Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. З. Пакуляк, Э. Рагуси, Н. А. Славнов, Детерминантные представления для формфакторов в квантовых интегрируемых моделях с $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 3, 515–537

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:13:50

© 2014 г. С. З. Пакуляк^{*†‡}, Э. Рагуси[§], Н. А. Славнов[¶]

ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ФОРМФАКТОРОВ В КВАНТОВЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЯХ С $GL(3)$ -ИНВАРИАНТНОЙ R -МАТРИЦЕЙ

Получены детерминантные представления для формфакторов матричных элементов матрицы монодромии в квантовых интегрируемых моделях, решаемых с помощью иерархического алгебраического анзаца Бете и обладающих $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей. Эти представления могут использоваться для вычисления корреляционных функций в моделях, представляющих физический интерес.

Ключевые слова: иерархический алгебраический анзац Бете, скалярные произведения, формфакторы.

DOI: 10.4213/tmf8741

1. ВВЕДЕНИЕ

Формфакторный подход является одним из наиболее эффективных методов вычисления корреляционных функций квантовых интегрируемых моделей. Поэтому нахождение явных и компактных представлений для формфакторов является важной задачей. В настоящее время известно несколько методов исследования формфакторов в интегрируемых системах. Одним из первых был развит так называемый “бутстрапный подход”, который успешно применялся к интегрируемым квантово-полевым теориям [1]–[7]. Этот метод тесно связан с другим, основанным на конформной теории поля и ее возмущениях [8]–[11]. Также следует отметить подход,

^{*}Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: pakuliak@theor.jinr.ru

[†]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

[‡]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

[§]Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique, CNRS – Université de Savoie, Annecy-le-Vieux, France. E-mail: ragoucy@lapth.cnrs.fr

[¶]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: nslavnov@mi.ras.ru

развитый в работах [12]–[14], в которых формфакторы исследовались с помощью теории представлений квантовых аффинных алгебр. Все методы, перечисленные выше, имеют дело с моделями в бесконечном объеме. Формфакторы в моделях конечного объема изучались в работах [15], [16] с помощью алгебраического анзаца Бете [17]–[20]. В частности, этот метод оказался весьма эффективным в моделях квантовых спиновых цепочек, для которых известно решение квантовой обратной задачи рассеяния [16], [21]. Полученные в рамках этого подхода детерминантные представления для формфакторов с успехом использовались для вычисления корреляционных функций [22]–[25].

Перечисленные выше результаты в основном относятся к моделям, обладающим $GL(2)$ -симметрией или ее q -деформацией. Модели с симметриями более высокого ранга исследованы в значительно меньшей степени. В то же время такие модели играют важную роль в многочисленных приложениях. Например, как было доказано в работах [26]–[28], интегрируемость является очень эффективным инструментом при вычислении амплитуд рассеяния в теориях супер-Янга–Миллса. Вычисление этих амплитуд можно связать с вычислением скалярных произведений векторов Бете. В частности, в $SU(3)$ -секторе как раз требуются $SU(3)$ -инвариантные векторы Бете. Следовательно, в данном контексте знание формфакторов оказывается очень существенным.

Формфакторы интегрируемых моделей с симметриями высокого ранга также возникают в физике твердого тела, в частности в моделях двухкомпонентного бозе- (или ферми-) газа, а также при исследовании моделей холодных атомов (например, ферромагнетизма или разделения фаз). В контексте сильно коррелированных электронных систем следует также упомянуть двухзонную модель Хаббарда (как правило, в полузаполненном режиме). В этом случае симметрия возрастает, когда предполагается, что спин и орбитальные степени свободы играют симметричную роль, приводя, таким образом, к $SU(4)$ - или даже $SO(8)$ -симметрии (см., например, работы [29], [30]). Все эти исследования требуют поисков интегрируемых моделей с $SU(N)$ -симметрией, и случай $SU(3)$ является первым шагом на этом пути. В этой связи стоит отметить работу [31], где изучались формфакторы в модели двухкомпонентного бозе-газа.

В настоящей статье мы приводим детерминантные представления для формфакторов в $GL(3)$ -инвариантных квантовых интегрируемых моделях, решаемых с помощью иерархического алгебраического анзаца Бете [32]–[34]. Более точно, мы вычисляем матричные элементы операторов матрицы монодромии $T_{ij}(z)$ между on-shell векторами Бете (т.е. между собственными состояниями трансфер-матрицы). Детерминантные представления, которые даны в настоящей статье, основаны на формулах, полученных в работах [35]–[37]. Однако в предшествующих работах представления для формфакторов диагональных элементов $T_{ii}(z)$ и операторов $T_{ij}(z)$ при $|i - j| = 1$ слегка отличались друг от друга. Более того, для операторов $T_{ii}(z)$ приходилось рассматривать два различных случая, в зависимости от того, совпадали векторы Бете или нет. В настоящей работе мы приводим более единообразные детерминантные представления для всех формфакторов. Мы также анонсируем детерминантные формулы для формфакторов операторов $T_{13}(z)$ и $T_{31}(z)$. Чтобы получить эти формулы, мы использовали новый подход, который требует подробного описания. Оно будет дано в отдельной публикации.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы вводим модель, которая изучается в настоящей работе. В разделе 3 мы напоминаем результаты, полученные для формфакторов в моделях с $GL(2)$ -симметрией. В разделе 4 приведены основные результаты. Методы их получения кратко описаны в разделе 5. В частности, мы вводим в этом разделе понятие твистованной трансфер-матрицы, которая оказывается очень эффективной при вычислении формфакторов диагональных матричных элементов. В разделе 6 мы приводим доказательства детерминантных представлений, данных в разделе 4. Раздел 7 посвящен обсуждению перспектив. В приложении содержатся несколько тождеств суммирования, которые требуются для доказательств детерминантных представлений.

2. ВЕКТОРЫ БЕТЕ И ФОРМФАКТОРЫ

В этом разделе мы описываем изучаемую модель, вводим необходимые обозначения и определяем объект исследования.

2.1. Обобщенная $GL(3)$ -инвариантная модель. Модели, которые рассматриваются ниже, описываются $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей, действующей в тензорном произведении $V_1 \otimes V_2$ двух вспомогательных пространств, где $V_k \sim \mathbb{C}^3$, $k = 1, 2$:

$$R(x, y) = \mathbf{I} + g(x, y)\mathbf{P}, \quad g(x, y) = \frac{c}{x - y}. \quad (2.1)$$

В данном определении $\mathbf{I}$ есть единичная матрица в пространстве $V_1 \otimes V_2$, $\mathbf{P}$ – матрица перестановки, которая переставляет пространства V_1 и V_2 , а c – произвольная ненулевая постоянная.

Матрица монодромии $T(w)$ удовлетворяет алгебре

$$R_{12}(w_1, w_2)T_1(w_1)T_2(w_2) = T_2(w_2)T_1(w_1)R_{12}(w_1, w_2). \quad (2.2)$$

Равенство (2.2) имеет место в тензорном произведении $V_1 \otimes V_2 \otimes \mathcal{H}$, где $V_k \sim \mathbb{C}^3$, $k = 1, 2$, являются вспомогательными пространствами, а $\mathcal{H}$ есть гильбертово пространство гамильтониана рассматриваемой модели. Матрицы $T_k(w)$ нетривиально действуют в пространствах $V_k \otimes \mathcal{H}$.

След матрицы монодромии $\text{tr } T(w)$ по вспомогательному пространству $V \sim \mathbb{C}^3$ называется трансфер-матрицей. Он является производящим функционалом интегралов движения изучаемой модели. Собственные векторы трансфер-матрицы называются on-shell векторами Бете (или просто on-shell векторами). Они могут быть параметризованы набором комплексных чисел, удовлетворяющих уравнениям Бете (см. п. 2.3).

2.2. Обозначения. Мы используем те же обозначения и соглашения, что и в работе [36]. Помимо функции $g(x, y)$, мы вводим функцию $f(x, y)$:

$$f(x, y) = 1 + g(x, y) = \frac{x - y + c}{x - y}. \quad (2.3)$$

Мы также будем использовать еще две вспомогательные функции

$$h(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{x - y + c}{c}, \quad t(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)} = \frac{c^2}{(x - y)(x - y + c)}. \quad (2.4)$$

Благодаря очевидному равенству $g(-x, -y) = g(y, x)$ все функции, введенные выше, обладают аналогичными свойствами:

$$f(-x, -y) = f(y, x), \quad h(-x, -y) = h(y, x), \quad t(-x, -y) = t(y, x). \quad (2.5)$$

Перед тем как перейти к описанию векторов Бете, мы сформулируем соглашение об обозначениях. Наборы переменных будут обозначаться чертой: $\bar{w}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ и т.п. Индивидуальные элементы в наборах будут обозначаться нижними индексами: w_j , u_k и т.п. Символы $\bar{u}_i$, $\bar{v}_i$ и т.п. означают $\bar{u} \setminus u_i$, $\bar{v} \setminus v_i$ и т.п.

