Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Зайцева, Неравновесная энергия фононов в кристаллах с горячими электронами, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 2, 289–304

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf874>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:52:49

© 1998 г.

Л. А. Зайцева*

НЕРАВНОВЕСНАЯ ЭНЕРГИЯ ФОНОНОВ В КРИСТАЛЛАХ С ГОРЯЧИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

Определена неравновесная энергия фононов, обусловленная деформационным взаимодействием фононов с горячими электронами. Показано, что эта энергия зависит от времени жизни фононов с заданным импульсом. Вычислены времена жизни, определяемые рассеянием фононов на макро- и микропримесях и на электронах. Все расчеты проведены с помощью диаграммной техники Келдыша.

ВВЕДЕНИЕ

Целью работы является получение формулы для средней полной энергии фононов, взаимодействующих с газом горячих электронов. Эта энергия определяет термодинамическую энергию всего кристалла при условии, что горячих электронов в нем достаточно мало.

Электроны, разогретые током или, например, лазером, считаются горячими, если их средняя энергия больше энергии электронов, находящихся в равновесии с решеткой. Предположим, что у электронов в результате электрон-электронных столкновений установилась температура T_e больше температуры фононов T . При этом равновесие имеет место в электронной и фононной подсистемах в отдельности. В целом же система (фононы плюс горячие электроны) неравновесна.

Средняя полная энергия кристалла с горячими электронами состоит из средних полных энергий колебаний решетки и электронов. Взаимодействие фононов с горячими электронами вносит поправки к этим энергиям. Термодинамической энергией кристалла является ее средняя полная энергия, зависящая от температуры. Среднюю энергию колебаний решетки принято называть энергией фононов. Не зависящая от температуры часть средней энергии колебаний решетки является энергией ее нулевых колебаний.

В данной работе основное внимание будет обращено на вычисление неравновесной энергии фононов, обусловленной их взаимодействием с горячими электронами. Эта

*Институт химической физики им. Н. Н. Семенова РАН, Москва, Россия

энергия $\Delta\tilde{E}$ зависит от температур T_e и T . Если она больше энергии свободных фононов $\tilde{E}$ и энергии горячих электронов, то вносит главный вклад в термодинамическую энергию рассматриваемых кристаллов. Конечно, энергия $\Delta\tilde{E}$ при этом должна оставаться поправкой к энергии свободных нулевых колебаний E_0 . Ниже будут выведены условия применимости полученных формул для $\Delta\tilde{E}$ и условия возможности выбора этой энергии в качестве термодинамической энергии кристалла с горячими электронами.

Из-за неравновесности системы в целом для вычисления средней энергии колебаний рассматриваемых кристаллов воспользуемся функциями Келдыша [1, 2]. При равновесии в подсистемах нет необходимости искать неравновесное распределение с помощью замкнутой системы уравнений для полных функций Келдыша. Средняя энергия колебаний кристалла может быть выражена через полную функцию Келдыша в представлении взаимодействия, разложенную в ряд по соответствующей константе. Нулевые функции Келдыша для фононов и электронов в рассматриваемой задаче следует взять равновесными, т.е. зависящими от распределений Планка или Ферми, соответственно. В конечном счете средняя энергия взаимодействующих с электронами фононов окажется функцией двух температур T_e и T .

Забегая вперед, скажем, что при вычислении средней энергии колебаний пришлось столкнуться со следующей трудностью. Выражение для неравновесной энергии фононов во втором порядке по константе деформационного взаимодействия оказалось расходящимся. Это связано с тем, что фононы, участвующие в рассеянии на горячих электронах, нельзя считать свободными. Чтобы добиться сходимости выражения для $\Delta\tilde{E}$, надо учесть конечность времени жизни $\tau(q)$ фононов с заданным импульсом q при их рассеянии на других частицах, например примесях. Величина $1/\tau(q)$ в данном случае определяется мнимой частью полной запаздывающей функции Грина, учитывающей такое рассеяние; $\tau(q)$ определяет, кроме того, затухание нормальных колебаний решетки.

Отметим, что при температурах ниже дебаевской температуры θ зависимость $\tau(q)$ от импульса q существенно влияет на зависимость энергии $\Delta\tilde{E}$ от температуры. В данной работе будут вычислены наиболее короткие времена жизни фононов, связанные с их рассеянием на примесях и электронах. Вычисления времен жизни проводятся также с помощью техники Келдыша.

1. СВЯЗЬ СРЕДНЕЙ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ КОЛЕБАНИЙ КРИСТАЛЛА С ФУНКЦИЯМИ КЕЛДЫША

Полная средняя энергия колебаний решетки является результатом соответствующего усреднения гамильтониана упругих колебаний [3, 4]

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[\rho \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} \right)^2 + \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} c_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial \hat{U}_\alpha}{\partial r_\gamma} \frac{\partial \hat{U}_\beta}{\partial r_\delta} \right]. \quad (1)$$

Здесь $\hat{U}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ – оператор смещений точек среды с координатой $\mathbf{r}$ в направлении α , ρ – плотность среды, $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – тензор модулей упругости. Оператор $\hat{U}(\mathbf{r}, t)$ в (1) учитывает взаимодействие фононов с горячими электронами.

Средняя кинетическая энергия колебаний изолированной решетки равна ее средней потенциальной энергии, поэтому ее полная средняя энергия может быть представлена в виде [3]

$$E = \rho \int d\mathbf{r} \left\langle \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} \right)^2 \right\rangle. \quad (2)$$

Символ $\langle \dots \rangle$ в (2) означает усреднение по стационарным квантовым состояниям свободных фононов и электронов с последующим усреднением по распределениям Гиббса. Первое усреднение связывает E с числами заполнения фононов и электронов [3]. Второе приводит к появлению в формуле для E вместо чисел заполнения распределений Планка и Ферми [4].

