}}^s + \dots$$

Приближением эффективного радиуса [1], [3] принято называть аппроксимацию функции $K^s(k)$ суммой двух первых слагаемых ее разложения в бесконечный ряд по четным степеням аргумента k . Такая сумма содержит две константы: длину рассеяния a^s и эффективный радиус r_{eff}^s .

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

В ядерную физику низких энергий приближение эффективного радиуса для случая S -волнового ($\ell = 0$) рассеяния короткодействующим потенциалом ввел Бете [4]. Изыщное обобщение этого приближения для произвольного значения углового момента ℓ предложено Друкаревым [5]. Надежный способ, предназначенный для вычисления констант a^s и r_{eff}^s при любом значении ℓ и основанный на нелинейной версии метода фазовых функций, подробно изложен Бабиковым в его монографии [3]. Как показано в недавних работах [6]–[8], для расчета этих констант удобнее использовать рекуррентную цепочку не зависящих от энергии линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которую нетрудно вывести, стартуя с линейной версии метода фазовых функций [3].

Обобщение приближения эффективного радиуса на случай суперпозиции кулоновского и короткодействующего потенциалов начато работой [9] Ландау и Смодинского. Обширный список исследований, инициированных этой работой и посвященных способам вычислений кулон-ядерных длины рассеяния и эффективного радиуса, дан в обзорах низкоэнергетических приближений в ядерной физике [10], [11].

Одним из традиционных приложений приближения эффективного радиуса в теоретической и экспериментальной ядерной физике низких энергий является решение задачи экстраполяции парциальных фаз $\delta_\ell(k)$ и соответствующих сечений в область сверхнизких энергий [10], [11], недоступных для экспериментального исследования. Другая не менее важная прикладная задача ядерной физики низких энергий и ядерной астрофизики заключается в определении вершинных констант [12], [13] процессов развала легкого ядра A на два фрагмента B и C . В работах [14]–[17] для решения этой задачи успешно использовался метод, основанный на аналитическом продолжении одноканальной функции эффективного радиуса $K^s(k)$ в точку полюса парциальной амплитуды рассеяния двух ядер-фрагментов B и C , отвечающую их связанному состоянию A . В недавних работах [18]–[20] предложено обобщение этого метода на случай двух каналов и на случай суперпозиции кулоновского и короткодействующего (ядерного) взаимодействий. Использование такого обобщения представляется перспективным подходом к исследованию ядерных реакций, которые протекают при столкновении протонов, каналируемых в кристаллической среде, с легкими ядрами, имплантированными в нее. Ожидаемое увеличение скорости протекания таких реакций основано на давно известном и экспериментально подтвержденном эффекте каналирования заряженных частиц в кристалле [21], [22], физически прозрачных качественных соображениях [23] и на двух теоретически предсказанных эффектах: эффекте сверхфокусировки [24] и эффекте резонансного каналирования пучка заряженных частиц в кристалле [25].

В работе [23] показано, что волновая функция столкновения ядра, движущегося вдоль кристаллографической оси, с ядром, имплантированным в кристалл, подчиняется двумерному уравнению Шредингера. В системе центра масс сталкивающихся ядер такую волновую функцию можно интерпретировать как волновую функцию квантовой частицы p_1 с массой m_1 , равной приведенной массе этих ядер, которая движется как вдоль кристаллографической оси, так и в перпендикулярной этой оси двумерной плоскости $\mathcal{P}$ трехмерного координатного пространства $\mathcal{R}^3$ этой же частицы.

Как известно [1], [26]–[36], движение медленной квантовой частицы в двумерной плоскости $\mathcal{P}$ имеет две особенности по сравнению с ее движением в трехмерном

пространстве. Во-первых, в поле любого сколь угодно слабого, но притягивающего потенциала, убывающего быстрее кулоновского, квантовая частица имеет по крайней мере одно слабосвязанное состояние [1], [26], [36]. Во-вторых, сечение рассеяния квантовой частицы любым короткодействующим, в том числе и финитным, потенциалом неограниченно возрастает в пределе ее нулевой полной энергии [1], [27], [28], [34], причем старшее слагаемое асимптотики сечения в этом пределе никак не зависит от потенциала и описывается неаналитической функцией энергии, равной ее логарифму. Эту же логарифмическую функцию энергии содержат и все известные к настоящему времени определения [29]–[35] функции эффективного радиуса и длины двумерного рассеяния квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом.

Как отмечалось в работах [37]–[39], наличие слабосвязанного состояния квантовой частицы, движущейся в двумерной плоскости, существенно меняет сечение ее низкоэнергетического упругого рассеяния.

Анализ столкновения двух легких ядер в плоскости, перпендикулярной каналируемому пучку, является нашей конечной целью и представляется особо интересным из-за перечисленных выше существенных отличий двумерного рассеяния по сравнению с трехмерным. Достижение этой цели невозможно без последовательного построения теории двумерного низкоэнергетического рассеяния, которое логично начать с детального решения наиболее простой задачи о движении медленной квантовой частицы в поле центрального короткодействующего потенциала. Теоретическое исследование такого движения удобно разбить на три этапа.

Первый этап заключается в создании асимптотического в пределе низких энергий метода, предназначенного для вычисления всех парциальных фаз, сечений и радиальных волновых функций упругого рассеяния квантовой частицы. Этот этап преодолен в работе [34]. В ней использовалось приближение эффективного радиуса, содержащее два параметра: длину и эффективный радиус двумерного рассеяния квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом. Наиболее экономичные способы вычисления этих параметров предложены в работе [35].

Второй этап является более сложным и состоит в анализе условий, достаточных для существования слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний квантовой частицы. Такой анализ дан в работе [36].

Третий этап представляется особенно интересным для практических приложений и заключается в исследовании особенностей низкоэнергетического поведения всех парциальных фаз и сечений двумерного упругого рассеяния квантовой частицы, которые порождаются ее слабосвязанными и околопороговыми резонансными состояниями. Решению этой задачи в рамках двумерного аналога [34]–[36] приближения эффективного радиуса посвящена настоящая работа.

Все используемые в работе особо значимые определения и известные соотношения собраны в разделе 2. В разделе 3 дан анализ околопороговых особенностей парциальных фаз и сечений упругого рассеяния, порожденных присутствием особых состояний рассеяния, слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний. В заключении суммируются основные результаты выполненного анализа и обобщаются возможные способы их обобщения и применения.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛЮЧЕВЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Поясним обозначения и определения, принятые в предыдущих работах [34]–[36], а затем перечислим доказанные в этих же работах утверждения и соотношения.

Начнем с физических предположений. Полагаем, что квантовая частица p_1 движется лишь в двумерной плоскости $\mathcal{P}$ ее координатного пространства $\mathcal{R}^3$. Считаем, что некоторая неподвижная точка O этой плоскости является силовым центром, воздействующим на частицу p_1 посредством потенциала V , который зависит только от обезразмеренного расстояния x между точкой O и этой частицей и подчинен следующим условиям:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 |V(x)| = 0, \quad V(x) \in C^0(0, \infty), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n |V(x)| = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Такой потенциал принято называть центральным, слабосингулярным в нуле, непрерывным на всей полуоси $x > 0$ и короткодействующим. Вследствие перечисленных выше свойств потенциала $V(x)$ полный набор квантовых чисел частицы p_1 состоит из ее обезразмеренного волнового числа q и полужелого числа $\lambda = -1/2, 1/2, \dots$, а радиальная волновая функция $u_\lambda(x; q) = \langle x|q, \lambda \rangle$ физического состояния $|q, \lambda \rangle$ этой частицы определяется как регулярное (ограниченное на всей полуоси $x > 0$) решение одномерного уравнения Шредингера

$$[\partial_x^2 + q^2 - \lambda(\lambda + 1)x^{-2} - V(x)]u_\lambda(x; q) = 0, \quad x > 0, \quad (2)$$

с граничным условием $u_\lambda(x; q) \sim (qx)^{\lambda+1}$ при $qx \rightarrow 0$ и вполне определенной асимптотикой в области $qx/|\lambda| \gg 1$. Все регулярные на полуоси $x > 0$ решения уравнения (2) с таким начальным условием и комплексным параметром q имеют асимптотику

$$u_\lambda(x; q) \rightarrow N(q)[A^+(q)e^{iqx} - A^-e^{-iqx}], \quad \frac{|q|x}{|\lambda|} \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где

$$A^\pm(q) \equiv \frac{1}{2i} e^{\mp i[\pi\lambda/2 - \delta_\lambda(q)]},$$

а $N(q)$ и $\delta_\lambda(q)$ – некоторые комплекснозначные функции аргумента q . При условиях (1) такие решения существуют, если $q > 0$ или $q = ip$, где $p \geq 0$. Это утверждение останется в силе, если для некоторых положительных чисел q_0 и q_1 положить $q = q_1 - iq_2$, $q_2 \in (0, q_0]$, и вместо последнего из условий (1) потребовать суммируемость функции $|V(x)|e^{2q_0x}$ в области $x \gg 1$. Далее считается, что $q_0 \equiv 2e^{-\gamma} = 1.122918\dots$, где γ – константа Эйлера.

Из множества всех регулярных решений с асимптотиками (3) радиальная волновая функция u_λ состояния упругого рассеяния $|q, \lambda \rangle$ выделяется условиями $q > 0$ и $N(q) = 1$. Эта функция имеет асимптотику

$$u_\lambda(x; q) \rightarrow \sin\left(qx - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_\lambda(q)\right), \quad \frac{|q|x}{|\lambda|} \rightarrow \infty.$$

Величины $\delta_\lambda(q)$ и $\sigma_\lambda(q)$ называются парциальными фазой и сечением упругого рассеяния в состоянии $|q, \lambda \rangle$. Сечение $\sigma_\lambda(q)$ вычисляется по формулам

$$\sigma_\lambda(q) \equiv \frac{\sigma_\lambda^u(q)}{\text{ctg}^2 \delta_\lambda(q) + 1}, \quad \sigma_\lambda^u(q) \equiv \frac{4}{q}(2 - \delta_{2\lambda, -1}). \quad (4)$$

Здесь и далее $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. Сечение $\sigma_\lambda(q)$ достигает своего унитарного предела $\sigma_\lambda^u(q)$, если волновое число q равно положительному корню p уравнения $\operatorname{ctg} \delta_\lambda(p) = 0$, а фаза $\delta_\lambda(p)$ кратна числу $\pi/2$. Состояние рассеяния $|p, \lambda\rangle$ с таким волновым числом считаем особым. Предел $q \rightarrow +0$ назовем пределом низких энергий. Нулевое значение безразмерной энергии рассеяния $E = q^2$ называем пороговым, потому что при переходе через него в область $E < 0$ состояния рассеяния исчезают.