Дабы избежать слишком громоздких формул, мы используем сокращенные обозначения для произведений функций g , f , и h . А именно, если эти функции зависят от наборов переменных, то это означает, что следует взять произведение по соответствующему набору. Например,

$$h(z, \bar{w}) = \prod_{w_j \in \bar{w}} h(z, w_j), \quad g(u_i, \bar{u}_i) = \prod_{\substack{u_j \in \bar{u}, \\ u_j \neq u_i}} g(u_i, u_j), \quad f(\bar{u}, \bar{v}) = \prod_{u_j \in \bar{u}} \prod_{v_k \in \bar{v}} f(u_j, v_k).$$

Мы также будем использовать специальные обозначения $\Delta'_n(\bar{x})$ и $\Delta_n(\bar{x})$ для следующих произведений:

$$\Delta'_n(\bar{x}) = \prod_{j < k}^n g(x_j, x_k), \quad \Delta_n(\bar{x}) = \prod_{j > k}^n g(x_j, x_k). \quad (2.6)$$

2.3. Векторы Бете. Перейдем теперь к описанию векторов Бете. Мы обозначаем векторы Бете общего вида как $\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})$. Они зависят от двух наборов комплексных параметров $\bar{u} = u_1, \dots, u_a$ и $\bar{v} = v_1, \dots, v_b$, где $a, b = 0, 1, \dots$. Дуальные векторы Бете обозначаются как $\mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})$. Они также зависят от двух наборов комплексных параметров $\bar{u} = u_1, \dots, u_a$ и $\bar{v} = v_1, \dots, v_b$. Состояние, в котором $\bar{u} = \bar{v} = \emptyset$, называется псевдовакуумным вектором $|0\rangle$. Аналогично, дуальное состояние, в котором $\bar{u} = \bar{v} = \emptyset$, называется дуальным псевдовакуумным вектором $\langle 0|$. Данные векторы обращаются в ноль под действием операторов $T_{ij}(w)$, где $i > j$ для вектора $|0\rangle$ и $i < j$ для вектора $\langle 0|$. В то же время оба этих вектора являются собственными для диагональных элементов матрицы монодромии:

$$T_{ii}(w)|0\rangle = \lambda_i(w)|0\rangle, \quad \langle 0|T_{ii}(w) = \lambda_i(w)\langle 0|, \quad (2.7)$$

где $\lambda_i(w)$ суть некоторые скалярные функции. В рамках обобщенной модели $\lambda_i(w)$ остаются свободными функциональными параметрами. В действительности всегда имеется возможность нормировать матрицу монодромии $T(w) \rightarrow \lambda_2^{-1}(w)T(w)$ таким образом, чтобы иметь дело только с отношениями

$$r_1(w) = \frac{\lambda_1(w)}{\lambda_2(w)}, \quad r_3(w) = \frac{\lambda_3(w)}{\lambda_2(w)}. \quad (2.8)$$

Если параметры вектора Бете¹⁾ $\bar{u}$ и $\bar{v}$ удовлетворяют специальной системе уравнений (уравнения Бете), тогда он становится собственным вектором трансфер-матрицы (on-shell вектор Бете). Система уравнений Бете может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} r_1(u_i) &= \frac{f(u_i, \bar{u}_i)}{f(\bar{u}_i, u_i)} f(\bar{v}, u_i), & i = 1, \dots, a, \\ r_3(v_j) &= \frac{f(\bar{v}_j, v_j)}{f(v_j, \bar{v}_j)} f(v_j, \bar{u}), & j = 1, \dots, b, \end{aligned} \quad (2.9)$$

и мы напоминаем, что $\bar{u}_i = \bar{u} \setminus u_i$ и $\bar{v}_j = \bar{v} \setminus v_j$.

Если $\bar{u}$ и $\bar{v}$ удовлетворяют системе (2.9), то

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} T(w) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) &= \tau(w|\bar{u}, \bar{v}) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}), \\ \mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) \mathrm{tr} T(w) &= \tau(w|\bar{u}, \bar{v}) \mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$\tau(w) \equiv \tau(w|\bar{u}, \bar{v}) = r_1(w)f(\bar{u}, w) + f(w, \bar{u})f(\bar{v}, w) + r_3(w)f(w, \bar{v}). \quad (2.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Система уравнений Бете (2.9) эквивалентна утверждению о том, что функция $\tau(w|\bar{u}, \bar{v})$ (2.11) не имеет полюсов в точках $w = u_i$ и $w = v_j$.

Формфакторы элементов матрицы монодромии определяются как

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(i,j)}(z) \equiv \mathcal{F}_{a,b}^{(i,j)}(z|\bar{u}^C, \bar{v}^C; \bar{u}^B, \bar{v}^B) = \mathbb{C}^{a',b'}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) T_{ij}(z) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B), \quad (2.12)$$

где оба вектора $\mathbb{C}^{a',b'}(\bar{u}^C; \bar{v}^C)$ и $\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B)$ являются on-shell векторами Бете и

$$a' = a + \delta_{i1} - \delta_{j1}, \quad b' = b + \delta_{j3} - \delta_{i3}. \quad (2.13)$$

Мы использовали индексы B и C , чтобы различать параметры, входящие в эти два вектора. Другими словами, если не утверждается обратное, то переменные $\{\bar{u}^B; \bar{v}^B\}$ в векторе $\mathbb{B}^{a,b}$ и переменные $\{\bar{u}^C; \bar{v}^C\}$ в векторе $\mathbb{C}^{a,b}$ не предполагаются каким-либо образом связанными между собой. Параметр z является произвольным комплексным числом. Действуя оператором $T_{ij}(z)$ на вектор $\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B)$ с помощью формул, полученных в работе [38], мы сводим формфактор к линейной комбинации скалярных произведений, в которых $\mathbb{C}^{a',b'}(\bar{u}^C; \bar{v}^C)$ является on-shell вектором.

2.4. Соотношения между формфакторами. Очевидно, что в квантовых интегрируемых моделях с $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей существуют девять формфакторов операторов $T_{ij}(z)$. Однако не все они являются независимыми. В частности, в силу инвариантности R -матрицы при транспонировании по обоим пространствам отображение²⁾

$$\psi: T_{ij}(u) \mapsto T_{ji}(u) \quad (2.14)$$

¹⁾Для простоты здесь и в дальнейшем мы не делаем различия между векторами и дуальными векторами.

²⁾Для простоты мы обозначаем отображения (2.14), (2.15) и (2.16), действующие на операторы, векторы и формфакторы, одной и той же буквой ψ . То же самое соглашение применяется к отображениям (2.17), (2.18) и (2.19) ниже.

задает антиморфизм алгебры (2.2). Действуя на векторы Бете, этот антиморфизм отображает их в дуальные векторы и наоборот:

$$\psi(\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})) = \mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}), \quad \psi(\mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})) = \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}). \quad (2.15)$$

Отсюда имеем

$$\psi(\mathcal{F}_{a,b}^{(i,j)}(z|\bar{u}^C, \bar{v}^C; \bar{u}^B, \bar{v}^B)) = \mathcal{F}_{a',b'}^{(j,i)}(z|\bar{u}^B, \bar{v}^B; \bar{u}^C, \bar{v}^C), \quad (2.16)$$

и, следовательно, формфактор $\mathcal{F}_{a,b}^{(i,j)}(z)$ можно получить из $\mathcal{F}_{a,b}^{(j,i)}(z)$ путем замен $\{\bar{u}^C, \bar{v}^C\} \leftrightarrow \{\bar{u}^B, \bar{v}^B\}$ и $\{a, b\} \leftrightarrow \{a', b'\}$.

Еще одно соотношение между формфакторами возникает благодаря отображению φ ,

$$\varphi: T_{ij}(u) \mapsto T_{4-j, 4-i}(-u), \quad (2.17)$$

которое задает изоморфизм алгебры (2.2) [38]. Из этого изоморфизма вытекает следующее правило преобразования вектора Бете:

$$\varphi(\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})) = \mathbb{B}^{b,a}(-\bar{v}; -\bar{u}), \quad \varphi(\mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})) = \mathbb{C}^{b,a}(-\bar{v}; -\bar{u}). \quad (2.18)$$

Поскольку отображение φ связывает операторы T_{11} и T_{33} , оно также приводит к замене функций $r_1 \leftrightarrow r_3$. Отсюда

$$\varphi(\mathcal{F}_{a,b}^{(i,j)}(z|\bar{u}^C, \bar{v}^C; \bar{u}^B, \bar{v}^B)) = \mathcal{F}_{b,a}^{(4-j, 4-i)}(-z|-\bar{v}^C, -\bar{u}^C; -\bar{v}^B, -\bar{u}^B)|_{r_1 \leftrightarrow r_3}. \quad (2.19)$$

Таким образом, у нас остается не более четырех независимых формфакторов, например формфакторы операторов $T_{11}(z)$, $T_{22}(z)$, $T_{12}(z)$ и $T_{13}(z)$.