Энергию (2) можно выразить через вневременную функцию Келдыша [1, 2]

$$D_{\alpha\beta}^{-+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = -i\rho \langle \hat{U}_\beta(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{U}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle, \quad (3)$$

где усреднение имеет тот же смысл, что и в формуле (2). Действительно, учитывая определение (3), энергию (2) можно записать в виде

$$E = i \int d\mathbf{r} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \text{Sp} D_{\alpha\beta}^{-+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \Big|_{\substack{t_1=t_2 \\ \mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}}}. \quad (4)$$

Технику усреднения $\langle \dots \rangle$ полезно проследить, выводя известную формулу для средней полной энергии E' свободных колебаний решетки [4] непосредственно из выражения (2). Возьмем оператор свободных смещений в виде

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\rho V}} \sum_{\mathbf{q}} \frac{\mathbf{q}}{q\sqrt{\omega_{\mathbf{q}}}} [\hat{c}_{\mathbf{q}} e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{q}}t)} + \hat{c}_{\mathbf{q}}^{\dagger} e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{q}}t)}], \quad (5)$$

где $\hat{c}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$, $\hat{c}_{\mathbf{q}}$ – операторы рождения и уничтожения нормальных акустических колебаний, c и $\omega_{\mathbf{q}} = cq$ – соответственно скорость и энергия этих колебаний, V – объем образца.

Записывая вневременную функцию свободных фононов $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$ в фурье-представлении и используя формулу (4), для E' находим следующее выражение:

$$E' = \frac{iV}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{q} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^2 \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+}(\omega, \mathbf{q}). \quad (6)$$

Функция $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+}(\omega, \mathbf{q})$ имеет вид [1, 2]

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+}(\omega, \mathbf{q}) = 2n_T(\omega) \text{Im} \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{\text{R}}(\omega, \mathbf{q}), \quad (7)$$

где $n_T(\omega)$ – функция Планка

$$n_T(\omega) = (e^{\frac{\omega}{T}} - 1)^{-1}. \quad (8)$$

Для продольных акустических фононов функция Грина $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^R(\omega, q)$ с учетом запаздывания во времени выражается в виде

$$\mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{2cq} \left[\frac{1}{\omega - cq + i\delta} - \frac{1}{\omega + cq + i\delta} \right]. \quad (9)$$

Здесь и далее $\mathcal{D}(\omega, \mathbf{q}) = \text{Sp } \mathcal{D}_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q})$.

Подставив (7) и (9) в (6), получаем известные выражения для полной средней энергии продольных колебаний решетки [4]

$$\begin{aligned} E' &= \tilde{E} + E_0, \\ \tilde{E} &= \frac{V}{6c^3} \begin{cases} \frac{\pi^2}{5} T^4 & \text{при } T \ll \theta, \\ \frac{\theta^3}{\pi^2} T & \text{при } T \gg \theta, \end{cases} \\ E_0 &= \frac{V\theta^4}{16c^3}, \end{aligned} \quad (10)$$

здесь $\tilde{E}$ и E_0 – энергии свободных фононов и нулевых колебаний.

2. НЕРАВНОВЕСНАЯ ЭНЕРГИЯ ФОНОНОВ

Деформационный гамильтониан взаимодействия фононов с электронами, используемый при переходе от гейзенберговского представления к представлению взаимодействия, имеет вид [3]

$$\hat{H}_{\text{int}}^e(t) = \lambda \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^+(\mathbf{r}, t) \nabla \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \quad (11)$$

где $\hat{\psi}^+(\mathbf{r}, t)$, $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ – вторично квантованные операторы электронного поля, $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ – оператор свободных продольных смещений (5), λ – константа деформационного взаимодействия, характеризующая изменение спектра электронов при деформации кристалла.

Выведем формулу для средней энергии колебаний решетки $\Delta E = E - E'$, связанной со взаимодействием фононов с горячими электронами (11). Согласно правилам, изложенным в [1, 2], функция $D_{\alpha\beta}^{-+}(X_1, X_2)$ во втором приближении по λ имеет вид

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}^{-+}(X_1, X_2) &= \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+}(X_1, X_2) - \\ &- \frac{i\lambda^2}{\rho} \sum_{i,j,\gamma,\delta} \int dX'_1 dX'_2 \nabla_1 \mathcal{D}_{\alpha\gamma}^{-i}(X_1, X'_1) \Pi^{ij}(X'_1, X'_2) \nabla_2 \mathcal{D}_{\delta\beta}^{j+}(X'_2, X_2) (-1)^{\delta_{ij}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $X = (\mathbf{r}, t)$, индексы $i, j = +, -$, символы $\nabla_{1,2}$ означают дифференцирование по $\mathbf{r}'_{1,2}$. Поляризационные части в (12) выражаются через электронные функции Келдыша формулой

$$\Pi^{ij}(X_1, X_2) = G^{ij}(X_1, X_2)G^{ji}(X_2, X_1). \quad (13)$$

Из определения (12) видно, что добавка $\Delta\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+}$ к нулевой функции Келдыша $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+}$ содержит четыре члена. Известно [1, 2], что из четырех функций $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{ij}, \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{ji}$ независимы три. Воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{++} + \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{--} &= \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+} + \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{+-}, \\ \Pi^{++} + \Pi^{--} &= \Pi^{-+} + \Pi^{+-} \end{aligned} \quad (14)$$