Связанные состояния выделяются из всех остальных регулярных решений совокупностью условий $q = ip$, $p \geq 0$,

$$u_\lambda(x; ip) \sim e^{-px} \quad \text{при} \quad \frac{px}{|\lambda|} \rightarrow \infty, \quad \int_0^\infty |u_\lambda(x)|^2 dx = 1,$$

и поэтому существуют тогда и только тогда, когда волновое число q равно корню ip , $p > 0$, уравнения $\operatorname{ctg} \delta_\lambda(ip) = i$. В связанном состоянии $|ip, \lambda\rangle$ частица p_1 имеет отрицательную или нулевую полную энергию $E = -p^2$, которой соответствует неотрицательная энергия связи $B \equiv -E = p^2$.

Резонансное состояние частицы p_1 определяется как состояние $|q, \lambda\rangle$ с комплексным волновым числом $q = q_1 - iq_2$, где $q_1 > 0$, $q_2 \in (0, q_0)$, которому отвечает регулярное решение u_λ , обладающее асимптотикой в виде расходящейся круговой волны:

$$\langle x|q, \lambda\rangle = u_\lambda(x; q_1 - iq_2) \rightarrow e^{q_2 x + i[q_1 x - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda(q)]}, \quad \frac{|q|x}{|\lambda|} \rightarrow \infty.$$

Асимптотика (3) общего регулярного решения совпадает с такой асимптотикой тогда и только тогда, когда $N(q) = 1$, а волновое число q равно корню $q_1 - iq_2$ уравнения $\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q_1 - iq_2) = i$, где $q_1 > 0$, $q_2 \in (0, q_0)$. Это уравнение определяет весь спектр резонансных состояний квантовой частицы p_1 . По определению $q = q_1 - iq_2$ принадлежит четвертому квадранту комплексной плоскости волновых чисел. В этом квадранте удобно использовать специальные полярные координаты (p, ω) – модуль $p = |q|$ комплексного волнового числа q и угол ω , отсчитывающийся от полуоси положительных вещественных значений по часовой стрелке и определенный следующими формулами:

$$q = pe^{i(2\pi - \omega)} = pe^{-i\omega}, \quad \omega \equiv \operatorname{arctg} \frac{q_2}{q_1} \in (0, \pi/2). \quad (5)$$

В координатах (p, ω) полная безразмерная энергия E резонансного состояния $|q, \lambda\rangle = |(p, \omega), \lambda\rangle$ представляется через энергию резонанса E_r и его ширину Γ формулами

$$E \equiv q^2 = E_r - i\frac{\Gamma}{2}, \quad E_r \equiv q_1^2 - q_2^2 = p^2 \cos 2\omega, \quad \Gamma \equiv 4q_1 q_2 = 2p^2 \sin 2\omega. \quad (6)$$

Слабосвязанными мы считаем связанные состояния $|ip, \lambda\rangle$ с $0 < p \ll q_0$, а состояния $|q, \lambda\rangle$ с $|q| \ll q_0$ называем околотороговыми состояниями упругого ($q > 0$) или резонансного ($q = q_1 - iq_2$) рассеяния.

При условиях (1) для каждого состояния рассеяния $|\lambda, q\rangle$, $q > 0$, с выбранным значением λ функция эффективного радиуса $K(q)$ является рядом по четным степеням волнового числа q и вводится соотношениями

$$K(q) \equiv q^{2\lambda+1} [\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q) - h(q)] = -\frac{1}{a} + \frac{q^2}{2} r_{\text{eff}} + O\left(\frac{|q|}{a}\right)^4. \quad (7)$$

Здесь и всюду далее

$$h(q) \equiv \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{q}{2} + \gamma \right) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{q}{q_0}, \quad (8)$$

а коэффициенты a и r_{eff} называются длиной рассеяния и эффективным радиусом.

Особые случаи $a = 0$ и $a = \pm\infty$ в настоящей работе не рассматриваются: всюду далее считается, что $0 < |a| < \infty$. В заключении поясняется, как обобщить все полученные в разделе 3 приближения парциальных фаз и сечений на два особых случая $a = 0$ и $|a| = \infty$, детально исследованных в работе [35].

Как показано в работе [36], если в дополнение к условиям (1) потребовать суммируемость функции $|V(x)|e^{2q_0x}$ при $x \gg 1$, то представления (7) можно использовать как аналитическое продолжение функции эффективного радиуса в область $\mathcal{A} \equiv \{q: |\arg| \leq \pi/2, \text{Im } q \geq -q_0\}$ комплексной плоскости волнового числа q . Такая суммируемость подразумевается в п. 3.3, посвященном резонансному рассеянию.

При любых допустимых значениях числа λ , длины рассеяния $a \neq 0, \pm\infty$ и эффективного радиуса $r_{\text{eff}} \neq \pm\infty$ под приближением эффективного радиуса в области $\mathcal{A}$ мы подразумеваем замену функции $K(q)$ суммой $-1/a + (q^2/2)r_{\text{eff}}$. В этом приближении функция $\text{ctg } \delta_\lambda(q)$ определяется формулой

$$\text{ctg } \delta_\lambda(q) \approx h(q) + q^{-2\lambda-1} \left(-\frac{1}{a} + \frac{q^2}{2} r_{\text{eff}} \right), \quad 0 < |q| \ll q_0, \quad (9)$$

а сечение упругого рассеяния (7) – формулой

$$\sigma_\lambda(q) \approx \frac{4(2 - \delta_{2\lambda, -1})a^2 q^{4\lambda+1}}{[1 - (q^2/2)ar_{\text{eff}} - aq^{2\lambda+1}h(q)]^2 + a^2 q^{4\lambda+2}}, \quad 0 < q \ll q_0. \quad (10)$$

В случае $2\lambda = -1$ и $q/q_0 \rightarrow 0$ приближения (9) и (10) фазы и сечения рассеяния воспроизводит их давно известные асимптотики [1]

$$\delta_\lambda(q) \sim \frac{\pi/2}{\ln(q/q_0)}$$

и

$$\sigma_\lambda(q) \sim \frac{4\pi^2}{q} \frac{1}{[2\ln(q/q_0)]^2 + \pi^2}. \quad (11)$$

Старшее слагаемое $(\pi/2)/\ln q$ асимптотики фазы $\delta_\lambda(q)$ при $2\lambda = -1$ и $q/q_0 \rightarrow 0$ не зависит ни от знака, ни от формы потенциала $V(x)$. Поэтому для определения значения этой фазы в точке $q = 0$ требуются дополнительные ограничения. В качестве таковых по аналогии с трехмерным рассеянием [3] будем считать, что фаза $\delta_\lambda(q)$ должна быть положительной или отрицательной, если в сколь угодно малой окрестности $(0, x_0)$, $x_0 \ll 1$, точки $x = 0$ потенциал $V(x)$ является притягивающим ($V < 0$) или отталкивающим ($V > 0$) соответственно. При таком определении из представления (9) и известных свойств котангенса следует, что в любом из этих случаев фаза $\delta_\lambda(q)$ монотонно убывает с ростом ее аргумента, но в пределе $q \rightarrow +0$ эта фаза сходится слева к π в первом случае и к нулю во втором.

В силу определений (5), (8) и аппроксимации (9) в приближении эффективного радиуса уравнению $\text{ctg } \delta_\lambda(p) = 0$ при $0 < p \ll q_0$ отвечает эталонное уравнение

$$p^{2\lambda+1} \frac{2}{\pi} \ln \frac{p}{q_0} = \frac{1}{a} - \frac{1}{2} r_{\text{eff}} p^2, \quad (12)$$

уравнению $\operatorname{ctg} \delta_\lambda(ip) = i$ при $0 < p \ll q_0$ соответствует эталонное уравнение

$$p^{2\lambda+1} \frac{2}{\pi} \ln \frac{p}{q_0} = i^{-2\lambda-1} \left(\frac{1}{a} + \frac{p^2}{2} r_{\text{eff}} \right), \quad (13)$$

а уравнение $\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q_1 - iq_2) = i$ при $|p| \ll q_0$ порождает систему эталонных уравнений

$$p^{2\lambda+1} \frac{2}{\pi} \ln \frac{p}{q_0} = \frac{1}{a} \cos[(2\lambda + 1)\omega] - \frac{p^2}{2} r_{\text{eff}} \cos[(2\lambda - 1)\omega], \quad (14)$$

$$p^{2\lambda+1} \left(1 + \frac{2}{\pi} \omega \right) = -\frac{1}{a} \sin[(2\lambda + 1)\omega] + \frac{p^2}{2} r_{\text{eff}} \sin[(2\lambda - 1)\omega]. \quad (15)$$

Завершим настоящий раздел обсуждением уравнений (12)–(15).

Заметим, что уравнения (12) и (13) имеют одинаковые левые части, а их правые части отличаются знаком первого или второго слагаемых, если число $2\lambda + 1$ не кратно или кратно четырем соответственно. Следовательно, корни p_1 и p_2 обсуждаемых уравнений (12) и (13) совпадают только при условиях $r_{\text{eff}} = 0$ и $2\lambda = -1, 3, 7, \dots$. Лишь в этом случае энергия $E = p_1^2$ особого околорогового состояния рассеяния $|p_1, \lambda\rangle$ равна энергии связи $B = p_2^2$ слабосвязанного состояния $|ip_2, \lambda\rangle$.