3. ФОРМФАКТОРЫ В МОДЕЛЯХ С $GL(2)$ -СИММЕТРИЕЙ

Прежде чем привести основные результаты настоящей работы, мы напомним детерминантные представления для формфакторов, полученные ранее в интегрируемых моделях с $GL(2)$ -инвариантной R -матрицей [15], [16]. На самом деле эти результаты можно рассматривать как частные случаи формфакторов в моделях с $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей, которые соответствуют специальным векторам Бете с $a = 0$ или $b = 0$. Ниже мы положим для определенности $b = 0$. Пусть

$$\mathbb{C}^a(\bar{u}) = \mathbb{C}^{a,0}(\bar{u}; \emptyset), \quad \mathbb{B}^a(\bar{u}) = \mathbb{B}^{a,0}(\bar{u}; \emptyset). \quad (3.1)$$

Векторы Бете (3.1) становятся on-shell векторами, если параметры $\bar{u}$ удовлетворяют системе уравнений Бете

$$r_1(u_i) = \frac{f(u_i, \bar{u}_i)}{f(\bar{u}_i, u_i)} = (-1)^{a-1} \frac{h(u_i, \bar{u})}{h(\bar{u}, u_i)}, \quad i = 1, \dots, a. \quad (3.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (T_{11}(w) + T_{22}(w))\mathbb{B}^a(\bar{u}) &= \tau_2(w|\bar{u}) \mathbb{B}^a(\bar{u}), \\ \mathbb{C}^a(\bar{u})(T_{11}(w) + T_{22}(w)) &= \tau_2(w|\bar{u}) \mathbb{C}^a(\bar{u}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\tau_2(w) \equiv \tau_2(w|\bar{u}) = r_1(w)f(\bar{u}, w) + f(w, \bar{u}). \quad (3.4)$$

Формфакторы матричных элементов матрицы монодромии в моделях с $GL(2)$ -симметрией определяются как

$$\mathcal{F}_a^{(i,j)}(z) \equiv \mathcal{F}_a^{(i,j)}(z|\bar{u}^C; \bar{u}^B) = \mathbb{C}^{a'}(\bar{u}^C) T_{ij}(z) \mathbb{B}^a(\bar{u}^B), \quad (3.5)$$

где оба вектора являются on-shell векторами. Для краткости мы использовали обозначение $a' = a + j - i$.

Все представления для формфакторов операторов $T_{ij}(z)$, $i, j = 1, 2$, основаны на детерминантной формуле для скалярного произведения on-shell вектора Бете и вектора Бете общего вида [39]. Из этой формулы немедленно следуют подобные представления для формфакторов $\mathcal{F}_a^{(1,2)}(z)$ и $\mathcal{F}_a^{(2,1)}(z)$. А именно, пусть $\bar{x} = \{\bar{u}^B, z\}$. Тогда

$$\mathcal{F}_a^{(1,2)}(z) = \Delta'_{a'}(\bar{u}^C) \Delta_{a'}(\bar{x}) \det n_{jk}, \quad (3.6)$$

где

$$n_{jk} = \frac{c}{g(x_k, \bar{u}^C)} \frac{\partial \tau_2(x_k | \bar{u}^C)}{\partial u_j^C}. \quad (3.7)$$

Результат для $\mathcal{F}_a^{(2,1)}(z)$ можно получить из формул (3.6), (3.7) с помощью замен $\bar{u}^C \leftrightarrow \bar{u}^B$ и $a' \leftrightarrow a$:

$$\mathcal{F}_a^{(2,1)}(z) = \Delta'_a(\bar{u}^B) \Delta_a(\bar{y}) \det_a \left(\frac{c}{g(y_k, \bar{u}^B)} \frac{\partial \tau_2(y_k | \bar{u}^B)}{\partial u_j^B} \right), \quad (3.8)$$

где $\bar{y} = \{\bar{u}^C, z\}$.

Для формфакторов диагональных элементов $T_{ss}(z)$, $s = 1, 2$, существует несколько эквивалентных формул. Мы приведем здесь представления в виде определителей матриц размера $(a+1) \times (a+1)$. Имеем

$$\mathcal{F}_a^{(s,s)}(z) = \Delta'_a(\bar{u}^C) \Delta_{a+1}(\bar{x}) \det_{a+1} n_{jk}^{(s)}, \quad s = 1, 2, \quad (3.9)$$

где $\bar{x} = \{\bar{u}^B, z\}$. Элементы $n_{jk}^{(s)}$ матрицы $n^{(s)}$ в первых a строках ($j = 1, \dots, a$) даются выражением (3.7). Заметим, однако, что количество элементов в наборе $\bar{u}^C$ в формуле (3.7) равно $a+1$, в то время как для формфакторов $\mathcal{F}_a^{(s,s)}(z)$ мы имеем $\# \bar{u}^C = a$. Можно сказать, что в обоих случаях $\# \bar{u}^C = a'$. В последней строке

$$n_{a+1,k}^{(1)} = (-1)^a r_1(x_k) h(\bar{u}^B, x_k), \quad n_{a+1,k}^{(2)} = h(x_k, \bar{u}^B). \quad (3.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу уравнений Бете (3.2) имеет место равенство

$$n_{a+1,k}^{(1)} + n_{a+1,k}^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, \dots, a$$

(т. е. при $x_k \in \bar{u}^B$). Поэтому формфактор трансфер-матрицы $T_{11}(z) + T_{22}(z)$ сводится к собственному значению $\tau(z|\bar{u}^B)$, умноженному на скалярное произведение векторов $\mathbb{C}^a(\bar{u}^C)$ и $\mathbb{B}^a(\bar{u}^B)$. Этот результат, разумеется, сразу следует из определения on-shell векторов Бете.

Производя в формулах (3.9), (3.10) замену $\bar{u}^C \leftrightarrow \bar{u}^B$, мы получаем альтернативные детерминантные представления для формфакторов операторов $T_{ss}(z)$. Несмотря на то что эти два типа представлений выглядят сильно отличающимися друг от друга, можно доказать их эквивалентность (см. работу [40]).

Таким образом, мы видим, что в моделях с $GL(2)$ -симметрией формфакторы элементов матрицы монодромии пропорциональны якобианам, порожденным собственным значением $\tau_2(w)$ на левом или правом векторе (с точностью до возможной модификации одной строки).

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Из результатов, приведенных в разделе 3, можно сделать предположение об их возможном обобщении на модели с $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей. Действительно, кажется вполне разумным ожидать, что формфакторы матричных элементов матрицы монодромии в таких моделях также пропорциональны якобианам, порожденным собственным значением трансфер-матрицы. Однако эта гипотеза подтверждается лишь частично. В этом разделе мы покажем, что формфакторы операторов $T_{ij}(z)$ в моделях, построенных на основе группы $GL(3)$, имеют более сложные детерминантные представления.

4.1. Формфакторы внедиагональных элементов. Наиболее простую структуру имеют детерминантные представления для формфакторов операторов $T_{ij}(z)$ при $|i - j| = 1$. Они были вычислены в работе [37]. Мы начинаем наше изложение с формфактора $\mathcal{F}_{a,b}^{(1,2)}(z)$:

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(1,2)}(z) \equiv \mathcal{F}_{a,b}^{(1,2)}(z|\bar{u}^C, \bar{v}^C; \bar{u}^B, \bar{v}^B) = \mathbb{C}^{a',b'}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) T_{12}(z) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B), \quad (4.1)$$

где $\mathbb{C}^{a',b'}(\bar{u}^C; \bar{v}^C)$ и $\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B)$ являются on-shell векторами Бете. Как и в случае $GL(2)$, мы используем обозначения a' и b' , определение которых зависит от рассматриваемого формфактора. Для $\mathcal{F}_{a,b}^{(1,2)}(z)$ имеем $a' = a + 1$, $b' = b$.