и исключим $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{++}$ и Π^{++} из (12). Оставшиеся в (12) функции $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{--}$ и $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{+-}$ выразим через функцию $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+}$ и функции Грина $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^R, \mathcal{D}_{\alpha\beta}^A$ согласно формулам [2]

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha\beta}^R &= \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{--} - \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+}, \\ \mathcal{D}_{\alpha\beta}^A &= \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{--} - \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{+-}. \end{aligned} \quad (15)$$

Применим к равенству (12) фурье-преобразование. В результате фурье-образ $\Delta\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+}(\omega, \mathbf{q})$ неравновесной добавки к $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+}(\omega, \mathbf{q})$ принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+}(\omega, \mathbf{q}) &= \frac{-i\lambda^2}{(2\pi)^4\rho} \sum_{\gamma, \delta} q_\gamma q_\delta \left[\Pi^{--}(\mathcal{D}_{\alpha\gamma}^R \mathcal{D}_{\delta\beta}^{-+} + \mathcal{D}_{\alpha\gamma}^{-+} \mathcal{D}_{\delta\beta}^A) - \right. \\ &\quad \left. - \Pi^{-+} \mathcal{D}_{\alpha\gamma}^R (\mathcal{D}_{\delta\beta}^{-+} - \mathcal{D}_{\delta\beta}^A) - \Pi^{+-} \mathcal{D}_{\alpha\gamma}^{-+} \mathcal{D}_{\delta\beta}^A \right], \end{aligned} \quad (16)$$

здесь $\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \mathcal{D}_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q})$ и

$$\Pi^{ij} = \Pi^{ij}(\omega, \mathbf{q}) = \int d\mathbf{p} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon G^{ij}(\varepsilon, \mathbf{p}) G^{ji}(\varepsilon - \omega, \mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (17)$$

где $\varepsilon, \mathbf{p}$ — энергия и импульс электрона.

Запишем фурье-образы электронных функций Келдыша следующим образом:

$$\begin{aligned} G^{--}(\varepsilon, \mathbf{p}) &= \frac{1 - f(\mathbf{p})}{\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}} + \mu + i\delta} + \frac{f(\mathbf{p})}{\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}} + \mu - i\delta}, \\ G^{++}(\varepsilon, \mathbf{p}) &= -[G^{--}(\varepsilon, \mathbf{p})]^*, \\ G^{-+}(\varepsilon, \mathbf{p}) &= 2\pi i f(\mathbf{p}) \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}} + \mu), \\ G^{+-}(\varepsilon, \mathbf{p}) &= 2\pi i [f(\mathbf{p}) - 1] \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}} + \mu). \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку по предположению электроны находятся в равновесии друг с другом, то функция $f(\mathbf{p})$ в (18) есть распределение Ферми

$$f(\mathbf{p}) = \left(e^{\frac{\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu}{T}} + 1 \right)^{-1}, \quad (19)$$

где μ — энергия Ферми, а $\varepsilon_{\mathbf{p}} = p^2/2m$.

Будем считать электроны вырожденными, т.е.

$$\mu > T_e. \quad (20)$$

Поляризационные части (17) после интегрирования по энергиям и импульсам электронов и с учетом условия (20) принимают вид

$$\begin{aligned} \Pi^{--}(\omega, \mathbf{q}) &= iI_1 + [2n_{T_e}(\omega) + 1]I_2 = -[\Pi^{++}(\omega, \mathbf{q})]^*, \\ \Pi^{-+}(\omega, \mathbf{q}) &= 2n_{T_e}(\omega)I_2, \\ \Pi^{+-}(\omega, \mathbf{q}) &= 2[n_{T_e}(\omega) + 1]I_2, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi \int d\mathbf{p} \frac{f(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - f(\mathbf{p})}{\omega + \varepsilon_{\mathbf{p} - \mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}}} = 8\pi^2 m \sqrt{2m\mu}, \\ I_2 &= 2\pi^2 \int d\mathbf{p} [f(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - f(\mathbf{p})] \delta(\omega + \varepsilon_{\mathbf{p} - \mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}}) = 4\pi^3 \frac{m^2 \omega}{q}. \end{aligned} \quad (22)$$

Распределение Планка $n_{T_e}(\omega)$, зависящее от температуры электронов T_e , возникло в формулах (21) для $\Pi^{ij}(\omega, \mathbf{q})$ в результате использования тождества

$$n_{T_e}(\omega) \equiv \frac{f(\mathbf{p})[1 - f(\mathbf{p} - \mathbf{q})]}{f(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - f(\mathbf{p})} \Big|_{\varepsilon_{\mathbf{p}} = \omega + \varepsilon_{\mathbf{p} - \mathbf{q}}}. \quad (23)$$

Подставив $\Pi^{ij}(\omega, \mathbf{q})$ из (21) и $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+}(\omega, \mathbf{q})$ из (7) в формулу (16), получим для $\text{Sp } \Delta \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-+}(\omega, \mathbf{q})$ выражение

$$\Delta \mathcal{D}^{-+}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\lambda^2 q^2}{(2\pi)^4 \rho} \left\{ I_1 n_T [(\mathcal{D}^R)^2 - (\mathcal{D}^A)^2] - iI_2 [n_T (\mathcal{D}^R \mathcal{D}^A)^2 + 2n_{T_e} \mathcal{D}^R \mathcal{D}^A] \right\}. \quad (24)$$

Здесь $n_{T, T_e} = n_{T, T_e}(\omega)$, запаздывающая функция Грина $\mathcal{D}^R = \mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q})$ определяется по формуле (9), опережающая функция Грина $\mathcal{D}^A = \mathcal{D}^A(\omega, \mathbf{q}) = [\mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q})]^*$.