Выявим связь между числом корней эталонных уравнений (12) и (13).

Предположим, что значение λ задано и уравнение (13) имеет два корня p_1 и p_2 . Следовательно, существуют два слабосвязанных состояния. Положив для определенности $p_1 < p_2$, найдем графическим способом число корней уравнения (12), которое по определению равно числу особых состояний рассеяния $|p, \lambda\rangle$. Пусть $2\lambda = -1$. Уравнение (13) имеет два корня, если $a < 0$ и $r_{\text{eff}} > 0$. В этом случае уравнение (12) отличается от уравнения (13) лишь знаком слагаемого $p^2 r_{\text{eff}}/2$. Таким образом, уравнение (12) является уравнением (13), в котором $a < 0$ и $r_{\text{eff}} < 0$. При таких условиях это уравнение, а следовательно, и уравнение (12) имеют только один корень p , причем $p < p_1$. Теперь положим $2\lambda = 1$. Уравнение (13) имеет два корня, если $a > 0$ и $r_{\text{eff}} > 0$. В этом случае уравнение (12) отличается от уравнения (13) лишь знаком слагаемого $1/a$. Поэтому уравнение (12) является уравнением (13), в котором $a < 0$ и $r_{\text{eff}} > 0$. При таких условиях это уравнение, а следовательно, и уравнение (12) имеют единственное решение p , причем $p < p_1$. Случай $2\lambda \geq 3$ нетрудно исследовать по аналогии с выше рассмотренными случаями $2\lambda = \pm 1$ и в итоге показать, что при $2\lambda \geq 3$ уравнение (12) имеет один корень p , если $a > 0$, и два корня $p = p_-$ и $p = p_+$, если $a < 0$.

Теперь предположим, что значение λ выбрано и уравнение (12) имеет два корня p_1 и p_2 . Следовательно, существуют два особых состояния рассеяния. Считая, что $p_1 < p_2$, найдем графическим способом число n корней уравнения (13), которое по определению равно числу слабосвязанных состояний $|ip, \lambda\rangle$. В итоге получим следующее соответствие: если $2\lambda = -1$, то $n = 1$ и $p < p_1$; если $2\lambda \geq 1$, то $n = 1$ и $p > p_2$ при условии $a < 0$, в противном случае $n = 2$.

Убедимся в том, что волновое число p особого состояния рассеяния $|p, \lambda\rangle$ не может быть модулем $|q_\Gamma|$ волнового числа околорогового резонансного состояния $|q_\Gamma, \lambda\rangle$. Предположим противное: пусть p является решением уравнения (12) и $p = |q_\Gamma|$. Тогда (14) сводится к уравнению, которое имеет решение только при $\omega = 0$, но по определению $\omega \in (0, \pi/2)$. В силу полученного противоречия высказанное выше утверждение верно.

3. ОКОЛОПОРоговые особенности фаз и сечений

Первый пункт настоящего раздела является вспомогательным. В нем исследуется околопороговое поведение фазы и сечения при наличии особого состояния рассеяния. Такое исследование необходимо для того, чтобы в следующих двух пунктах выявить эффекты, порождающиеся в рассеянии только слабосвязанными или только околопороговыми резонансными состояниями.

3.1. Влияние особого состояния рассеяния. Исследуем околопороговое поведение фазы $\delta_\lambda(q)$ и сечения $\sigma_\lambda(q)$ упругого рассеяния квантовой частицы в состоянии $|q, \lambda\rangle$ при наличии ее особого состояния $|p, \lambda\rangle$, фаза которого $\delta_\lambda(p)$ кратна числу $\pi/2$. Считаем, что значения λ , a и r_{eff} заданы и при этих значениях уравнение (12) имеет один корень p , но уравнение (13) не имеет корней на полуинтервале $(0, p + \epsilon]$, $\epsilon/p \ll 1$, и на таком полуинтервале система уравнений (14) и (15) несовместна. Тогда имеется особое околопороговое состояние рассеяния $|p, \lambda\rangle$, но отсутствуют и слабосвязанное, и околопороговое резонансное состояния, модули волновых чисел которых меньше или равны числу $p + \epsilon$. Так как p – корень уравнения (12), из приближения (9) функции $\text{ctg } \delta_\lambda(q)$, содержащего два параметра a и r_{eff} , можно исключить один из них. В итоге получится представление функции $\text{ctg } \delta_\lambda(q)$ через параметры r_{eff} и p :

$$\text{ctg } \delta_\lambda(q) \approx y_\lambda^+(q; p) + \frac{r_{\text{eff}} q^2 - p^2}{2 q^{2\lambda+1}}, \quad y_\lambda^+(q; p) \equiv h(q) - \left(\frac{p}{q}\right)^{2\lambda+1} h(p), \quad q \ll q_0, \quad (16)$$

или представление этой же функции, но через параметры a и p :

$$\text{ctg } \delta_\lambda(q) \approx y_\lambda^-(q; p) - \frac{1}{ap^2} \frac{q^2 - p^2}{q^{2\lambda+1}}, \quad y_\lambda^-(q; p) \equiv h(q) - \left(\frac{p}{q}\right)^{2\lambda-1} h(p), \quad q \ll q_0. \quad (17)$$

Соответствующие таким приближениям фазу и сечение (4) обозначим символами $\delta_\lambda^s(q)$ и $\sigma_\lambda^s(q)$. Если особое состояние рассеяния отсутствует, сечение $\sigma_\lambda(q)$ определяем формулой (10).

Исследуем особый случай $2\lambda = -1$. Согласно представлению (16) только в этом случае

$$y_\lambda^+(q; ip) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{q}{p},$$

и поэтому сечение $\sigma_\lambda^s(q)$ имеет асимптотику

$$\sigma_\lambda^s(q) \sim \frac{4\pi^2}{q} \frac{1}{[2 \ln(q/p)]^2 + \pi^2}, \quad \frac{q}{p} \rightarrow 0. \quad (18)$$

Сравним ее с асимптотикой (11) сечения $\sigma_\lambda(q)$ в случае, когда особое состояние рассеяния отсутствует. Если $q < p$, то $|\ln(q/p)| < |\ln(q/q_0)|$, следовательно, мы имеем $\sigma_\lambda^s(q) > \sigma_\lambda(q)$ при $q < p$. Выявим особенности поведения фазы $\delta_\lambda^s(q)$ при $2\lambda = -1$. В силу соотношения (16)

$$\partial_q \delta_\lambda^s(q) \approx - \left(\frac{2}{\pi q} + q r_{\text{eff}} \right) \sin^2 \delta_\lambda^s(q), \quad q \ll q_0.$$

Таким образом, если $r_{\text{eff}} > 0$, то производная $\partial_q \delta_\lambda^s(q)$ отрицательна и велика по модулю, поэтому при $q/p \rightarrow 0$ фаза $\delta_\lambda^s(q)$ монотонно и быстро убывает, как $(\pi/2)/\ln(q/p)$. При условии $r_{\text{eff}} \ll -2/\pi q_0^2$ эта производная обращается в нуль в точке

$$q = p_0 \equiv \sqrt{-\frac{2}{\pi r_{\text{eff}}}} \ll q_0,$$

поэтому в этой точке фаза $\delta_\lambda^s(q)$ имеет локальный минимум.

Рассмотрим следующий особый случай $2\lambda = 1$. В силу представления (17) только в этом случае

$$y_\lambda^-(q; ip) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{q}{p},$$

и поэтому для сечения $\sigma_\lambda^b(q)$ верно приближение

$$\sigma_\lambda^s(q) \approx \frac{8(\pi a)^2 q^3}{[2aq^2 \ln(q/p) - \pi(1 - q^2/p^2)]^2 + (a\pi q^2)^2}, \quad q \ll q_0. \quad (19)$$

Сравнив его с приближением (10) сечения $\sigma_\lambda(q)$, заключаем, что из неравенства $|\ln(q/p)| < |\ln(q/q_0)|$ вытекает, что $\sigma_\lambda^s(q) > \sigma_\lambda(q)$ при $q < p$. Обсудим особенности поведения фазы $\delta_\lambda^s(q)$ в случае $2\lambda = 1$. Вследствие соотношения (17)

$$\partial_q \delta_\lambda^s(q) \approx -\frac{2}{q} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{aq^2} \right) \sin^2 \delta_\lambda^s(q), \quad q \ll q_0.$$

Следовательно, если $a > 0$, то производная $\partial_q \delta_\lambda^s$ отрицательна и по порядку величины равна $O(-aq)$, поэтому при $q/p \rightarrow 0$ фаза $\delta_\lambda^s(q)$ монотонно убывает, как $O(-aq^2)$. При условии $a \ll -\pi/q_0^2$ производная $\partial_q \delta_\lambda^s(q)$ равна нулю в точке

$$q = p_0 \equiv \sqrt{-\frac{\pi}{a}} \ll q_0,$$

поэтому в этой точке фаза $\delta_\lambda^s(q)$ имеет локальный максимум.

Отметим, что в силу представления (17) фаза $\delta_\lambda^s(q)$ при $2\lambda \geq 3$ имеет один локальный максимум или минимум, если $a > 0$ или $a < 0$ соответственно.