Для того чтобы описать детерминантное представление для этого формфактора, мы введем набор переменных $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_{a'+b}\}$ как объединение трех наборов, $\bar{x} = \{\bar{u}^B, \bar{v}^C, z\}$, и определим скалярную функцию $\mathcal{H}_{a',b}$ следующим образом:

$$\mathcal{H}_{a',b} = \frac{h(\bar{x}, \bar{u}^B)h(\bar{v}^C, \bar{x})}{h(\bar{v}^C, \bar{u}^B)} \Delta'_{a'}(\bar{u}^C) \Delta'_b(\bar{v}^B) \Delta_{a+b+1}(\bar{x}). \quad (4.2)$$

Следующее предложение доказано в статье [37].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Формфактор $\mathcal{F}_{a,b}^{(1,2)}(z)$ имеет следующее детерминантное представление:

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(1,2)}(z) = \mathcal{H}_{a',b} \det_{a'+b} \mathcal{N}, \quad (4.3)$$

где матрица $\mathcal{N}$ размера $(a' + b) \times (a' + b)$ имеет элементы

$$\mathcal{N}_{j,k} = \frac{c}{f(x_k, \bar{u}^B)f(\bar{v}^C, x_k)} \frac{g(x_k, \bar{u}^B)}{g(x_k, \bar{u}^C)} \frac{\partial \tau(x_k|\bar{u}^C, \bar{v}^C)}{\partial u_j^C}, \quad j = 1, \dots, a', \quad (4.4)$$

$$\mathcal{N}_{a'+j,k} = \frac{-c}{f(x_k, \bar{u}^B)f(\bar{v}^C, x_k)} \frac{g(\bar{v}^C, x_k)}{g(\bar{v}^B, x_k)} \frac{\partial \tau(x_k|\bar{u}^B, \bar{v}^B)}{\partial v_j^B}, \quad j = 1, \dots, b. \quad (4.5)$$

Мы видим, что это представление включает в себя два собственных значения трансфер-матрицы. А именно, элементы в первых $a + 1$ строках матрицы $\mathcal{N}$ пропорциональны производным собственного значения $\tau(x_k|\bar{u}^C, \bar{v}^C)$ на левом векторе,

в то время как элементы в последних b строках матрицы $\mathcal{N}$ пропорциональны производным собственного значения $\tau(x_k|\bar{u}^B, \bar{v}^B)$ на правом векторе. Таким образом, как мы уже упоминали в начале раздела, это детерминантное представление не является простым обобщением формулы (3.6). Тем не менее легко убедиться в том, что при $b = 0$ формула (4.3) воспроизводит результат (3.6).

Детерминантные представления других формфакторов $\mathcal{F}_{a,b}^{(i,j)}(z)$ при $|i - j| = 1$ можно получить из (4.3) с помощью отображений (2.16), (2.19). Прежде всего приведем явные формулы для формфактора оператора T_{23} :

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(2,3)}(z) \equiv \mathcal{F}_{a,b}^{(2,3)}(z|\bar{u}^C, \bar{v}^C; \bar{u}^B, \bar{v}^B) = \mathbb{C}^{a',b'}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) T_{23}(z) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B), \quad (4.6)$$

где теперь $a' = a$ и $b' = b + 1$.

Введем набор $\bar{y} = \{y_1, \dots, y_{a+b'}\}$ как объединение трех наборов, $\bar{y} = \{\bar{u}^C, \bar{v}^B, z\}$, и функцию

$$\tilde{\mathcal{H}}_{a,b'} = \frac{h(\bar{y}, \bar{u}^C) h(\bar{v}^B, \bar{y})}{h(\bar{v}^B, \bar{u}^C)} \Delta'_a(\bar{u}^B) \Delta'_{b'}(\bar{v}^C) \Delta_{a+b+1}(\bar{y}). \quad (4.7)$$

Следующее предложение также доказано в статье [37].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Формфактор $\mathcal{F}_{a,b}^{(2,3)}(z)$ имеет следующее детерминантное представление:*

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(2,3)}(z) = \tilde{\mathcal{H}}_{a,b'} \det_{a+b'} \tilde{\mathcal{N}}, \quad (4.8)$$

где матрица $\tilde{\mathcal{N}}$ размера $(a + b') \times (a + b')$ имеет элементы

$$\tilde{\mathcal{N}}_{j,k} = \frac{c}{f(y_k, \bar{u}^C) f(\bar{v}^B, y_k)} \frac{g(y_k, \bar{u}^C)}{g(y_k, \bar{u}^B)} \frac{\partial \tau(y_k|\bar{u}^B, \bar{v}^B)}{\partial u_j^B}, \quad j = 1, \dots, a, \quad (4.9)$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_{a+j,k} = \frac{-c}{f(y_k, \bar{u}^C) f(\bar{v}^B, y_k)} \frac{g(\bar{v}^B, y_k)}{g(\bar{v}^C, y_k)} \frac{\partial \tau(y_k|\bar{u}^C, \bar{v}^C)}{\partial v_j^C}, \quad j = 1, \dots, b'. \quad (4.10)$$

С помощью свойств (2.5) легко проверить, что представление для $\mathcal{F}_{a,b}^{(2,3)}(z)$ можно получить из представления для формфактора $\mathcal{F}_{a,b}^{(1,2)}(z)$ путем замен

$$\bar{u}^C \leftrightarrow -\bar{v}^C, \quad \bar{u}^B \leftrightarrow -\bar{v}^B, \quad r_1 \leftrightarrow r_3, \quad a \leftrightarrow b, \quad (4.11)$$

как и предписано изоморфизмом (2.19).

В то же время можно заметить, что формулы для этих двух формфакторов также связаны заменами

$$\{\bar{u}^C, \bar{v}^C\} \leftrightarrow \{\bar{u}^B, \bar{v}^B\}, \quad \{a, b\} \leftrightarrow \{a', b'\}. \quad (4.12)$$

При выполнении этих преобразований следует соблюдать осторожность, поскольку определение величин a' и b' изменяется, когда мы переходим от формфактора $\mathcal{F}_{a,b}^{(1,2)}(z)$ к формфактору $\mathcal{F}_{a,b}^{(2,3)}(z)$ и наоборот.

Применяя отображение (2.16) к представлениям (4.3), (4.8), мы приходим к следующему предложению [37].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Формфактор $\mathcal{F}_{a,b}^{(3,2)}(z)$ имеет следующее детерминантное представление:

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(3,2)}(z) = \mathcal{H}_{a',b} \det_{a'+b} \mathcal{N}, \quad (4.13)$$

где $\mathcal{H}_{a',b}$ и $\mathcal{N}$ заданы соответственно формулами (4.2) и (4.3).

Формфактор $\mathcal{F}_{a,b}^{(2,1)}(z)$ имеет следующее детерминантное представление:

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(2,1)}(z) = \tilde{\mathcal{H}}_{a,b'} \det_{a+b'} \tilde{\mathcal{N}}, \quad (4.14)$$

где $\tilde{\mathcal{H}}_{a,b'}$ и $\tilde{\mathcal{N}}$ заданы соответственно формулами (4.7) и (4.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Мы хотели бы еще раз подчеркнуть, что, несмотря на то что формально представления (4.13) и (4.14) совпадают с (4.3) и (4.8), значения a' и b' в этих формулах разные. Действительно, в формуле (4.3) $a' = a + 1$ и $b' = b$, в то время как в формуле (4.13) $a' = a$ и $b' = b - 1$. Аналогично, в формуле (4.8) $a' = a$ и $b' = b + 1$, а в формуле (4.14) $a' = a - 1$ и $b' = b$. Поэтому, в частности, матрицы $\mathcal{N}$ и $\tilde{\mathcal{N}}$ в представлениях (4.3) и (4.8) имеют размер $(a + b + 1) \times (a + b + 1)$, однако в представлениях (4.13) и (4.14) те же самые матрицы имеют размер $(a + b) \times (a + b)$.

4.2. Формфакторы диагональных элементов. Формфакторы диагональных элементов матрицы монодромии

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(s,s)}(z) \equiv \mathcal{F}_{a,b}^{(s,s)}(z | \bar{u}^C, \bar{v}^C; \bar{u}^B, \bar{v}^B) = \mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) T_{ss}(z) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) \quad (4.15)$$

были вычислены в работе [36]. Здесь мы приводим для них другие представления. В определенном смысле они аналогичны детерминантным формулам для формфакторов в моделях с $GL(2)$ -симметрией (см. раздел 3). А именно, они основаны на определителе матрицы $\mathcal{N}$, заданной формулами (4.4), (4.5), но одна строка этой матрицы изменяется.