Неравновесная энергия, т.е. часть средней полной энергии колебаний решетки, связанная с их взаимодействием с горячими электронами, согласно формуле (6) равна

$$\Delta E = \frac{iV}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{q} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^2 \Delta \mathcal{D}^{-+}(\omega, \mathbf{q}). \quad (25)$$

Используя выражения (21) и (24), получаем, что

$$\Delta E = \frac{V\lambda^2 m^2}{2(2\pi)^5} \int d\mathbf{q} q \left[I_2^R + I_2^A + 2I_{AR} + \frac{i2\sqrt{2}}{\pi} q \sqrt{\frac{\mu}{m}} (I_1^R - I_1^A) \right], \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} I_i^{R,A} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\mathcal{D}^{R,A}(\omega, \mathbf{q})]^2 \varphi_i(\omega), \\ I_{AR} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q}) \mathcal{D}^A(\omega, \mathbf{q}) \Delta\varphi(\omega), \\ \varphi_i(\omega) &= \begin{cases} \omega^2 n_T(\omega), & i = 1, \\ \omega^3 n_T(\omega), & i = 2, \end{cases} \\ \Delta\varphi(\omega) &= \varphi_2^e(\omega) - \varphi_2(\omega) = \omega^3 [n_{T_e}(\omega) - n_T(\omega)]. \end{aligned} \quad (27)$$

Интегралы по $d\omega$ в (27) вычисляются с помощью теоремы о вычетах, где знак перед $i\delta$ в формуле (9) для $\mathcal{D}^{R,A}(\omega, \mathbf{q})$ задает правила обхода полюсов:

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{-i\pi}{2(cq)^3} \left[cq \left(\frac{d\varphi_i}{d\omega} \Big|_{\omega=cq} - \frac{d\varphi_i}{d\omega} \Big|_{\omega=-cq} \right) - \varphi_i(cq) + \varphi_i(-cq) \right] = -I_i^A, \\ I_{AR} &= \frac{\pi}{4(cq)^2 \delta} [\Delta\varphi(cq) + \Delta\varphi(-cq)]. \end{aligned} \quad (28)$$

Из формулы (28) видно, что интеграл I_{AR} , а с ним и энергия ΔE стремятся к бесконечности при $\delta \rightarrow 0$. Замена в (28) величины δ малой, но не равной нулю величиной делает энергию (26) конечной. Такой величиной является ширина энергетического спектра фононов, связанная с каким-либо их рассеянием. Действительно, энергетический спектр свободных фононов определяется уравнением $[\mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q})]^{-1} = 0$ [3]. Замена в формуле (9) для $\mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q})$ бесконечно малой величины δ на $1/2\tau(q)$ означает учет ширины энергетического спектра, т.е. конечности времени жизни фонона $\tau(q)$ в состоянии с данным импульсом q . Таким образом, функция $\mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q})$ при замене $\delta \rightarrow 1/2\tau(q)$ становится полной функцией $D^R(\omega, \mathbf{q})$, учитывающей рассеяние фононов на каких-либо частицах, например примесях.

Полная функция $D^R(\omega, \mathbf{q})$ может быть записана в виде

$$D^R(\omega, \mathbf{q}) = \left[\omega^2 - (cq)^2 + \frac{i\omega}{\tau(q)} \right]^{-1}, \quad (29)$$

поскольку поправка к основной энергии фонона cq мала и учет этой поправки на дальнейшие расчеты не влияет.

Вероятность рассеяния фононов $1/\tau(q)$, как видно из (29), связана с $\text{Im } D^R(\omega, \mathbf{q})$ формулой

$$\frac{1}{\tau(q)} = \frac{\text{Im}[D^R(\omega, \mathbf{q})]^{-1}}{\omega}. \quad (30)$$

Учет ширины энергетических уровней частиц, позволяющий получить математически корректные выражения для макровеличин, вычисляемых с помощью функций Грина, применяется в основном для устранения расхождений в кинетических характеристиках веществ [5]. В качестве времен жизни при этом иногда используют феноменологические величины. Величиной, близкой к $\tau(q)$, считается время релаксации соответствующей функции распределения (в нашем случае фононной) к равновесной функции. Релаксационные времена вычисляются с помощью кинетического уравнения для функции распределения, учитывающего такое же рассеяние частиц, какое определяет ширину их энергетического спектра. В рассматриваемой нами задаче возникает необходимость в более точном вычислении $\tau(q)$, т.к. характер связи $\tau(q)$ с q сильно влияет на зависимость неравновесной энергии колебаний решетки (25) от температуры.

Прежде чем приступить к вычислению конкретных времен жизни $\tau(q)$, приведем выражения для энергии ΔE , подставив в (25) интегралы (28) и заменив в них δ на $1/2\tau(q)$. В результате получаем, что

$$\Delta E = \Delta \tilde{E} + \Delta E_T + \Delta E_0, \quad (31)$$

$$\Delta \tilde{E} = \frac{V\lambda^2 m^2 c}{(2\pi)^3 \rho} \int_0^{\theta/c} dq q^4 \tau(q) [n_{T_e}(cq) - n_T(cq)], \quad (32)$$

$$\Delta E_T = \frac{V\lambda^2 m^2}{2\sqrt{2} \pi^4 \rho} \sqrt{\frac{\mu}{mc^2}} \int_0^{\theta/c} dq q^3 \left[n_T(cq) + q \frac{dn(cq)}{dq} \right],$$

$$\Delta E_0 = \frac{V\lambda^2 m^2}{\sqrt{2} (2\pi c)^4 \rho} \sqrt{\frac{\mu}{mc^2}} \theta^4. \quad (33)$$

Здесь из энергии ΔE выделена энергия нулевых колебаний, не зависящая от температуры. Энергия ΔE_T связана с температурой так же, как средняя энергия свободных фононов $\tilde{E}$ в формулах (10). Однако ΔE_T гораздо меньше, чем $\tilde{E}$. Поэтому в дальнейших расчетах эта поправка не учитывается. Таким образом, нам предстоит вычислить только неравновесную энергию фононов $\Delta \tilde{E}$ (32), детализировав времена жизни $\tau(q)$.