Теперь предположим, что при данном значении λ уравнение (12) имеет два корня p_1 и p_2 , причем $p_1 < p_2$. Тогда существуют два особых состояния рассеяния $|p_1, \lambda\rangle$ и $|p_2, \lambda\rangle$ с энергиями $E_j = p_j^2$ и фазами $\delta_\lambda(p_j)$, $j = 1, 2$, кратными числу $\pi/2$. Выведем приближенное представление функции $\text{ctg } \delta_\lambda(q)$ для состояния рассеяния $|q, \lambda\rangle$ через его энергию $E = q^2$, энергии E_1, E_2 и константу $E_0 \equiv q_0^2$. Для этого в уравнении (12) положим сначала $p = p_1$, а затем $p = p_2$. Два выведенных таким способом соотношения считаем системой уравнений относительно неизвестных a и r_{eff} . Решив эту систему, получим представления коэффициентов a и r_{eff} в виде функций аргументов p_1 и p_2 :

$$\begin{aligned} a &= \frac{p_2^2 - p_1^2}{p_1^{2\lambda+1} p_2^2 h(p_1) - p_2^{2\lambda+1} p_1^2 h(p_2)}, \\ r_{\text{eff}} &= 2 \frac{p_1^{2\lambda+1} h(p_1) - p_2^{2\lambda+1} h(p_2)}{p_2^2 - p_1^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Затем в приближении (9) заменим длину рассеяния a и эффективный радиус r_{eff} такими функциями. В итоге получим искомое представление

$$\text{ctg } \delta_{\lambda}^s(q) \approx \frac{1}{\pi} \ln \frac{E}{E_0} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1,2} (-1)^j \left(\frac{E_j}{E} \right)^{\lambda+1/2} \frac{E + E_j}{E_1 - E_2} \ln \frac{E_j}{E_0}. \quad (21)$$

Перечислим физически интересные следствия приближений (16), (17) и (21), которые порождаются наличием двух особых состояний рассеяния.

В силу этих приближений функция $\text{ctg } \delta_{\lambda}^s(q)$ ограничена, если $0 < q \ll q_0$. Поэтому при том же условии фаза $\delta_{\lambda}^s(q)$ не может быть нулем или числом, кратным π . Следовательно, в точках $q = p_1$ и $q = p_2$ эта фаза принимает одинаковые значения, кратные числу $\pi/2$, а на интервале (p_1, p_2) имеет по крайней мере один локальный экстремум. Если $2\lambda = -1$, $a < 0$ и $r_{\text{eff}} < 0$, то фаза $\delta_{\lambda}^s(q) = \pi/2$ при $q = p_1, p_2$ и имеет локальный минимум в точке $q = p_0 \equiv \sqrt{-2/(\pi r_{\text{eff}})} \in (p_1, p_2)$. В случае $2\lambda = 1$, $a < 0$ фаза $\delta_{\lambda}^s(q) = -\pi/2$ при $q = p_1, p_2$ и имеет локальный максимум в точке $q = p_0 = \sqrt{-\pi/a} \in (p_1, p_2)$. В оставшемся случае $2\lambda \geq 3$ при $a < 0$ фаза $\delta_{\lambda}^s(q) = -\pi/2$ в точках $q = p_1, p_2$ и имеет локальный максимум; если же $a > 0$, то фаза $\delta_{\lambda}^s(q) = \pi/2$ в точках $q = p_1, p_2$ и имеет локальный минимум.

Так как в точках $q = p_1$ и $q = p_2$ фаза $\text{ctg } \delta_{\lambda}^s(q)$ одинакова и кратна числу $\pi/2$, а в некоторой точке $p_0 \in (p_1, p_2)$ достигает своего локального экстремума, отвечающее ей сечение $\sigma_{\lambda}^s(q)$ равно унитарному пределу $\sigma_{\lambda}^u(q)$ на концах отрезка $[p_1, p_2]$, а в точке p_0 имеет локальный минимум. При увеличении λ глубина этого минимума увеличивается, потому что в этом случае второе слагаемое в представлении (16) функции $\text{ctg } \delta_{\lambda}(q)$ быстро возрастает в точке $q = p_0$.

Стоит пояснить и проиллюстрировать практические приложения полученных выше представлений (20) и (21). Предположим, что при данном квантовом числе λ значения волновых чисел p_1, p_2 или энергий E_1, E_2 двух особых состояний рассеяния известны. Тогда, используя представление (21), можно экстраполировать фазу и сечение рассеяния в состоянии $|q, \lambda\rangle$ в область энергий $E \ll E_0 = q_0^2$. При том же предположении нетрудно сначала вычислить длину рассеяния и эффективный радиус по формулам (20), а затем численно исследовать уравнение (12) на наличие третьего корня p_3 и найти модуль p_b волнового числа слабосвязанного состояния $|ip_b, \lambda\rangle$ как корень $p_b = p$ уравнения (13).

Приведем вычисленные описанным способом значения корней p_3 и p_b в случаях $p_1 = 0.1$ и $p_2 = 0.2$. Корень p_3 существует при $2\lambda = 3$ или $2\lambda = 5$: если $2\lambda = 3$, то $p_3 = 1.039506\dots$, если $2\lambda = 5$, то $p_3 = 1.120375\dots$. При условии $2\lambda \leq 3$ имеется один корень:

$$p_b = \begin{cases} 0.070716\dots, & \text{если } 2\lambda = -1, \\ 0.282842\dots, & \text{если } 2\lambda = 1, \\ 1.191663\dots, & \text{если } 2\lambda = 3. \end{cases}$$

При $2\lambda = 5$ существуют два корня: $p_b = 0.227009\dots$ и $p_b = 1.120336\dots$. Для значений $p_1 = 0.1, p_2 = 0.2$ зависимость сечения $\sigma_{\lambda}^s(q)$, вычисленного в приближении (21), от квантовых чисел q и λ поясняет рис. 1. Как видно, сечение $\sigma_{\lambda}^s(q)$ близко к своему унитарному пределу $\sigma_{\lambda}^u(q)$ на всем интервале (p_1, p_2) , если $2\lambda = -1$, а с ростом λ минимальное значение сечения $\sigma_{\lambda}^s(q)$ на этом интервале быстро уменьшается. В области $q > p_2$ сечения $\sigma_{\lambda}^s(q)$ при $2\lambda = 3, 5$ близки к унитарному пределу, потому что

Рис. 1. Зависимость сечения $\sigma_{\lambda}^s(q)$ от квантовых чисел q и λ при наличии особых состояний рассеяния $|p_1, \lambda\rangle$, $p_1 = 0.1$, и $|p_2, \lambda\rangle$, $p_2 = 0.2$: отношение $\sigma_{\lambda}^s(q)/\sigma_{\lambda}^u(q)$ при $2\lambda = -1$ (а); сечение $\sigma_{\lambda}^s(q)$ при $2\lambda = -1$ (б); отношения $\sigma_{\lambda}^s(q)/\sigma_{\lambda}^u(q)$ при $2\lambda = 1, 3, 5$ – сплошная, штрихпунктирная и пунктирная кривые соответственно (в); сечения $\sigma_{\lambda}^s(q)$ при $2\lambda = 1, 3, 5$ – сплошная, штрихпунктирная и пунктирная кривые соответственно (г). На рис. “б” и “г” штриховая линия – унитарный предел $\sigma_{\lambda}^u(q)$.

при выбранных значениях $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$ корней уравнения (12) это уравнение имеет еще один корень p_3 , близкий к единице.

3.2. Рассеяние при наличии слабосвязанного состояния. Выявим особенности фаз $\delta_{\lambda}(q)$ и сечений $\sigma_{\lambda}(q)$ упругого рассеяния квантовой частицы, отличные от указанных выше, но порождающиеся ее слабосвязанными состояниями. Предположим, что значения λ , a и r_{eff} заданы и при таких значениях уравнение (13) имеет один корень p . Предположим также, что на полуинтервале $(0, p + \epsilon]$, $\epsilon/p \ll 1$, уравнение (12) не имеет решений, а система уравнений (14) и (15) несовместна. Тогда имеется одно слабосвязанное состояние $|ip, \lambda\rangle$, но отсутствуют особое состояние рассеяния и резонансное состояние, модули волновых чисел которых не превосходят число $p + \epsilon$. Поэтому при $q \in (0, p + \epsilon]$ фаза $\delta_{\lambda}(q)$ состояния рассеяния $|q, \lambda\rangle$ не кратна числу $\pi/2$.

Исследуем поведение этой фазы и соответствующего ей сечения. Для этого используем представление (9) функции $\text{ctg } \delta_\lambda(q)$ через параметры a и r_{eff} . Так как p – корень уравнения (13), из этого представления можно исключить a или r_{eff} . В результате получится приближение функции $\text{ctg } \delta_\lambda(q)$ через параметры r_{eff} и p ,

$$\text{ctg } \delta_\lambda(q) \approx y_\lambda^+(q; ip) + \frac{r_{\text{eff}} q^2 + p^2}{2 q^{2\lambda+1}}, \quad y_\lambda^+(q; ip) \equiv h(q) - \left(\frac{ip}{q}\right)^{2\lambda+1} h(p), \quad (22)$$

или приближение этой же функции, но через параметры a и p ,

$$\text{ctg } \delta_\lambda(q) \approx y_\lambda^-(q; ip) - \frac{1}{ap^2} \frac{q^2 + p^2}{q^{2\lambda+1}}, \quad y_\lambda^-(q; ip) \equiv h(q) - \left(\frac{ip}{q}\right)^{2\lambda-1} h(p) \quad (23)$$

(в обоих случаях $q \ll q_0$). Соответствующее таким приближениям сечение (4) обозначим символом $\sigma_\lambda^b(q)$. Примем обозначения $a_b \equiv a$, $r_b \equiv r_{\text{eff}}$ и $\delta_\lambda^b(q) \equiv \delta_\lambda(q)$. Если слабосвязанное состояние отсутствует, используем прежние обозначения a , r_{eff} и $\delta_\lambda(q)$, а сечение $\sigma_\lambda(q)$ определим формулой (10). Заметим, что верны оба неравенства $a_b \neq a$, $r_b \neq r_{\text{eff}}$ или по крайней мере одно из них.

Предположим, что число $2\lambda + 1$ кратно четырем. Используем представления (22).

Случай $2\lambda = -1$ является исключительным: только в этом случае

$$y_\lambda^+(q; ip) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{q}{p},$$

и поэтому сечение $\sigma_\lambda^b(q)$ имеет асимптотику

$$\sigma_\lambda^b(q) \sim \frac{4\pi^2}{q} \frac{1}{[2 \ln(q/p)]^2 + \pi^2} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{4\pi^2}{\ln^2(E/B) + \pi^2}, \quad \frac{q}{p} \rightarrow 0. \quad (24)$$

Сравним ее с асимптотикой (11) сечения $\sigma_\lambda(q)$ в случае, когда слабосвязанное состояние отсутствует. Если $q < p$, то $|\ln(q/p)| < |\ln(q/q_0)|$, и поэтому $\sigma_\lambda^b(q) > \sigma_\lambda(q)$ при $q < p$.