Как и прежде, мы объединяем наборы $\bar{u}^B$ и $\bar{v}^C$, а также параметр z в набор $\bar{x} = \{\bar{u}^B, \bar{v}^C, z\}$. Кроме того, мы вводим три $(a + b + 1)$ -компонентных вектора $Y^{(s)}$, $s = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} Y_k^{(s)} &= \delta_{s2} - \delta_{s1} + \frac{u_k^B}{c} (\delta_{s1} - \delta_{s3}) \left(\frac{f(\bar{v}^B, u_k^B)}{f(\bar{v}^C, u_k^B)} - 1 \right), & k = 1, \dots, a, \\ Y_{a+k}^{(s)} &= \delta_{s2} - \delta_{s3} + \frac{v_k^C + c}{c} (\delta_{s1} - \delta_{s3}) \left(\frac{f(v_k^C, \bar{u}^C)}{f(v_k^C, \bar{u}^B)} - 1 \right), & k = 1, \dots, b. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Значения $Y_{a+b+1}^{(s)}$ существенны только в случае $\mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) = (\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B))^\dagger$, т. е. когда $\bar{u}^B = \bar{u}^C = \bar{u}$ и $\bar{v}^B = \bar{v}^C = \bar{v}$. Зададим их следующими формулами:

$$Y_{a+b+1}^{(1)} = \frac{r_1(z) f(\bar{u}, z)}{f(\bar{v}, z) f(z, \bar{u})}, \quad Y_{a+b+1}^{(2)} = 1, \quad Y_{a+b+1}^{(3)} = \frac{r_3(z) f(z, \bar{v})}{f(\bar{v}, z) f(z, \bar{u})}. \quad (4.17)$$

Здесь можно положить $\bar{v} = \bar{v}^C$ или $\bar{v} = \bar{v}^B$, а также $\bar{u} = \bar{u}^C$ или $\bar{u} = \bar{u}^B$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Определим матрицу $\mathcal{N}^{(s)}$ размера $(a + b + 1) \times (a + b + 1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{j,k}^{(s)} &= \mathcal{N}_{j,k}, & j = 1, \dots, a + b, \\ \mathcal{N}_{a+b+1,k}^{(s)} &= Y_k^{(s)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Здесь матрица $\mathcal{N}$ задана равенствами (4.4), (4.5). Тогда

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(s,s)}(z) = (-1)^b \mathcal{H}_{a',b} \det_{a+b+1} \mathcal{N}^{(s)}, \quad (4.19)$$

где $\mathcal{H}_{a',b}$ дается формулой (4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Следует помнить, что в случае формфакторов $\mathcal{F}_{a,b}^{(s,s)}(z)$ мы имеем $a' = a$, в то время как в случае формфактора $\mathcal{F}_{a,b}^{(1,2)}(z)$ $a' = a + 1$. Поэтому функция $\mathcal{H}_{a',b}$ в формуле (4.19) дается равенством (4.2), в котором следует положить $a' = a$. То же самое замечание касается матричных элементов матрицы $\mathcal{N}^{(s)}$.

Мы докажем предложение 4.4 в разделе 6, сведя представление (4.19) к формулам, полученным в работе [36]. Однако, прежде чем это сделать, мы хотели бы отметить, что, как и в случае $GL(2)$, из представления (4.19) следует несколько альтернативных детерминантных формул для формфакторов диагональных элементов матрицы монодромии. Они могут быть получены из (4.19) с помощью морфизмов (2.16) и (2.19).

Также следует отметить, что

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 Y_k^{(s)} &= 0, \quad k = 1, \dots, a+b, \\ \sum_{s=1}^3 Y_{a+b+1}^{(s)} &= \frac{\tau(z|\bar{u}, \bar{v})}{f(z, \bar{u})f(\bar{v}, z)}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Поэтому формфактор трансфер-матрицы сводится к собственному значению $\tau(z|\bar{u}, \bar{v})$, умноженному на минор матрицы $\mathcal{N}^{(s)}$, построенный на первых $a+b$ строках и столбцах. Этот минор обращается в ноль, если $\mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \neq (\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B))^\dagger$ (см. работу [35] и п. 6.1), и, таким образом, формфактор трансфер-матрицы между различными состояниями равен нулю, как и должно быть. В противном случае, если $\mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) = (\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B))^\dagger$, то формфактор трансфер-матрицы равен собственному значению $\tau(z|\bar{u}, \bar{v})$, умноженному на квадрат нормы вектора Бете (см. п. 6.2).

4.3. Формфактор элемента $T_{13}(z)$. Формфактор матричного элемента $T_{13}(z)$ определяется как

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(1,3)}(z) \equiv \mathcal{F}_{a,b}^{(1,3)}(z|\bar{u}^C, \bar{v}^C; \bar{u}^B, \bar{v}^B) = \mathbb{C}^{a',b'}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) T_{13}(z) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B), \quad (4.21)$$

где $a' = a + 1$ и $b' = b + 1$. Как уже отмечалось, вычисление этого формфактора опирается на новый метод, который будет представлен в другой публикации. Однако для полноты описания формфакторов в случае группы $GL(3)$ мы анонсируем результат. Детерминантное представление для формфактора оператора $T_{13}(z)$ аналогично представлениям для формфакторов диагональных элементов $T_{ss}(z)$. Объединим снова наборы $\bar{u}^B$, $\bar{v}^C$ и параметр z в набор $\bar{x} = \{\bar{u}^B, \bar{v}^C, z\}$. Теперь этот набор содержит $a' + b'$ (т. е. $a + b + 2$) элемента. Введем также $(a' + b')$ -компонентный вектор $Y^{(1,3)}$:

$$Y_k^{(1,3)} = (-1)^{b'} \frac{r_3(x_k)h(x_k, \bar{v}^B)}{f(x_k, \bar{u}^B)h(\bar{v}^C, x_k)} + \frac{h(\bar{v}^B, x_k)}{h(\bar{v}^C, x_k)}. \quad (4.22)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Определим матрицу $\mathcal{N}^{(1,3)}$ размера $(a' + b') \times (a' + b')$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{j,k}^{(1,3)} &= \mathcal{N}_{j,k}, & j &= 1, \dots, a' + b, \\ \mathcal{N}_{a'+b',k}^{(1,3)} &= Y_k^{(1,3)}.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Здесь матрица $\mathcal{N}$ задана равенствами (4.4), (4.5). Тогда

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(1,3)}(z) = (-1)^{b'} \mathcal{H}_{a',b} \det_{a'+b+1} \mathcal{N}^{(1,3)}, \quad (4.24)$$

где функция $\mathcal{H}_{a',b}$ определена формулой (4.2).

Отметим, что, применяя отображение (2.19) к результату (4.24), можно получить альтернативное представление для формфактора $\mathcal{F}_{a,b}^{(1,3)}(z)$. В свою очередь действие антиморфизма (2.16) на формулу (4.24) позволяет получить детерминантное представление для формфактора $\mathcal{F}_{a,b}^{(3,1)}(z)$.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФОРМФАКТОРОВ

Как уже упоминалось, ключевую роль в вычислении формфакторов в моделях с $GL(2)$ -симметрией играет детерминантное представление для скалярного произведения on-shell вектора Бете и вектора Бете общего вида. В случае группы $GL(3)$ аналог такого детерминантного представления неизвестен. Поэтому вычисление формфакторов становится гораздо более сложным. Читатель может найти подробности этих вычислений в статьях [35]–[37]. Здесь мы дадим лишь общее описание метода, который использовался в отмеченных выше работах.

Исследование формфакторов основано на явном представлении для скалярного произведения векторов Бете, полученном в работах [41]–[43]. Скалярное произведение определяется следующим образом:

$$S_{a,b} \equiv S_{a,b}(\bar{u}^C, \bar{v}^C; \bar{u}^B, \bar{v}^B) = \mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B). \quad (5.1)$$

Здесь предполагается, что параметры Бете $\{\bar{u}^C, \bar{v}^C\}$ и $\{\bar{u}^B, \bar{v}^B\}$ являются комплексными числами в общем положении. В представлении, полученном в работе [41], скалярное произведение задается суммой по разбиениям параметров Бете на подмножества (так называемая *формула сумм*). Вообще говоря, данное представление не сводится к более компактному виду. Однако, вычисляя формфакторы, мы имеем дело с очень специфическими случаями скалярных произведений, когда большинство параметров удовлетворяет уравнениям Бете (2.9). В подобных случаях удается свести суммы по разбиениям к одному детерминанту.

Рассмотрим в качестве примера формфактор оператора $T_{12}(z)$. Действие оператора $T_{12}(z)$ на вектор $\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B)$ имеет вид (см. статью [38])

$$\begin{aligned}T_{12}(z) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) &= f(\bar{v}^B, z) \mathbb{B}^{a+1,b}(\{\bar{u}^B, z\}; \bar{v}^B) + \\ &+ \sum_{i=1}^b g(z, v_i^B) f(\bar{v}_i^B, v_i^B) \mathbb{B}^{a+1,b}(\{\bar{u}^B, z\}; \{\bar{v}_i^B, z\}).\end{aligned}\quad (5.2)$$

Таким образом, формфактор оператора $T_{12}(z)$ равен

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{a,b}^{(1,2)}(z) &= f(\bar{v}^B, z) S_{a+1,b}(\bar{u}^C, \bar{v}^C; \{\bar{u}^B, z\}, \bar{v}^B) + \\ &+ \sum_{i=1}^b g(z, v_i^B) f(\bar{v}_i^B, v_i^B) S_{a+1,b}(\bar{u}^C, \bar{v}^C; \{\bar{u}^B, z\}, \{\bar{v}_i^B, z\}), \end{aligned} \quad (5.3)$$

и мы сводим исходную задачу к вычислению скалярных произведений, в которых только переменная z является произвольным комплексным числом, а остальные переменные удовлетворяют уравнениям Бете (2.9).