3. ВРЕМЕНА ЖИЗНИ ФОНОНОВ

Вычислим поочередно времена жизни фононов $\tau(q)$, связанные с одним из трех видов их рассеяния: на макропримесях, на точечных примесях и на электронах. Эти типы рассеяния обуславливают наименьшие времена жизни $\tau(q)$ в реальных кристаллах.

Для вычисления $\tau(q)$ используем формулу (30). Функцию $D^R(\omega, \mathbf{q})$ можно представить в виде ряда по степеням констант взаимодействия [2]. Иногда, правда, удобнее

определять D^R через разность причинной D^{--} и вневременной D^{-+} функций Келдыша (см. (15)).

Вычислим время жизни фононов $\tau_{\text{phe}}(q)$, обусловленное их рассеянием на электронах. Вневременная функция $D^{-+}(\omega, \mathbf{q})$, связанная с деформационным взаимодействием фононов с электронами (11), представлена формулой (16). Функция $D^{--}(\omega, \mathbf{q})$ получается из этой формулы заменой в ней всех индексов “+” на индексы “−”. В результате запаздывающая функция $D_e^R(\omega, \mathbf{q})$ (15) с точностью до λ^2 выражается в виде

$$[D_e^R(\omega, \mathbf{q})]^{-1} = [D^R(\omega, \mathbf{q})]^{-1} + \frac{i\lambda^2 q^2}{(2\pi)^4 \rho} \Pi^R(\omega, \mathbf{q}). \quad (34)$$

Здесь поляризационный оператор Π^R с учетом определений (17) и (21) равен [2]

$$\begin{aligned} \Pi^R &= \Pi^{--} - \Pi^{-+}, \\ \Pi^R(\omega, \mathbf{q}) &= I_2 + iI_1, \end{aligned} \quad (35)$$

где интегралы I_1 и I_2 выражаются формулами (22).

Заметим, что полная запаздывающая функция Грина $D_e^R(\omega, \mathbf{q})$ не зависит ни от температуры фононов, ни от температуры электронов.

Подставив $\text{Im}[D_e^R(\omega, \mathbf{q})]^{-1}$ из (34) в определение (30) для $\tau(q)$, получим время жизни фононов, обусловленное деформационным рассеянием на электронах:

$$\tau_{\text{phe}}(q) = \frac{4\pi\rho}{\lambda^2 m^2 q}. \quad (36)$$

Эта величина оказалась в два раза больше времени релаксации фононной функции распределения к равновесной за счет того же деформационного взаимодействия фононов с электронами (11), приведенного в работе [6]. Зависимость от параметров задачи у обоих времен одинаковая. Однако время релаксации – кинетическая характеристика кристалла, тогда как время жизни (30), определяющее ширину энергетического спектра, – характеристика динамическая. Поэтому более последовательным является использование именно времени $\tau(q)$ (30) в формуле (25) для ΔE .

Вычисление времен жизни фононов, связанных с рассеянием на примесях, требует использования гамильтонианов взаимодействия, приспособленных к диаграммной технике. Как обычно [3], такие гамильтонианы должны быть построены без лишней детализации силовых коэффициентов. Подробные вычисления времен релаксации фононной функции распределения к равновесной вследствие рассеяния фононов на примесях, приведенные в [6], позволяют выделить такие упрощенные коэффициенты. Так, для случая рассеяния фононов на макроскопических включениях в кристалл гамильтониан взаимодействия может быть записан в виде

$$\hat{H}_{\text{int}}^D(t) = \sum_a \int d\mathbf{r} w_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) [\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)]^2. \quad (37)$$

Здесь $\mathbf{r}_a$ – радиус-вектор положения примеси, силовой коэффициент

$$w_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = \frac{1}{2V} \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)}{\partial \mathbf{r}^2}, \quad (38)$$

где $\mathcal{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$ – потенциал взаимодействия решетки с атомами примеси. На размеры макропримеси r_D и длину волны акустических колебаний решетки наложены условия

$$r_D \gg \frac{1}{q} \gg a_0, \quad (39)$$

где a_0 – постоянная решетки. Неравенство $r_D \gg 1/q$ исключает синфазные движения атомов решетки, возможные лишь при $q = 0$ (см. (5)). Поэтому при построении $\hat{H}_{\text{int}}^D(t)$ в виде (37) было использовано смещение $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ из формулы (5).

При определении гамильтониана $\hat{H}_{\text{int}}^d(t)$, связанного с рассеянием фононов на точечных примесях, следует учитывать, что размеры таких примесей малы, т.е.

$$r_d \ll a_0 \ll \frac{1}{q}. \quad (40)$$

В кристаллах с точечными примесями возможны смещения всех атомов решетки на одинаковую величину, поскольку допустимы равные нулю импульсы q . Такие смещения, не вносящие вклад в энергию решетки, должны быть исключены введением в гамильтониан $\hat{H}_{\text{int}}^d(t)$ деформаций $\nabla \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ (см., например, выражение для $\hat{H}_{\text{int}}^e(t)$ в формуле (11)). Таким образом, гамильтониан взаимодействия фононов с точечными примесями (“внедрения” или “замещения”) принимает следующий вид:

$$\hat{H}_{\text{int}}^d(t) = \sum_a \int d\mathbf{r} w_d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) [\nabla \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)]^2, \quad (41)$$

здесь

$$w_d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \mathcal{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)}{\partial \mathbf{r}^3} \nabla \mathbf{u}_d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (42)$$

где $\mathbf{u}_d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$ – смещение микропримеси.