Перечислим особенности поведения фазы $\delta_\lambda^b(q)$ при $2\lambda = -1$, порожденные представлением (22). Если $r_b > 0$, то производная $\partial_q \delta_\lambda^b(q)$ отрицательна и велика по модулю, поэтому при $q/p \rightarrow 0$ фаза $\delta_\lambda(q)$ монотонно и быстро убывает, как $(\pi/2) \ln(q/p)$. При условии $r_b \ll -2/(\pi q_0^2)$ производная обращается в нуль в точке

$$q = \sqrt{\frac{2}{\pi r_b}} \ll q_0,$$

поэтому в той же точке фаза $\delta_\lambda^b(q)$ имеет локальный минимум.

Отметим, что из приближения (22) при $2\lambda = -1$ следует менее точное приближение

$$\text{ctg } \delta_\lambda^b(q) \approx \frac{1}{\pi} \ln \frac{E}{B}, \quad \lambda = -\frac{1}{2}, \quad \frac{E}{B} \rightarrow 0,$$

которое впервые получено в работе [37] и использовалось в недавних работах [38], [39], по-видимому, из-за того, что авторам неизвестно более хорошее приближение.

Если $2\lambda = 3, 7, \dots$, то согласно формулам (22) в малой ϵ -окрестности $(p - \epsilon, p + \epsilon)$, $0 < \epsilon \ll p$, точки p функция $y_\lambda^+(q; ip)$ близка к функции $(2/\pi) \ln(q/p)$ и равна нулю в точке $q = p$, как и в рассмотренном выше случае $2\lambda = -1$. Поэтому в точке $q = p$

$$\operatorname{ctg} \delta_\lambda^b(q) \approx p^{1-2\lambda} r_b, \quad \sigma_\lambda^b(q) \approx (2 - \delta_{2\lambda, -1}) \frac{4p^{4\lambda-3}}{p^{4\lambda-2} + r_b^2}, \quad 2\lambda = -1, 3, 7, \dots \quad (25)$$

Если $|r_b| \ll p^{2\lambda-1}$, то в этой точке значение фазы $\delta_\lambda^b(q)$ близко к числу, кратному $\pi/2$, а сечение $\sigma_\lambda^b(q)$ по порядку величины равно $O(1/p)$ и поэтому довольно велико. Сравним такое сечение $\sigma_\lambda^b(p)$ с сечением $\sigma_\lambda(q)$, когда $2\lambda = 3, 7, \dots$. По формуле (10) находим $\sigma_\lambda(q) \approx 8a^2 p^{4\lambda+1}$. Следовательно, отношение $\sigma_\lambda^b(p)/\sigma_\lambda(p)$ по порядку величины равно $O(1/p^{4\lambda+2})$ и поэтому велико и возрастает при увеличении числа λ .

Предположим, что число $2\lambda + 1$ не кратно четырем. Используем формулы (23).
Случай $2\lambda = 1$ является особым: только в этом случае

$$y_\lambda^-(q; ip) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{q}{p},$$

и поэтому для сечения $\sigma_\lambda^b(q)$ верно приближение

$$\sigma_\lambda^b(q) \approx \frac{8(\pi a_b)^2 q^3}{[2a_b q^2 \ln(q/p) - \pi(1 + q^2/p^2)]^2 + (a_b \pi q^2)^2}, \quad q \ll q_0. \quad (26)$$

Сравнив его с приближением (10) сечения $\sigma_\lambda(q)$, заключаем, что при $q < p$ из неравенства $|\ln(q/p)| < |\ln(q/q_0)|$ следует соотношение $\sigma_\lambda^b(q) > \sigma_\lambda(q)$.

Обсудим особенности поведения фазы $\delta_\lambda^b(q)$ в случае $2\lambda = 1$, обусловленные приближением (23). Если $a_b > 0$, то производная $\partial_q \delta_\lambda^b$ отрицательна и по порядку величины равна $O(-a_b q)$, поэтому фаза $\delta_\lambda^b(q)$ монотонно убывает, как $O(-a_b q^2)$. При условии $a_b \ll -\pi/q_0^2$ производная $\partial_q \delta_\lambda^b(q)$ равна нулю в точке

$$q = \sqrt{-\frac{\pi}{a_b}} \ll q_0,$$

поэтому в этой точке фаза $\delta_\lambda^b(q)$ имеет локальный максимум.

Пусть $2\lambda = 5, 9, \dots$. Тогда согласно (22) в малой ϵ -окрестности $(p - \epsilon, p + \epsilon)$, $\epsilon \ll p$, точки p функция $y_\lambda^+(q; ip)$ близка к функции $(2/\pi) \ln(q/p)$ и равна нулю в точке $q = p$, как и в исследованном выше случае $2\lambda = 1$. Поэтому в точке $q = p$ верны следующие аппроксимации:

$$\operatorname{ctg} \delta_\lambda^b(q) \approx -\frac{2}{a_b} p^{-2\lambda-1}, \quad \sigma_\lambda^b(q) \approx 8 \frac{a_b^2 p^{4\lambda+1}}{a_b^2 p^{4\lambda+2} + 4}, \quad 2\lambda = 1, 5, 9, \dots \quad (27)$$

Если $|a_b| \gg 2/p^{2\lambda+1}$, то в этой точке значение фазы $\delta_\lambda^b(q)$ близко к числу, кратному $\pi/2$, а сечение $\sigma_\lambda^b(q)$ по порядку величины равно $O(1/p)$ и поэтому довольно велико. Сравним такое сечение $\sigma_\lambda^b(p)$ с сечением $\sigma_\lambda(q)$ при $2\lambda = 5, 9, \dots$. По формуле (10) находим $\sigma_\lambda(q) \approx 8a^2 p^{4\lambda+1}$. Следовательно, отношение $\sigma_\lambda^b(p)/\sigma_\lambda(p)$ по порядку величины равно $O(1/p^{4\lambda+2})$ и поэтому велико и возрастает при увеличении числа λ .

Теперь предположим, что при данном значении λ уравнение (13) имеет два корня p_1 и p_2 , отличные от корней уравнения (12). Тогда существуют два слабосвязанных состояния $|ip_1, \lambda\rangle$ и $|ip_2, \lambda\rangle$ с энергиями связи $B_j = p_j^2$, $j = 1, 2$. Выведем приближенное представление функции $\text{ctg } \delta_\lambda(q)$ для состояния рассеяния $|q, \lambda\rangle$ через его энергию $E = q^2$, энергии связи B_1, B_2 и константу $E_0 \equiv q_0^2$. Для этого в уравнении (13) положим сначала $p = p_1$, а затем $p = p_2$. Два полученных таким образом соотношения считаем системой уравнений относительно неизвестных коэффициентов a и r_{eff} . Решив эту систему, выведем представления этих коэффициентов как функций аргументов p_1 и p_2 :

$$\begin{aligned} a_b &= \frac{p_2^2 - p_1^2}{(ip_1)^{2\lambda+1} p_2^2 h(p_1) - (ip_2)^{2\lambda+1} p_1^2 h(p_2)}, \\ r_b &= 2 \frac{(ip_1)^{2\lambda+1} h(p_1) - (ip_2)^{2\lambda+1} h(p_2)}{p_2^2 - p_1^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Затем в приближении (9) заменим длину рассеяния a и эффективный радиус r_{eff} такими функциями. В итоге получим искомое представление

$$\text{ctg } \delta_\lambda^b(q) \approx \frac{1}{\pi} \ln \frac{E}{E_0} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1,2} i^{2(\lambda+j)+1} \left(\frac{B_j}{E} \right)^{\lambda+1/2} \frac{E + B_j}{B_2 - B_1} \ln \frac{B_j}{E_0}. \quad (29)$$

Сформулируем основные результаты выполненного выше анализа фаз и сечений. При любых значениях длин рассеяния a_b , a и эффективных радиусов r_b , r_{eff} в области $q < p$ в случае $2\lambda = \pm 1$ сечение $\sigma_\lambda^b(q)$ околопорогового рассеяния при наличии слабосвязанного состояния $|ip, \lambda\rangle$ заметно превышает сечение рассеяния $\sigma_\lambda(q)$ при отсутствии такого состояния. Этот же вывод остается справедливым в случае $2\lambda = 3, 7, \dots$ или в случае $2\lambda = 5, 9, \dots$ при соответствующем дополнительном условии $|r_b| \ll p^{2\lambda-1}$ или $|a_b| \gg 2/p^{2\lambda+1}$. Согласно работе [36] такие условия являются достаточными для существования слабосвязанного состояния, но, как показано выше, из всех таких состояний эти условия выделяют состояния, при наличии которых сечение $\sigma_\lambda^b(q)$ обладает особым свойством: $\sigma_\lambda^b(q) = O(1/p)$, если $q = p$.

Поясним прикладное значение формул (25)–(29).

Используя формулы (25)–(27), можно решить две задачи: найти значения длины рассеяния a_b и эффективного радиуса r_b по измеренным значениям энергии связи $B = p^2$ слабосвязанного состояния $|ip, \lambda\rangle$ и сечения рассеяния $\sigma_\lambda^b(p)$ при энергии $E = B$ либо предсказать оценки величин B и $\sigma_\lambda^b(p)$, используя предварительно вычисленные значения a_b и r_b .

Предположим, что имеются два слабосвязанных состояния и известны модули p_1, p_2 их волновых чисел или же энергии связи B_1, B_2 . Тогда, используя представление (29), можно экстраполировать фазу $\delta_\lambda^b(p)$ и сечение $\sigma_\lambda^b(p)$ рассеяния в состоянии $|q, \lambda\rangle$ в область околопороговых значений энергий $E \ll E_0 = q_0^2$. При том же предположении несложно сначала вычислить длину рассеяния и эффективный радиус по формулам (28), а затем исследовать уравнение (13) на наличие третьего корня p_3 и найти волновое число p_s особого состояния рассеяния $|p_s, \lambda\rangle$ как корень $p_s = p$ уравнения (12).