С формальной точки зрения другие формфакторы можно вычислить похожим способом. В работе [38] было доказано, что действие матричных элементов матрицы монодромии на векторы Бете сводится к линейной комбинации последних. Поэтому формфакторы операторов $T_{ij}(z)$ всегда могут быть выражены в терминах линейных комбинаций скалярных произведений. Однако каждый конкретный случай имеет свои особенности. В частности, как уже объяснялось выше, нет нужды в особом рассмотрении других формфакторов $\mathcal{F}_{a,b}^{(i,j)}(z)$ при $|i - j| = 1$, поскольку все они могут быть получены из $\mathcal{F}_{a,b}^{(1,2)}(z)$ с помощью отображений (2.16), (2.19).

Формфакторы диагональных операторов $T_{ss}(z)$ также можно вычислить в рамках схемы, описанной выше. Однако действие операторов $T_{ss}(z)$ на векторы $\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B)$ является гораздо более сложным, чем действие в формуле (5.2). В частности, оно содержит двойную сумму по параметрам Бете. Это делает прямое вычисление формфакторов $\mathcal{F}_{a,b}^{(s,s)}(z)$ весьма сложным с технической точки зрения. Поэтому в случае формфакторов диагональных элементов матрицы монодромии удобно воспользоваться специальным приемом, основанным на использовании *твистованной трансфер-матрицы*. Мы опишем этот метод в следующем пункте.

И наконец, вычисление формфакторов $\mathcal{F}_{a,b}^{(i,j)}(z)$ при $|i - j| = 2$ также должно быть включено в общую схему. Однако в этом случае из-за технических проблем нам не удалось свести сумму по разбиениям к одному определителю. Данный факт кажется довольно странным, поскольку действие оператора $T_{13}(z)$ на векторы Бете является простейшим,

$$T_{13}(z) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) = \mathbb{B}^{a+1,b+1}(\{\bar{u}^B, z\}; \{\bar{v}^B, z\}), \quad (5.4)$$

и поэтому формфактор оператора $T_{13}(z)$ задается всего одним скалярным произведением:

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(1,3)}(z) = S_{a+1,b+1}(\bar{u}^C, \bar{v}^C; \{\bar{u}^B, z\}, \{\bar{v}^B, z\}). \quad (5.5)$$

Тем не менее, несмотря на эту простоту, метод вычисления сумм по разбиениям, которые возникают в формуле (5.5), на сегодняшний день не развит. Поэтому для исследования формфакторов $\mathcal{F}_{a,b}^{(i,j)}(z)$ при $|i - j| = 2$ мы пользуемся иным подходом, который будет описан в отдельной публикации. Здесь же мы только отметим, что формфакторы $\mathcal{F}_{a,b}^{(1,3)}(z)$ и $\mathcal{F}_{a,b}^{(3,1)}(z)$ связаны отображением (2.16).

5.1. Твистованная трансфер-матрица. R -матрица (2.1) называется $GL(3)$ -инвариантной, так как $[\hat{\kappa}_1 \hat{\kappa}_2, R_{12}] = 0$ для любой матрицы $\hat{\kappa} \in GL(3)$. Легко видеть [41], [44]–[46], что благодаря этому свойству *твистованная матрица монодромии* $\hat{\kappa}T(w)$ удовлетворяет алгебре (2.2). Если матрица $\hat{\kappa}T(w)$ обладает теми же

псевдовакуумным и дуальным псевдовакуумным векторами, что и исходная матрица $T(w)$, то вся техника иерархического алгебраического анзаца Бете становится применимой к твистованной матрице монодромии. В частности, можно найти спектр твистованной трансфер-матрицы $\text{tr } \hat{\kappa}T(w)$. Ее собственные векторы называются твистованными on-shell векторами Бете (или просто твистованными on-shell векторами).

Рассмотрим матрицу $\hat{\kappa} = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$, где κ_i суть произвольные комплексные числа. Очевидно, что соответствующая твистованная матрица монодромии имеет те же самые псевдовакуумный и дуальный псевдовакуумный векторы. В действительности умножение матрицы $T(w)$ на $\hat{\kappa}$ сводится к замене исходных собственных значений $\lambda_i(w)$ (2.7) на $\kappa_i \lambda_i(w)$. Поэтому, как и обычные on-shell векторы, твистованные on-shell векторы могут быть параметризованы набором комплексных чисел, удовлетворяющих твистованным уравнениям Бете. Последние имеют вид (2.9), где следует заменить $r_k(z)$ на $r_k(z) \kappa_k / \kappa_2$. Ниже нам потребуются эти уравнения в логарифмическом виде. Пусть

$$\Phi_j = \ln r_1(u_j) - \ln \frac{f(u_j, \bar{u}_j)}{f(\bar{u}_j, u_j)} - \ln f(\bar{v}, u_j), \quad j = 1, \dots, a, \quad (5.6)$$

$$\Phi_{a+j} = \ln r_3(v_j) - \ln \frac{f(\bar{v}_j, v_j)}{f(v_j, \bar{v}_j)} - \ln f(v_j, \bar{u}), \quad j = 1, \dots, b. \quad (5.7)$$

Тогда система твистованных уравнений Бете имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_j &= \ln \kappa_2 - \ln \kappa_1 + 2\pi i \ell_j, & j &= 1, \dots, a, \\ \Phi_{a+j} &= \ln \kappa_2 - \ln \kappa_3 + 2\pi i m_j, & j &= 1, \dots, b, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где ℓ_j и m_j суть некоторые целые числа. Якобиан уравнений (5.6) и (5.7) тесно связан с нормой on-shell вектора Бете и со средним значением операторов $T_{ss}(z)$ [36].

Используя понятие твистованной трансфер-матрицы, можно вычислить форм-факторы диагональных элементов матрицы монодромии. Рассмотрим матричный элемент

$$Q_{\bar{\kappa}}(z) = \mathbb{C}_{\bar{\kappa}}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) (\text{tr } \hat{\kappa}T(z) - \text{tr } T(z)) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B), \quad (5.9)$$

где $\mathbb{C}_{\bar{\kappa}}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C)$ и $\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B)$ являются соответственно твистованным и обычным on-shell векторами. Здесь и далее мы пользуемся обозначением $\bar{\kappa} = \{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$. Очевидно, что

$$Q_{\bar{\kappa}}(z) = \mathbb{C}_{\bar{\kappa}}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \sum_{j=1}^3 (\kappa_j - 1) T_{jj}(z) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B), \quad (5.10)$$

откуда

$$\left. \frac{dQ_{\bar{\kappa}}(z)}{d\kappa_s} \right|_{\bar{\kappa}=1} = \mathbb{C}_{\bar{\kappa}}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \Big|_{\bar{\kappa}=1} T_{ss}(z) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B). \quad (5.11)$$

Здесь условие $\bar{\kappa} = 1$ означает, что $\kappa_i = 1$ для $i = 1, 2, 3$. Заметим, что, после того как мы положили $\bar{\kappa} = 1$, вектор $\mathbb{C}_{\bar{\kappa}}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C)$ становится обычным on-shell вектором $\mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C)$. Следовательно, в правой части равенства (5.11) мы получаем форм-фактор оператора $T_{ss}(z)$:

$$\left. \frac{dQ_{\bar{\kappa}}(z)}{d\kappa_s} \right|_{\bar{\kappa}=1} = \mathcal{F}_{a,b}^{(s,s)}(z | \bar{u}^C, \bar{v}^C; \bar{u}^B, \bar{v}^B). \quad (5.12)$$

С другой стороны,

$$Q_{\bar{\kappa}}(z) = (\tau_{\bar{\kappa}}(z|\bar{u}^C; \bar{v}^C) - \tau(z|\bar{u}^B; \bar{v}^B)) \mathbb{C}_{\bar{\kappa}}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B), \quad (5.13)$$

где $\tau(z|\bar{u}^B; \bar{v}^B)$ является собственным значением $\text{tr } T(z)$ (2.11), а $\tau_{\bar{\kappa}}(z|\bar{u}^C; \bar{v}^C)$ – собственное значение твистованной трансфер-матрицы $\text{tr } \hat{\kappa}T(z)$:

$$\tau_{\bar{\kappa}}(z) \equiv \tau_{\bar{\kappa}}(z|\bar{u}, \bar{v}) = \kappa_1 r_1(z) f(\bar{u}, z) + \kappa_2 f(z, \bar{u}) f(\bar{v}, z) + \kappa_3 r_3(z) f(z, \bar{v}). \quad (5.14)$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(s,s)}(z) = \frac{d}{d\kappa_s} [(\tau_{\bar{\kappa}}(z|\bar{u}^C; \bar{v}^C) - \tau(z|\bar{u}^B; \bar{v}^B)) \mathbb{C}_{\bar{\kappa}}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B)]_{\bar{\kappa}=1}, \quad (5.15)$$

и мы видим, что формфакторы $\mathcal{F}_{a,b}^{(s,s)}(z)$ можно вычислить путем дифференцирования по параметру κ_s скалярного произведения между твистованным on-shell вектором и обычным on-shell вектором.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.4

В данном разделе мы доказываем предложение 4.4. Более точно, мы демонстрируем, что детерминантные представления, приведенные в предложении 4.4, эквивалентны представлениям, полученным в работе [36].