Разложим полные функции $D_{D,d}^R(\omega, \mathbf{q})$ в ряд по плотности числа частиц примеси $n_{D,d}$. Для этого используем приемы, разработанные в [3, 7].

Введем сокращенные обозначения

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \begin{cases} 1 & \text{для } D_D^R(X, X_1), \\ \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} & \text{для } D_d^R(X, X_1), \end{cases} \quad (43)$$

где $w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = w_{D,d}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)/\rho$. Тогда функции $D_{D,d}^R(X, X_1)$ записываются [1, 2] в следующем виде:

$$\begin{aligned} D_{D,d}^R(X, X_1) = & \mathcal{D}^R(X, X_1) + \int dX' \mathcal{D}^R(X, X') \sum_a W(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a) \mathcal{D}^R(X', X_1) + \\ & + \int dX' dX'_1 \mathcal{D}^R(X, X') \sum_a W(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a) \mathcal{D}^R(X', X'_1) \sum_b W(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_b) \mathcal{D}^R(X'_1, X_1). \end{aligned} \quad (44)$$

Конечно, эта формула совпадает с выражением для $D_{D,d}^R = D_{D,d}^{--} - D_{D,d}^{+-}$ в (16).

Перейдем в формуле (44) к $(\omega, \mathbf{q})$ -представлению. Из-за нарушения трансляционной инвариантности решетки за счет наличия примесей к функциям Грина в (44) надо применять фурье-преобразование в виде

$$\mathcal{D}^R(X, X_1) = \frac{1}{(2\pi)^7} \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{q}_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q}, \mathbf{q}_1) \exp\{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \mathbf{q}_1\mathbf{r}_1) - i\omega(t - t_1)\}. \quad (45)$$

В нулевом приближении функция $\mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q}, \mathbf{q}_1)$ связана с функцией (9) формулой [3]

$$\mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q}, \mathbf{q}_1) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) \mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q}). \quad (46)$$

Силовые коэффициенты $w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$, входящие в (44), также разложим в интеграл Фурье:

$$w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} w(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)}. \quad (47)$$

Теперь в выражении (44) следует избавиться от суммирования по положению примесей. Вследствие больших расстояний между примесями эти суммы могут быть заменены соответствующими интегралами

$$\sum_a w(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}_a} = n \int d\mathbf{r} w(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = (2\pi)^3 n w(0) \delta(\mathbf{p}). \quad (48)$$

Здесь интегрирование ведется по всему кристаллу для одной примеси и результат умножается на полное число примесей nV , где $n = n_{D,d}$ — плотность числа примесей.

В двойных суммах в формуле (44) наибольший вклад вносят члены с $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_b$, линейные по n . Действительно,

$$\sum_{a,b} w(\mathbf{p}) w(\mathbf{p}_1) \exp\{i(\mathbf{p}\mathbf{r}_a + \mathbf{p}_1\mathbf{r}_b)\} = (2\pi)^3 n w(\mathbf{p}) w(-\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1). \quad (49)$$

Поправки к $[\mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q})]^{-1}$ за счет членов, линейных по силовым константам, равны $nW(0)$, где $W(0) = w_D(0)/\rho$ для макропримесей и $W(0) = w_D(0)q^2/\rho$ для точечных

примесей. Эти поправки действительны и, следовательно, перенормируют основную энергию фонона. В дальнейшем они учитываться не будут.

Все члены ряда для $D_{D,d}^R(\omega, \mathbf{q}, \mathbf{q}_1)$ пропорциональны $\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1)$. Поэтому $D_{D,d}^R(\omega, \mathbf{q}, \mathbf{q}_1)$ можно представить как $(2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) D_{D,d}^R(\omega, \mathbf{q})$ (см. (46)). Запишем функции $D_{D,d}^R(\omega, \mathbf{q})$ с учетом малости поправок к $\mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q})$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} [D_D^R(\omega, \mathbf{q})]^{-1} &= [\mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q})]^{-1} - \frac{n_D w_D^2}{(2\pi)^3 \rho^2} \int d\mathbf{q}_1 \mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q}_1), \\ [D_d^R(\omega, \mathbf{q})]^{-1} &= [\mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q})]^{-1} - \frac{n_d w_d^2}{(2\pi)^3 \rho^2} \int d\mathbf{q}_1 (\mathbf{q} - \mathbf{q}_1)^4 \mathcal{D}^R(\omega, \mathbf{q}_1). \end{aligned} \quad (50)$$

При выводе этих формул предполагалось, что $w_{D,d}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) = \text{const}$. Как показано в [6], силовые коэффициенты слабо зависят от абсолютной величины передаваемого импульса $\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_1$. Угловой зависимостью в $w_{D,d}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1)$ можно пренебречь, т.к. ее учет приведет к изменению численных коэффициентов в поправках к функции $[\mathcal{D}_{D,d}^R(\omega, \mathbf{q})]^{-1}$.