Рис. 2. Зависимость сечения $\sigma_{\lambda}^b(q)$ от квантовых чисел q и λ при наличии слабосвязанных состояний $|ip_1, \lambda\rangle$, $p_1 = 0.1$, и $|ip_2, \lambda\rangle$, $p_2 = 0.2$: отношение $\sigma_{\lambda}^b(q)/\sigma_{\lambda}^u(q)$ при $2\lambda = -1$ (а); сечение σ_{λ}^b при $2\lambda = -1$ (б); отношения $\sigma_{\lambda}^b(q)/\sigma_{\lambda}^u(q)$ при $2\lambda = 1, 3, 5$ – сплошная, штрихпунктирная и пунктирная кривые соответственно (в); сечения $\sigma_{\lambda}^b(q)$ при $2\lambda = 1, 3, 5$ – сплошная, штрихпунктирная и пунктирная кривые соответственно (г). На рис. “б” и “г” штриховая линия – унитарный предел $\sigma_{\lambda}^u(q)$.

Приведем вычисленные таким способом значения корней p_3 и p_s в случае $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$. Корень p_3 существует при условии $2\lambda \geq 3$ и близок к единице: $p_3 = 1.039506\dots$, если $2\lambda = 3$, и $p_3 = 1.120375\dots$, если $2\lambda = 5$. При условии $2\lambda \leq 3$ имеется один корень:

$$p_s = \begin{cases} 0.070716\dots, & \text{если } 2\lambda = -1, \\ 0.282842\dots, & \text{если } 2\lambda = 1, \\ 1.191663\dots, & \text{если } 2\lambda = 3. \end{cases}$$

В случае $2\lambda = 5$ число корней равно двум, а их значения таковы: $p_s = 0.227100\dots$ и $p_s = 1.120336\dots$. При тех же значениях $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$ зависимость сечения $\sigma_{\lambda}^b(q)$, вычисленного в приближении (29), от квантовых чисел q и λ показана на

рис. 2. Видно, что сечение $\sigma_\lambda^b(q)$ не имеет особенностей при волновом числе q , равном модулю p_1 или p_2 первого или второго слабосвязанных состояний, и близко к своему унитарному пределу $\sigma_\lambda^u(q)$ только в малой окрестности вполне определенного волнового числа q , совпадающего с волновым числом p_s соответствующего особого состояния рассеяния.

3.3. Резонансное рассеяние. Приступим к анализу фазы $\delta_\lambda(q)$ и сечения $\sigma_\lambda(q)$ околоторгового упругого рассеяния в состоянии $|q, \lambda\rangle$ при наличии околоторгового резонансного состояния $|q_r, \lambda\rangle$.

Предположим, что значения λ , a и r_{eff} заданы, и при таких значениях система уравнений (14) и (15) имеет единственное решение (p, ω) , но уравнения (13) и (12) не имеют корней, по крайней мере на полуинтервале $(0, p + \epsilon]$, $\epsilon/p \ll 1$. При таких предположениях квантовая частица имеет одно околоторговое резонансное состояние $|(p, \omega), \lambda\rangle$, но модули волновых чисел ее особых состояний рассеяния и слабосвязанных состояний превышают число $p + \epsilon$.

Заметим, что из системы уравнений (14) и (15) следуют равенства

$$\begin{aligned} a &= -p^{-2\lambda-1} \frac{\sin 2\omega}{[1 + (2/\pi)\omega] \cos(2\lambda - 1)\omega + h(p) \sin(2\lambda - 1)\omega}, \\ r_{\text{eff}} &= -2p^{2\lambda-1} \operatorname{cosec}(2\omega) \left\{ \left(1 + \frac{2}{\pi}\omega \right) \cos(2\lambda + 1)\omega + h(p) \sin(2\lambda + 1)\omega \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Поэтому приближение (9) функции $\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q)$ можно представить через координаты p и ω волнового числа q_r резонансного состояния $|q_r, \lambda\rangle$. Используя функцию

$$\eta(\omega) \equiv \frac{\pi + 2\omega}{\sin 2\omega},$$

запишем это представление в виде трех соотношений

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \delta_\lambda(q; p, \omega) &\approx h(q) - h(p) z_\lambda^+(q) - z_\lambda^-(q), \\ z_\lambda^+(q) &\equiv \left(\frac{p}{q} \right)^{2\lambda+1} \operatorname{cosec}(2\omega) \left\{ \left[\left(\frac{q}{p} \right)^2 - 1 \right] \sin(2\lambda + 1)\omega + 2 \sin \omega \cos 2\lambda\omega \right\}, \\ z_\lambda^-(q) &\equiv \left(\frac{p}{q} \right)^{2\lambda+1} \eta(\omega) \left\{ \left[\left(\frac{q}{p} \right)^2 - 1 \right] \cos(2\lambda + 1)\omega - 2 \sin \omega \sin 2\lambda\omega \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Эти соотношения позволяют определить, имеет ли фаза рассеяния $\delta_\lambda(q; p, \omega)$ значения, кратные числу $\pi/2$, или локальные экстремумы, порожденные наличием резонансного состояния. При любом заданном значении λ решение такой задачи сводится к численному анализу простых и кратных корней уравнения $\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q; p, \omega) = 0$ как функций полярных координат p и ω резонансного состояния.

Для примера найдем кратный корень такого уравнения в случае $2\lambda = \pm 1$. Заметим, что только в этом случае функция $z_\lambda^+(q)$ тождественно равна единице. Поэтому первая из формул (31) существенно упрощается и принимает вид

$$\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q; p, \omega) \approx \frac{1}{\pi} \left\{ 2 \ln \frac{q}{p} + i^{2\lambda+1} \eta(\omega) \left[\cos 2\omega - \left(\frac{p}{q} \right)^{4\lambda} \right] \right\}. \quad (32)$$

Следовательно, сечение (4) аппроксимируется формулой

$$\sigma_\lambda(q; p, \omega) \approx \frac{1}{q} \frac{4\pi^2(2 - \delta_{2\lambda, -1})}{\{2 \ln(q/p) + i^{2\lambda+1}\eta(\omega)[\cos 2\omega - (p/q)^{4\lambda}]\}^2 + \pi^2}, \quad (33)$$

а для уравнения $\text{ctg } \delta_\lambda(q; p, \omega) = 0$ эталонным является довольно простое уравнение

$$2 \ln \frac{q}{p} = i^{2\lambda+1}\eta(\omega) \left[\left(\frac{p}{q} \right)^{4\lambda} - \cos 2\omega \right].$$

Это уравнение имеет кратный корень $q = q_\lambda \equiv p[2\eta(\omega)]^\lambda$ тогда и только тогда, когда угол ω равен корню ω_t уравнения

$$\ln \eta(\omega) = \eta(\omega) \cos 2\omega - 1.$$

Существует лишь один такой корень: $\omega = \omega_t = 0.480189 \dots$. Следовательно, все резонансные состояния $|(p, \omega), \pm 1/2\rangle$ с любым значением координаты $p \ll q_0$, но с углом $\omega = \omega_t$ являются особыми в следующем смысле: при наличии любого такого состояния фаза рассеяния $\delta_\lambda(q; p, \omega_t)$ в состоянии рассеяния $|q, \pm 1/2\rangle$ имеет локальный экстремум в точке $q = q_\lambda = p[\eta(\omega_t)]^\lambda$ – минимум или максимум, если $2\lambda = -1$ или $2\lambda = 1$. Так как $\eta(\omega_t) = 2.140908 \dots > 1$, то $q_\lambda < p$, если $2\lambda = -1$, и $q_\lambda > p$, если $2\lambda = 1$. В точке $q = q_\lambda$ равны нулю и функция $\text{ctg } \delta_\lambda(q; p, \omega_t)$, и ее первая производная, а вторая производная принимает значение $2(2 - \delta_{2\lambda, -1})/\pi q_\lambda^2$. Поэтому в малой ϵ -окрестности $(q_\lambda - \epsilon, q_\lambda + \epsilon)$, $0 < \epsilon \ll q_\lambda$, точки q_λ верно приближение функции $\text{ctg } \delta_\lambda(q; p, \omega_t)$, $2\lambda = \pm 1$, частичной суммой ее ряда Тейлора с двумя нулевыми слагаемыми и третьим слагаемым, отличным от нуля:

$$\text{ctg } \delta_\lambda(q; p, \omega_t) \approx \partial_q^2 \text{ctg } \delta_\lambda(q; p, \omega_t) \Big|_{q=q_\lambda} \frac{(q - q_\lambda)^2}{2} = (2 - \delta_{2\lambda, -1}) \frac{(q/q_\lambda - 1)^2}{\pi}.$$

Соответствующее сечение (4) в случае $2\lambda = \pm 1$ в обозначениях $E = q^2$ и $E_\lambda \equiv q_\lambda^2$ имеет вид

$$\sigma_\lambda(q; p, \omega_t) \approx \sigma_\lambda^t(q; q_\lambda), \quad \sigma_\lambda^t(q; q_\lambda) \equiv \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{4\pi^2(2 - \delta_{2\lambda, -1})}{2^{2\lambda+1}(\sqrt{E/E_\lambda} - 1)^4 + \pi^2}. \quad (34)$$

Это сечение обладает интересной с экспериментальной точки зрения особенностью: оно близко к своему унитарному пределу в любой точке q области $(q_\lambda - \epsilon, q_\lambda + \epsilon)$, $0 < \epsilon \ll q_\lambda$, с точностью порядка $O((q/q_0)^2 + (\epsilon/q_\lambda)^3)$.

Итак, случай $2\lambda = \pm 1$ исследован: показано, что в этом случае аппроксимации (32) и (33) справедливы при любых допустимых значениях координат (p, ω) волнового числа q_r резонансного состояния $|q_r, \lambda\rangle$, а приближение (34) верно при любом значении координаты p , но при $\omega = \omega_t$.