Работая с формфакторами диагональных матричных элементов $T_{ss}(z)$, следует различать два случая:

- $\mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \neq (\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B))^\dagger$,
- $\mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) = (\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B))^\dagger$.

Мы рассмотрим эти два случая отдельно.

6.1. Доказательство для разных состояний. В данном пункте мы считаем, что $\mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \neq (\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B))^\dagger$. Это означает, что существует по крайней мере один параметр $w \in \{\bar{u}^C, \bar{v}^C\}$ такой, что $w \notin \{\bar{u}^B, \bar{v}^B\}$. Тогда

$$\mathbb{C}_{\bar{\kappa}}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) \Big|_{\bar{\kappa}=1} = 0 \quad (6.1)$$

как скалярное произведение двух собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям трансфер-матрицы. Следовательно, производная по параметру κ_s в формуле (5.15) должна действовать только на это скалярное произведение, и мы получаем

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(s,s)}(z) = (\tau(z|\bar{u}^C; \bar{v}^C) - \tau(z|\bar{u}^B; \bar{v}^B)) \frac{d}{d\kappa_s} \mathbb{C}_{\bar{\kappa}}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) \Big|_{\bar{\kappa}=1}. \quad (6.2)$$

Производные по параметрам κ_s от скалярного произведения между твистованным on-shell вектором и обычным on-shell вектором были вычислены в работе [36]. Приведем этот результат.

Прежде всего введем $(a+b)$ -компонентный вектор Ω как

$$\begin{aligned} \Omega_j &= \frac{g(u_j^C, \bar{u}_j^C)}{g(u_j^C, \bar{u}^B)}, & j &= 1, \dots, a, \\ \Omega_{a+j} &= \frac{g(v_j^B, \bar{v}_j^B)}{g(v_j^B, \bar{v}^C)}, & j &= 1, \dots, b. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Легко видеть, что, поскольку $\mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \neq (\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B))^\dagger$, данный вектор имеет по крайней мере одну ненулевую компоненту. Предположим без ограничения общности, что $\Omega_{a+b} \neq 0$. Тогда результат дифференцирования скалярного произведения по параметру κ_s имеет вид

$$\left. \frac{d}{d\kappa_s} \mathbb{C}_{\bar{\kappa}}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) \right|_{\bar{\kappa}=1} = \Omega_{a+b}^{-1} H_{a,b} \hat{\mathcal{N}}_{a+b, a+b+1}. \quad (6.4)$$

Здесь

$$H_{a,b} = \frac{(-1)^b \mathcal{H}_{a,b}}{f(z, \bar{u}^B) f(\bar{v}^C, z)} = \frac{h(\bar{w}, \bar{u}^B) h(\bar{v}^C, \bar{w})}{h(\bar{v}^C, \bar{u}^B)} \Delta'_a(\bar{u}^C) \Delta'_b(\bar{v}^B) \Delta_{a+b}(\bar{w}), \quad (6.5)$$

где $\mathcal{H}_{a,b}$ дано формулой (4.2), а $\bar{w} = \{\bar{u}^B, \bar{v}^C\}$. Множитель $\hat{\mathcal{N}}_{a+b, a+b+1}$ в равенстве (6.4) является алгебраическим дополнением к матричному элементу $\mathcal{N}_{a+b, a+b+1}^{(s)}$ матрицы $\mathcal{N}^{(s)}$ (4.18),

$$\hat{\mathcal{N}}_{a+b, a+b+1} = - \det_{\substack{j \neq a+b, \\ k \neq a+b+1}} \mathcal{N}_{j,k}^{(s)}. \quad (6.6)$$

Воспроизведем теперь данный результат исходя из детерминантного представления (4.19). Сначала запишем более подробно матричные элементы матрицы $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N}_{j,k} = (-1)^{a'-1} t(u_j^C, x_k) \frac{r_1(x_k) h(\bar{u}^C, x_k)}{f(\bar{v}^C, x_k) h(x_k, \bar{u}^B)} + t(x_k, u_j^C) \frac{h(x_k, \bar{u}^C)}{h(x_k, \bar{u}^B)}, \quad j = 1, \dots, a', \quad (6.7)$$

$$\mathcal{N}_{a'+j,k} = (-1)^{b-1} t(x_k, v_j^B) \frac{r_3(x_k) h(x_k, \bar{v}^B)}{f(x_k, \bar{u}^B) h(\bar{v}^C, x_k)} + t(v_j^B, x_k) \frac{h(\bar{v}^B, x_k)}{h(\bar{v}^C, x_k)}, \quad j = 1, \dots, b. \quad (6.8)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $a' = a$ и $b' = b$. Тем не менее мы использовали в формулах (6.7), (6.8) символ a' , поскольку в таком виде эти формулы остаются справедливыми и для формфактора $\mathcal{F}_{a,b}^{(1,2)}(z)$, где $a' = a + 1$.

Пусть

$$S(x_k) = \sum_{j=1}^{a'} \Omega_j \mathcal{N}_{j,k} + \sum_{j=1}^b \Omega_{a'+j} \mathcal{N}_{a'+j,k}. \quad (6.9)$$

Тогда, воспользовавшись формулами (A.1), легко получить

$$S(x_k) = \frac{\tau(x_k | \bar{u}^C, \bar{v}^C) - \tau(x_k | \bar{u}^B, \bar{v}^B)}{f(\bar{v}^C, x_k) f(x_k, \bar{u}^B)}. \quad (6.10)$$

Прямым вычислением можно проверить, что $S(u_k^B) = S(v_k^C) = 0$ в силу уравнений Бете. На самом деле в этом легко убедиться без каких-либо вычислений. Действительно, уравнения Бете эквивалентны утверждению о том, что функция $\tau(x_k | \bar{u}, \bar{v})$ не имеет полюсов в точках $x_k = u_j$ и $x_k = v_j$ (см. замечание 1). Тогда наличие множителя $f^{-1}(\bar{v}^C, x_k) f^{-1}(x_k, \bar{u}^B)$ немедленно приводит к равенствам $S(u_k^B) = S(v_k^C) = 0$.

Умножим теперь первые $a+b-1$ строк матрицы $\mathcal{N}^{(s)}$ на коэффициенты Ω_j/Ω_{a+b} и добавим их к $(a+b)$ -й строке. Тогда компоненты $(a+b)$ -й строки модифицируются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{a+b,k}^{(s),\text{mod}} &= 0, \quad k = 1, \dots, a+b, \\ \mathcal{N}_{a+b,a+b+1}^{(s),\text{mod}} &= \Omega_{a+b}^{-1} \frac{\tau(z|\bar{u}^C, \bar{v}^C) - \tau(z|\bar{u}^B, \bar{v}^B)}{f(\bar{v}^C, z)f(z, \bar{u}^B)}.\end{aligned}\quad (6.11)$$

Определитель $\det \mathcal{N}^{(s)}$ сводится к произведению элемента $\mathcal{N}_{a+b,a+b+1}^{(s),\text{mod}}$ на соответствующее алгебраическое дополнение, и мы приходим к равенству

$$\det_{a+b+1} \mathcal{N}^{(s)} = \Omega_{a+b}^{-1} \frac{\tau(z|\bar{u}^C, \bar{v}^C) - \tau(z|\bar{u}^B, \bar{v}^B)}{f(\bar{v}^C, z)f(z, \bar{u}^B)} \hat{\mathcal{N}}_{a+b,a+b+1}.\quad (6.12)$$

Мы хотели бы обратить внимание читателя на то, что матричный элемент $Y_{a+b+1}^{(s)}$ вышел из игры. Подставляя этот результат в равенство (4.19), мы немедленно воспроизводим формулу (6.4).