Вычислим $\text{Im}[D_D^R(\omega, \mathbf{q})]^{-1}$ и $\text{Im}[D_d^R(\omega, \mathbf{q})]^{-1}$ с помощью формул (50) и подставим их в формулу (30) для $\tau(\mathbf{q})$. В результате получим, что времена жизни фононов, обусловленные их рассеянием на макропримесях и на точечных примесях, соответственно, следующие:

$$\tau_D = \frac{2\pi c^3 \rho^2}{n_D w_D^2}, \quad (51)$$

$$\tau_d(q) = \frac{5\pi c^3 \rho^2}{8n_d w_d^2 q^4}. \quad (52)$$

Эти времена имеют ту же функциональную зависимость от q и параметров задачи, что и соответствующие времена релаксации фононной функции распределения, приведенные в [6].

Выявим теперь зависимость неравновесной энергии фононов $\Delta \tilde{E}$ (32) от температур T_e и T с учетом вычисленных здесь времен жизни.

4. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ КРИСТАЛЛА С ГОРЯЧИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

Вычислим неравновесные энергии фононов в чистых кристаллах и веществах с примесями, используя выражение (32) для $\Delta \tilde{E}$ и формулы (36), (51) и (52) для $\tau(q)$. Выведем условия применимости полученных выражений для энергий $\Delta \tilde{E}$. Покажем также, при каких условиях эти энергии являются термодинамическими энергиями кристаллов с горячими электронами, т.е. они больше энергии свободных фононов $\tilde{E}$ и больше энергий возбуждения электронов $\tilde{E}^e$ [4], $\Delta \tilde{E}^e$.

Значения неравновесных энергий фононов $\Delta\tilde{E}$ при высоких температурах, когда $T_e > T \gg \theta$, здесь приводиться не будут. Термодинамической энергией кристалла при достаточно малой плотности горячих электронов является энергия свободных фононов $\tilde{E}$, поскольку она больше энергии $\Delta\tilde{E}$. Действительно, критерий применимости разложения полной энергии $E = E' + \Delta E$ по константе взаимодействия λ – это неравенство

$$\Delta E = \Delta\tilde{E} + \Delta E_0 \ll \tilde{E} + E_0 = E'. \quad (53)$$

При высоких температурах (53) сводится к неравенству $\Delta\tilde{E} \ll \tilde{E}$, поскольку $\tilde{E}/E_0 \sim T/\theta \gg 1$ (см. (9)), и при любых $\tau(q)$ имеем $\Delta\tilde{E}/\Delta E_0 \sim \tau(\theta/c)T_e(mc^2/\mu)^{1/2} > 1$.

Предположим, что наименьшее время жизни фононов определяется их рассеянием на макропримесях. Подставим τ_D из (51) в формулу для $\Delta\tilde{E}$ (32) и вычислим интеграл по $d\mathbf{q}$. Неравновесная энергия фононов в этом случае принимает вид

$$\Delta\tilde{E}_D = \frac{3V\lambda^2 m^2 \tau_D}{\pi^3 c^4 \rho} (T_e^5 - T^5). \quad (54)$$

Если время жизни фононов в основном связано с их рассеянием на точечных примесях $\tau_d(q)$ (52), то в этом случае энергия $\Delta\tilde{E}$ зависит не только от $\tau_d(q)$. Дело в том, что энергия $\Delta\tilde{E}$ в виде (32), где $\tau(q) = \tau_d(q) \sim q^{-4}$, стремится к бесконечности. Тем не менее неравновесная энергия фононов $\Delta\tilde{E}$ становится конечной величиной, если в (32) вместо $\tau_d(q)$ использовать время комбинированного рассеяния. Это время, например, можно определить одной из двух формул:

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(q) &= \tau_d^{-1}(q) + \tau_{\text{phe}}^{-1}(q), \\ \tau^{-1}(q) &= \tau_d^{-1}(q) + \tau_D^{-1}(q). \end{aligned} \quad (55)$$

При этом время $\tau_d(q)$ должно оставаться меньшим, чем времена $\tau_{\text{phe}}(q)$ и τ_D , зависящие от более низкой степени q , чем $\tau_d(q)$.

После соответствующих вычислений неравновесная энергия фононов (32) с учетом времен жизни (55) принимает вид

$$\Delta\tilde{E}_d = \frac{V\lambda^2 m^2 \theta \tau_d}{(2\pi)^3 c^4 \rho} (T_e - T) \ln \frac{\tau_{\min} T_e}{\tau_d \theta}, \quad (56)$$

где $\tau_d = \tau_d(\theta/c)$, а время $\tau_{\min}$ равно наименьшему из времен $\tau_{\text{phe}}(\theta/c)$ и τ_D .

Энергию (56) можно считать линейно зависящей от разности температур $T_e - T$, имея в виду слабое изменение логарифмической функции с изменением температуры.

В относительно чистых веществах наименьшим временем жизни фононов является время их жизни, связанное с рассеянием на электронах (36). В этом случае неравновесная энергия фононов представляет собой разность энергий свободных фононов, нагретых электронами до температуры T_e , и фононов, сохранивших температуру среды T . Действительно, подставив в формулу (32) для $\Delta\tilde{E}$ время $\tau_{\text{phe}}(q)$ из (36), получаем, что

$$\Delta\tilde{E}_e = \frac{\pi^2 V}{30c^3} (T_e^4 - T^4). \quad (57)$$

Характерна независимость $\Delta\tilde{E}_e$ от константы деформационного взаимодействия λ . При выводе формулы (57) предполагалось, что вероятность рассеяния фононов на электронах $\tau_{\text{phe}}^{-1} \sim \lambda$ не может быть сделана нулевой, т.к. она больше вероятностей других видов рассеяния.

Из полученных здесь формул (54), (56) и (57) для неравновесной энергии фононов $\Delta\tilde{E}$ видно, что зависимость $\Delta\tilde{E}$ от температур обусловлена временами жизни фононов различной природы.