При $2\lambda > 1$ первая из формул (31) содержит довольно сложные функции $z_\lambda^\pm(q)$. Поэтому простые приближения для парциальных фаз и сечений можно получить лишь в двух пределах $\omega \rightarrow +0$ и $\omega \rightarrow \pi/2 - 0$. Приступим к исследованию этих пределов.

Сформулируем нашу первую задачу следующим образом: используя представление (31), найти приближение сечения (4) в малой ϵ -окрестности $(p - \epsilon, p + \epsilon)$, $0 < \epsilon \ll p$, точки p при условии $2|\lambda|\omega \ll 1$ и любом наперед заданном значении λ .

Прежде чем приступить к решению, стоит пояснить физический смысл условия $2|\lambda|\omega \ll 1$. Вследствие определений (5) и (6) это условие означает, что в комплексной плоскости переменной q волновое число $q_r = q_1 - iq_2$, $|q_r| = p$, резонансного состояния $|q_r, \lambda\rangle$ лежит вблизи положительной части вещественной полуоси ($q_2 \ll q_1$) тем ближе к оси, чем больше квантовое число λ . Поэтому ширина резонанса Γ мала, время жизни $\hbar/\Gamma$ обсуждаемого резонансного состояния велико, а резонансная энергия E_r является положительной величиной. Такие долгоживущие резонансные состояния особенно интересны с экспериментальной точки зрения.

Перейдем к решению поставленной задачи. В формулах (31) для функций $\sin 2\omega$ и $\sin 2\lambda\omega$ мы не будем использовать аппроксимации, все остальные тригонометрические функции заменим их разложениями в ряды Тейлора с центром в точке $\omega = 0$; если $2\lambda \neq 1$, то функцию $(q/p)^{2\lambda+1}$ аппроксимируем суммой двух первых слагаемых ее ряда Тейлора с центром в точке $q = p$. В получившемся разложении функции $\text{ctg } \delta_\lambda(q; p, \omega)$ оставим только те слагаемые, которые неограниченно возрастают или убывают, как $O(\epsilon/p)$ или $O(2|\lambda|\omega)$. Итоговое представление будет искомым приближением

$$\text{ctg } \delta_\lambda(q; p, \omega) \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{q}{p} + \left[1 - \left(\frac{q}{p} \right)^2 \right] \text{cosec } 2\omega + \sin 2\lambda\omega, \quad (35)$$

которому в обозначениях (6) соответствует сечение

$$\sigma_\lambda(q; p, \omega) \approx \frac{4}{\sqrt{E}} (2 - \delta_{2\lambda, -1}) \frac{(\Gamma/2)^2}{[E - E_r - (\Gamma/2) \sin 2\lambda\omega]^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad (36)$$

Отметим, что полученные приближения (35) и (36) содержат функцию $\sin 2\lambda\omega$ и верны с абсолютной точностью порядка $O(2|\lambda|\omega + \epsilon/p)^2$ для любого λ , но лишь при условиях $2|\lambda|\omega \ll 1$ и $|q - p| < \epsilon \ll p$.

Обсудим особенности, фазы и сечения, порожденные приближениями (35), (36) и функцией $\sin 2\lambda\omega$. Значения q_λ и E_λ волнового числа и соответствующей энергии, при которых фаза кратна $\pi/2$, а сечение достигает своего максимального значения, равного унитарному пределу, зависят от квантового числа λ следующим образом:

$$q_\lambda \approx p(1 + \sin 2\omega \sin 2\lambda\omega)^{1/2}, \quad E_\lambda = q_\lambda^2 \approx E_r + \frac{\Gamma}{2} \sin 2\lambda\omega.$$

Поэтому $q_\lambda < p$ и $E_\lambda < E_r$ только в случае $2\lambda = -1$; если $2\lambda \geq 1$, то $q_\lambda > p$ и $E_\lambda > E_r$. Физическая причина, порождающая указанные неравенства, заключается в том, что в исходном уравнении Шредингера (2) слагаемое $\lambda(\lambda + 1)/x^2$ при $\lambda = -1/2$ является притягивающим (центростремительным) барьером, а при всех остальных значениях λ – отталкивающим (центробежным) барьером. Неравенство $\Gamma \ll E_r$ обуславливает пикообразное поведение сечения (36) вблизи точки $E = E_r$: в ее малой окрестности это сечение имеет локальный экстремум.

Наша следующая задача такова: используя формулы (31), найти приближение сечения (4) в ϵ -окрестности $(p - \epsilon, p + \epsilon)$, $0 < \epsilon \ll p$, точки p при условии $|\lambda|(\pi - 2\omega) \ll 1$ и любом наперед заданном значении λ .

Выведем физические следствия ограничения $|\lambda|(\pi - 2\omega) \ll 1$ для угла ω . В силу определений (5) и (6) при таком ограничении волновое число $q_r = q_1 - iq_2$, $|q_r| = p$, резонансного состояния $|q_r, \lambda\rangle$ расположено в комплексной плоскости переменной q вблизи отрицательной части мнимой оси ($q_1 \ll q_2$) тем ближе к оси, чем больше

квантовое число λ . Поэтому резонансная энергия $E_r = q_1^2 - q_2^2$ является отрицательной величиной и выполняется соотношение $\Gamma \ll |E_r|$.

Приступим к решению. В формулах (31) функцию $\sin 2\omega$ не аппроксимируем, все остальные тригонометрические функции заменим разложениями в ряды Тейлора с центром в точке $\omega = \pi/2$, пренебрежем слагаемыми порядка $O(|\lambda|(\pi - 2\omega) + \epsilon/p)$. В итоге получим приближение

$$\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q; p, \omega) \approx 2i^{2\lambda-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{2\lambda+1} \left[\frac{q^2}{p^2} + 1\right] \operatorname{cosec} 2\omega, \quad (37)$$

справедливое при оговоренных выше условиях $|\lambda|(\pi - 2\omega) \ll 1$ и $|q - p| < \epsilon \ll p$.

Следовательно, при тех же условиях и при любом квантовом числе λ соответствующее сечение (4) приближается формулой

$$\sigma_\lambda(q; p, \omega) \approx \frac{4}{\sqrt{E}} (2 - \delta_{2\lambda, -1}) \frac{(\Gamma/2)^2}{4(|E_r|/E)^{2\lambda+1} (E + |E_r|)^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad (38)$$

Из приближения (37) следует, что вблизи точки $q = p$ фаза $\delta_\lambda(q; p, \omega)$ является знакопостоянной и гладкой функцией при любом λ . Согласно формуле (38) соответствующее такой фазе сечение $\sigma_\lambda(q; p, \omega)$ вблизи точки $E \approx |E_r|$ монотонно убывает с ростом энергии $E = q^2$, если $2\lambda = -1$, и монотонно возрастает, если $2\lambda \geq 1$. В рассматриваемом случае резонансная энергия E_r отрицательная, поэтому и фаза $\delta_\lambda(q; p, \omega)$, и сечение $\sigma_\lambda(q; p, \omega)$ являются монотонными функциями и ведут себя так же, как фаза и сечение упругого рассеяния при наличии слабосвязанного состояния с энергией связи $B = |E_r|$.

Наглядное представление о всех выявленных выше особенностях сечения околопорогового рассеяния $\sigma_\lambda(q; p, \omega)$ в состояниях $|q, \pm 1/2\rangle$ при наличии резонансных состояний $|p, \omega\rangle, \pm 1/2\rangle$ при $p = 0.2$ и для разных значений угла ω дает рис. 3. На нем сплошными кривыми изображены сечения (4), вычисленные в приближении (31).

Сплошные кривые на рис. 3а и 3в – графики сечений $\sigma_\lambda(q; p, \omega)$ при небольших значениях угла $\omega = 0.1$, $\omega = 0.2$ и $\omega = 0.3$ – имеют острые пики и касаются штриховых кривых, изображающих соответствующие унитарные пределы $\sigma_\lambda^u(q)$ при $2\lambda = \pm 1$. Как видно, абсцисса точки касания лежит справа или слева от точки $q = p = 0.2$, если $2\lambda = -1$ или $2\lambda = 1$ соответственно. Поведение кривых на этих рисунках полностью соответствует аппроксимации (36), полученной при условии $2|\lambda|\omega \ll 1$.

Сплошные кривые с номером 1 на рис. 3б и 3г – графики сечений $\sigma_\lambda(q; p, \omega)$ в особом случае $\omega = \omega_t$ – близки к графикам соответствующих унитарных пределов $\sigma_\lambda^u(q)$ в области $0.04 < q < 0.14$ или $0.3 < q < 0.7$, если $2\lambda = -1$ или $2\lambda = 1$ соответственно. Эта особенность подтверждает справедливость приближения (34).

Сплошные кривые с номерами 2, 3 на рис. 3б и 3г изображают сечения $\sigma_\lambda(q; p, \omega)$ при довольно больших значениях угла $\omega = 0.8$ и $\omega = 1$. Как видно, при таких углах вблизи точки $q = p = 0.2$ сечение $\sigma_\lambda(q; p, \omega)$ монотонно убывает в случае $2\lambda = -1$ и монотонно возрастает в случае $2\lambda = 1$. Эти особенности сечения подтверждают приближение (38), полученное при условии $|\lambda|(\pi - 2\omega) \ll 1$.

Более подробную информацию о поведении сечений $\sigma_\lambda(q; p, \omega)$ при $2\lambda = \pm 1$ в особом случае $\omega = \omega_t$ можно извлечь из рис. 4. На нем изображены графики отношений сечений $\sigma_\lambda(q; p, \omega_t)$ и $\sigma_\lambda^t(q; p, \omega_t)$ к унитарному пределу $\sigma_\lambda^u(q)$, вычисленные при

Рис. 3. Сечения резонансного рассеяния $\sigma_\lambda(q; p, \omega)$, $p = 0.2$, в следующих случаях: при $2\lambda = -1$ и $\omega = 0.1$, $\omega = 0.2$, $\omega = 0.3$ – кривые 1, 2, 3 (а); при $2\lambda = -1$ и $\omega = 0.480189$, $\omega = 0.8$, $\omega = 1$ – кривые 1, 2, 3 (б); при $2\lambda = 1$ и $\omega = 0.1$, $\omega = 0.2$, $\omega = 3$ – кривые 1, 2, 3 (в); при $2\lambda = 1$ и $\omega = 0.480189$, $\omega = 0.8$, $\omega = 1$ – кривые 1, 2, 3 (г). Унитарные пределы $\sigma_\lambda^u(q)$ при $2\lambda = \pm 1$ на всех рисунках – штриховые кривые.