Рассмотрим теперь условие (53) при низких температурах, когда $T < T_e \ll \theta$. Это условие может быть сведено к неравенству

$$\Delta E_0 \ll E_0. \quad (58)$$

Действительно, из формул (54), (56) и (57) для $\Delta\tilde{E}$ и формулы (33) для ΔE_0 видно, что $\Delta\tilde{E}/\Delta E_0 \sim \alpha (T_e/\theta)^4 (\mu/mc^2)^{-1/2} \ll 1$, где $\alpha = T_e \tau_D$, $\alpha = T_e \tau_D (T_e/c)$ и $\alpha = 1$ для $\Delta\tilde{E}_D$, $\Delta\tilde{E}_d$ и $\Delta\tilde{E}_e$, соответственно. Энергия свободных фононов, в свою очередь, меньше энергии свободных колебаний в отношении $\tilde{E}/E_0 \sim (T/\theta)^4$ (см. (10)). Подставим в неравенство (58) энергии ΔE_0 и E_0 из (33) и (10). В результате это неравенство принимает вид

$$A \sqrt{\frac{\mu}{mc^2}} \ll 1, \quad (59)$$

где $A = \lambda^2 m^2 / \rho c \hbar$.

При обычных значениях параметров задачи неравенство (59) хорошо выполняется. Например, при $\lambda \sim 10^{15} \text{ сек}^{-1}$, $\mu \sim \theta \sim 10^{13} \text{ сек}^{-1}$, $\rho \sim 1 \text{ г/см}^3$, $c \sim 10^5 \text{ см/сек}$ константа A приблизительно равна 10^{-2} .

Важное условие того, что низкотемпературная неравновесная энергия фононов $\Delta\tilde{E}$ больше энергии свободных фононов $\tilde{E}$, нисколько не противоречит условию (58). При $T_e \gg T$ неравенство

$$\Delta\tilde{E} \gg \tilde{E} \quad (60)$$

принимает вид (см. (11), (54), (56), (57))

$$A \alpha \left(\frac{T_e}{T} \right)^4 \gg 1 \quad (61)$$

и хорошо выполняется в нашем случае.

Покажем теперь, при каких значениях параметров неравновесная энергия фононов больше энергии горячих электронов. Энергия свободных электронов, как известно [4], равна сумме энергий электронных возбуждений $\tilde{E}^e \sim V m^{3/2} \mu^{1/2} T_e^2$ и электронного вырождения $E_0^e \sim V m^{3/2} \mu^{5/2}$. Неравновесная энергия электронов $\Delta \tilde{E}^e$, являясь поправкой к энергии $E_0^e + \tilde{E}^e$, подчиняется неравенству $\Delta \tilde{E}^e \ll E_0^e$, поскольку $E_0^e \gg \tilde{E}^e$. Поэтому условием того, что низкотемпературная неравновесная энергия фононов $\Delta \tilde{E}$ больше энергии возбуждения электронов $\tilde{E}^e + \Delta \tilde{E}^e$, является условие $\Delta \tilde{E} \gg E_0^e$. С учетом принятых обозначений последнее условие принимает вид

$$\frac{A \alpha T_e}{(m c^2)^{3/2} \mu^{5/2}} \gg 1. \quad (62)$$

Таким образом, при $T \ll T_e \ll \theta$ и выполнении условий (59), (61), (62), налагаемых на параметры кристаллов, неравновесная энергия фононов $\Delta \tilde{E}$ является термодинамической энергией кристаллов с горячими электронами.

В отличие от термодинамических характеристик, связанных с термодинамической энергией, кинетические характеристики кристаллов с горячими электронами рассматривались ранее. Например, известны времена релаксации электронной температуры или энергии электронов к своим равновесным значениям и другие релаксационные характеристики [8, 9]. В частности, время релаксации T_e , связанное с деформационным взаимодействием электронов с фононами, не зависит от ширины уровней рассеивающихся частиц. Это время больше времени жизни фононов (36) в отношении $T_e^3 / (m c^2 \mu)^{3/2} \gg 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, из приведенных расчетов видно, что термодинамическая энергия кристаллов с горячими электронами при низких температурах может определяться неравновесной энергией фононов. Показано, что эта энергия, связанная с деформационным взаимодействием фононов с горячими электронами, зависит также от времени жизни фононов, обусловленного различными механизмами их рассеяния. В этой статье вычислены наиболее короткие времена жизни фононов, связанные с их рассеянием на макро- и микропримесях и на электронах. Показано, что термодинамические энергии чистых кристаллов и кристаллов с различными примесями существенно отличаются своей зависимостью от температуры. Средние полные энергии колебаний решетки с горячими электронами и времена жизни фононов, от которых эти энергии зависят, вычислены единым методом с помощью диаграммной техники Келдыша.

Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 96-03-34116).

Список литературы

- [1] *Л. В. Келдыш*. ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1515.
- [2] *Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский*. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
- [3] *А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский*. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Наука, 1962.
- [4] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Статистическая физика. Ч. I. М.: Наука, 1976.
- [5] *Л. А. Зайцева*. ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 2475.
- [6] *Б. М. Мозилевский, А. Ф. Чудновский*. Теплопроводность полупроводников. М.: Наука, 1973.
- [7] *F. Ionezawa, T. Matsubara*. Progr. Theor. Phys. 1966. V. 35. P. 337.
- [8] *М. И. Казанов, И. М. Лифшиц, Л. В. Танатаров*. ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 232.
- [9] *В. Ф. Гантмахер, И. Б. Левинсон*. Рассеяние носителей тока в металлах и полупроводниках. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 15.X.1997 г.,
после доработки 3.XI.1997 г.