$2\lambda = \pm 1$ и $p = 0.2$ по формулам (4), (31) и (34), в которых $q_\lambda = 0.096653 \dots < p$, если $2\lambda = -1$, и $q_\lambda = 0.413851 \dots > p$, если $2\lambda = 1$. Равенство $\sigma_\lambda(q; p, \omega) = \sigma_\lambda^u(q)$ в случае $2\lambda = -1$ выполняется при следующих значениях $q_\pm$ волнового числа q : если $2\lambda = -1$, то $q_- \approx 0.06$, а $q_+ \approx 0.12$; если $2\lambda = 1$, то $q_- \approx 0.32$, а $q_+ \approx 0.68$. Согласно рис. 4 приближение $\sigma_\lambda(q) \approx \sigma_\lambda^t(q)$ верно в области $q_- < q < q_+$, но неприменимо при малых ($q < q_-$) или больших ($q > q_+$) значениях волнового числа q .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты настоящей работы. В рамках приближения эффективного радиуса (9), (10) впервые удалось выявить и исследовать низкоэнергетические особенности всех ($2\lambda = -1, 1, 3, \dots$) парциальных фаз и сечений двумерного рассеяния квантовой частицы центральным короткодействующим потен-

Рис. 4. Зависимость от q отношений $\sigma_\lambda(q; p, \omega_t)/\sigma_\lambda^u(q)$ (сплошные кривые) и $\sigma_\lambda^t(q; q_\lambda)/\sigma_\lambda^u(q)$ (штриховые кривые) при $p = 0.2$ в случаях $2\lambda = -1$ (а) и $2\lambda = 1$ (б).

циалом произвольной формы. В результате выполненных исследований получены удобные для практических приложений низкоэнергетические приближения парциальных фаз и сечений (16)–(38) упругого рассеяния квантовой частицы при наличии особых состояний рассеяния, слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний. При выводе этих приближений считалось, что длина рассеяния a является конечной ненулевой константой. Для полноты исследования преодолеем эти ограничения.

В случае $a = 0$ асимптотическое представление (7) функции эффективного радиуса $K(q)$ теряет смысл. Как показано в работе [35], эту функцию и ее параметры a и r_{eff} следует переопределить и использовать функцию эффективного радиуса

$$K^+(q) \equiv q^{2\lambda+3}[\text{ctg } \delta_\lambda(q) - h(q)] = -\frac{1}{a^+} + \frac{q^2}{2}r_{\text{eff}}^+ + \dots$$

с ненулевой и ограниченной по модулю длиной рассеяния a^+ . Функция $K(q)$ становится функцией $K^+(q)$ в результате замен $\lambda \rightarrow \lambda + 1$, $a \rightarrow a^+$ и $r_{\text{eff}} \rightarrow r_{\text{eff}}^+$. Следовательно, в рассматриваемом случае $a = 0$ после такой же замены в правых частях формул (16)–(38) получатся соответствующие приближения парциальных фаз и сечений упругого рассеяния квантовой частицы в состоянии $|q, \lambda\rangle$.

В случае $|a| = \infty$ согласно работе [35] вместо функции эффективного радиуса $K(q)$ следует использовать функцию эффективного радиуса

$$K^-(q) \equiv q^{2\lambda-1}[\text{ctg } \delta_\lambda(q) - h(q)] = -\frac{1}{a^-} + \frac{q^2}{2}r_{\text{eff}}^- + \dots,$$

в которой длина рассеяния a^- удовлетворяет условию $0 < |a^-| < \infty$. После замен $\lambda \rightarrow \lambda - 1$, $a \rightarrow a^-$ и $r_{\text{eff}} \rightarrow r_{\text{eff}}^-$ функция $K(q)$ переходит в функцию $K^-(q)$. Поэтому в обсуждаемом случае $|a| = \infty$ нужно выполнить такую же замену в правых частях аппроксимаций (16)–(38). В итоге получатся искомые приближения парциальных фаз и сечений упругого рассеяния квантовой частицы в состоянии $|q, \lambda\rangle$.

В заключение отметим, что выполненные в настоящей работе исследования представляются актуальными в связи с бурным развитием теоретической и экспериментальной физики ультрахолодных атомарных и молекулярных газов в магнитооп-

тических ловушках [40], [41]. Во многих из таких ловушек движение частиц газа можно с хорошей точностью считать двумерным. Для численного и качественного анализа двумерного столкновения двух частиц такого газа предлагается использовать полученные в настоящей работе низкоэнергетические аппроксимации (16)–(38).

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1974.
- [2] Дж. Тейлор, *Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений*, Мир, М., 1975.
- [3] В. В. Бабилов, *Метод фазовых функций в квантовой механике*, Наука, М., 1976.
- [4] H. A. Bethe, *Phys. Rev.*, **76**:1 (1949), 38–50.
- [5] Г. Ф. Друкарев, *ЖЭТФ*, **80**:2 (1981), 537–540.
- [6] S. A. Rakityansky, N. Elander, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:22 (2009), 225302, 18 pp.
- [7] В. В. Пупышев, *ЯФ*, **76**:2 (2013), 199–215.
- [8] В. В. Пупышев, *ЯФ*, **77**:5 (2014), 686–698.
- [9] Л. Д. Ландау, Я. А. Смородинский, *ЖЭТФ*, **14** (1944), 269–275.
- [10] В. В. Пупышев, О. П. Соловцова, *ЭЧАЯ*, **27**:4 (1996), 859–929.
- [11] В. В. Пупышев, *ЭЧАЯ*, **28**:6 (1997), 1457–1528.
- [12] Л. Д. Блохинцев, И. Борбей, Э. И. Долинский, *ЭЧАЯ*, **8**:6 (1977), 1189–1245.
- [13] Л. Д. Блохинцев, В. О. Еременко, *ЯФ*, **71**:7 (2008), 1247–1253.
- [14] L. D. Blokhintsev, V. I. Kukulin, A. A. Sakharuk, D. A. Savin, E. V. Kuznetsova, *Phys. Rev. C*, **48**:5 (1993), 2390–2398.
- [15] Ю. В. Орлов, Б. Ф. Иргазиев, Л. И. Никитина, *ЯФ*, **73**:5 (2010), 787–802.
- [16] J.-M. Sparenberg, P. Capel, D. Baye, *Phys. Rev. C*, **81**:1 (2010), 011601, 4 pp.
- [17] R. Yarmukhamedov, D. Baye, *Phys. Rev. C*, **84**:2 (2011), 024603, 7 pp.
- [18] Л. Д. Блохинцев, *ЯФ*, **74**:7 (2011), 1008–1012.
- [19] Л. Д. Блохинцев, *Изв. РАН. Сер. физ.*, **76**:4 (2012), 481–484.
- [20] Л. Д. Блохинцев, Д. А. Савин, *ЯФ*, **77**:3 (2014), 376–386.
- [21] Й. Линдхард, *УФН*, **99**:2 (1969), 249–296.
- [22] А. М. Таратин, *ЭЧАЯ*, **29**:5 (1998), 1063–1118.
- [23] П. М. Красовицкий, Н. Ж. Такибаев, *Изв. РАН. Сер. физ.*, **70**:5 (2006), 709–712.
- [24] Yu. N. Demkov, J. D. Meyer, *Eur. Phys. J. B*, **42**:3 (2004), 361–365.
- [25] O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, V. L. Derbov, P. M. Krassovitskiy, S. I. Vinitsky, *ЯФ*, **72**:5 (2009), 811–821.
- [26] B. Simon, *Ann. Phys.*, **97**:2 (1976), 279–288.
- [27] I. R. Lapidus, *Am. J. Phys.*, **50**:1 (1982), 45–47.
- [28] P. G. Averbuch, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **19**:12 (1986), 2325–2335.
- [29] B. J. Verhaar, L. P. H. de Goeij, J. P. H. W. van den Eijnde, E. J. D. Vredenburg, *Phys. Rev. A*, **32**:3 (1985), 1424–1429.
- [30] N. N. Khuri, A. Martin, J.-M. Rishard, T. T. Wu, *J. Math. Phys.*, **50**:7 (2009), 072105, 17 pp., arXiv:0812.4054.
- [31] D. Bollé, F. Gesztesy, *Phys. Rev. A*, **30**:3 (1984), 1279–1293.
- [32] S. K. Adhikari, W. G. Gibson, *Phys. Rev. A*, **46**:7 (1992), 3967–3977.
- [33] S. A. Rakityansky, N. Elander, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:13 (2012), 135209, 28 pp., arXiv:1201.0172.

- [34] В. В. Пупышев, *ЯФ*, **77**:5 (2014), 699–710.
- [35] В. В. Пупышев, *ТМФ*, **180**:3 (2014), 342–367.
- [36] В. В. Пупышев, *ТМФ*, **179**:1 (2014), 102–122.
- [37] M. Randeria, J.-M. Duan, L.-Y. Shieh, *Phys. Rev. B*, **41**:1 (1990), 327–343.
- [38] M. Klawunn, A. Pikovski, L. Santos, *Phys. Rev. A*, **82**:4 (2010), 044701, 4 pp., arXiv: 1008.2444.
- [39] M. Rosenkrantz, W. Bao, *Phys. Rev. A.*, **84**:5 (2011), 050701, 5 pp., arXiv: 1201.6167.
- [40] P. Cladé, C. Ryu, A. Ramanathan, K. Helmerson, W. D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.*, **102**:17 (2009), 170401, 4 pp., arXiv: 0805.3519.
- [41] L. D. Caar, D. DeMille, R. V. Krems, J. Ye, *New J. Phys.*, **11** (2009), 055049, 87 pp.

Поступила в редакцию 19.06.2014,
после доработки 12.08.2014