6.2. Доказательство для одинаковых состояний. В этом пункте мы считаем, что $\mathbb{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) = (\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B))^{\dagger}$; положим $\bar{u}^C = \bar{u}^B = \bar{u}$ и $\bar{v}^C = \bar{v}^B = \bar{v}$. В этом случае

$$\tau_{\bar{\kappa}}(z|\bar{u}^C; \bar{v}^C) - \tau(z|\bar{u}^B; \bar{v}^B) = 0 \quad \text{при} \quad \bar{\kappa} = 1, \quad \bar{u}^C = \bar{u}^B = \bar{u}, \quad \bar{v}^C = \bar{v}^B = \bar{v}, \quad (6.13)$$

следовательно, производная по κ_s в формуле (5.15) должна действовать только на разность собственных значений $\tau_{\bar{\kappa}}$ и τ . Отсюда находим

$$\mathcal{F}^{(s,s)}(z|\bar{u}, \bar{v}; \bar{u}, \bar{v}) = \|\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})\|^2 \left. \frac{d\tau_{\bar{\kappa}}(z|\bar{u}^C; \bar{v}^C)}{d\kappa_s} \right|_{\bar{\kappa}=1}, \quad (6.14)$$

и после вычисления производной от $\tau_{\bar{\kappa}}(z|\bar{u}^C; \bar{v}^C)$ по κ_s следует положить $\bar{u}^C = \bar{u}$ и $\bar{v}^C = \bar{v}$. Ниже в этом пункте мы всегда будем предполагать, что условие $\bar{\kappa} = 1$ автоматически влечет за собой $\bar{u}^C = \bar{u}^B = \bar{u}$ и $\bar{v}^C = \bar{v}^B = \bar{v}$.

Квадрат нормы on-shell вектора Бете $\|\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})\|^2$ был вычислен в работах [41], [35]. Он пропорционален минору матрицы $\mathcal{N}^{(s)}$, построенному на первых $(a+b)$ строках и столбцах³⁾:

$$\|\mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})\|^2 = H_{a,b} \det_{a+b} \mathcal{N}, \quad (6.15)$$

где $H_{a,b}$ дается формулой (6.5) при $\bar{u}^C = \bar{u}^B = \bar{u}$ и $\bar{v}^C = \bar{v}^B = \bar{v}$.

Приведем явные формулы для матричных элементов матрицы $\mathcal{N}$ при $\bar{u}^C = \bar{u}^B = \bar{u}$ и $\bar{v}^C = \bar{v}^B = \bar{v}$ (см. статьи [41], [35]). Для $j, k = 1, \dots, a$ мы имеем

$$\mathcal{N}_{j,k} = \delta_{jk} \left(-c \ln' r_1(u_k) - \sum_{\ell=1}^a \frac{2c^2}{u_{k\ell}^2 - c^2} + \sum_{m=1}^b t(v_m, u_k) \right) + \frac{2c^2}{u_{jk}^2 - c^2}, \quad (6.16)$$

где $u_{k\ell} = u_k - u_{\ell}$. Матричные элементы второго диагонального блока равны

$$\mathcal{N}_{a+j,a+k} = \delta_{jk} \left(c \ln' r_3(v_k) - \sum_{m=1}^b \frac{2c^2}{v_{km}^2 - c^2} + \sum_{\ell=1}^a t(v_k, u_{\ell}) \right) + \frac{2c^2}{v_{jk}^2 - c^2}, \quad (6.17)$$

³⁾Обратите внимание, что данный минор не зависит от s .

где $v_{km} = v_k - v_m$ и $j, k = 1, \dots, b$. Антидиагональные блоки имеют более простую структуру:

$$\mathcal{N}_{j,a+k} = t(v_k, u_j), \quad j = 1, \dots, a, \quad k = 1, \dots, b, \quad (6.18)$$

$$\mathcal{N}_{a+j,k} = t(v_j, u_k), \quad j = 1, \dots, b, \quad k = 1, \dots, a. \quad (6.19)$$

Отметим, что матрица $\mathcal{N}$ является симметричной: $\mathcal{N}_{jk} = \mathcal{N}_{kj}$. Также легко проверить (см. работу [35]), что

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{j,k} &= -c \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_k}, & j = 1, \dots, a+b, \quad k = 1, \dots, a, \\ \mathcal{N}_{j,a+k} &= c \frac{\partial \Phi_j}{\partial v_k}, & j = 1, \dots, a+b, \quad k = 1, \dots, b, \end{aligned} \quad (6.20)$$

где Φ_j задано равенствами (5.6), (5.7).

Воспроизведем результат (6.14) исходя из представления (4.19). Матричные элементы матрицы $\mathcal{N}_{j,k}^{(s)}$ при $j, k = 1, \dots, a+b$ совпадают с матричными элементами, определенными формулами (6.16)–(6.19). В последней строке имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{a+b+1,k}^{(s)} &= Y_k^{(s)} = \delta_{s2} - \delta_{s1}, & k = 1, \dots, a, \\ \mathcal{N}_{a+b+1,k}^{(s)} &= Y_k^{(s)} = \delta_{s2} - \delta_{s3}, & k = a+1, \dots, a+b. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Наконец, компоненты последнего столбца имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{j,a+b+1}^{(s)} &= \frac{c}{f(z, \bar{u})f(\bar{v}, z)} \frac{\partial \tau(z|\bar{u}, \bar{v})}{\partial u_j}, & j = 1, \dots, a, \\ \mathcal{N}_{a+j,a+b+1}^{(s)} &= -\frac{c}{f(z, \bar{u})f(\bar{v}, z)} \frac{\partial \tau(z|\bar{u}, \bar{v})}{\partial v_j}, & j = 1, \dots, b, \\ \mathcal{N}_{a+b+1,a+b+1}^{(s)} &= \frac{1}{f(z, \bar{u})f(\bar{v}, z)} \frac{\partial \tau_{\bar{\kappa}}(z|\bar{u}^C, \bar{v}^C)}{\partial \kappa_s} \Big|_{\bar{\kappa}=1}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Итак, мы описали матрицу $\mathcal{N}^{(s)}$ размера $(a+b+1) \times (a+b+1)$ в пределе $\bar{u}^C = \bar{u}^B = \bar{u}$ и $\bar{v}^C = \bar{v}^B = \bar{v}$. Покажем, что $\det \mathcal{N}^{(s)}$ может быть сведен к детерминанту блока этой матрицы размера $(a+b) \times (a+b)$, который задан формулами (6.16)–(6.19). Для этого мы введем три $(a+b)$ -компонентных вектора $\tilde{\Omega}_j^{(s)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_j^{(s)} &= \frac{1}{c} \frac{du_j^C}{d\kappa_s} \Big|_{\bar{\kappa}=1}, & j = 1, \dots, a, \\ \tilde{\Omega}_{a+j}^{(s)} &= -\frac{1}{c} \frac{dv_j^C}{d\kappa_s} \Big|_{\bar{\kappa}=1}, & j = 1, \dots, b. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Легко показать, что

$$\sum_{j=1}^{a+b+1} \tilde{\Omega}_j^{(s)} \mathcal{N}_{j,k}^{(s)} = 0, \quad k = 1, \dots, a+b. \quad (6.24)$$

Действительно, дифференцируя систему твистованных уравнений Бете (5.8) по κ_s при $\bar{\kappa} = 1$, мы получаем

$$\sum_{\ell=1}^a \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_\ell} \frac{du_\ell^c}{d\kappa_s} \Big|_{\bar{\kappa}=1} + \sum_{m=1}^b \frac{\partial \Phi_j}{\partial v_m} \frac{dv_m^c}{d\kappa_s} \Big|_{\bar{\kappa}=1} = Y_k^{(s)}. \quad (6.25)$$

С учетом равенств (6.20) и симметрии матрицы $\mathcal{N}_{j,k}^{(s)}$ при $j, k = 1, \dots, a+b$ мы сразу приходим к равенству (6.24). Поэтому, добавляя к последней строке матрицы $\mathcal{N}_{j,k}^{(s)}$ все остальные строки, умноженные на коэффициенты $\tilde{\Omega}_j^{(s)}$, мы получаем нули всюду, кроме элемента с $j, k = a+b+1$, для которого мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{a+b+1} \tilde{\Omega}_j^{(s)} \mathcal{N}_{j,a+b+1}^{(s)} &= \frac{1}{f(z, \bar{u})f(\bar{v}, z)} \left\{ \frac{\partial \tau(z|\bar{u}^c, \bar{v}^c)}{\partial \kappa_s} \Big|_{\bar{\kappa}=1} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell=1}^a \frac{\partial \tau(z|\bar{u}, \bar{v})}{\partial u_\ell} \frac{du_\ell^c}{d\kappa_s} \Big|_{\bar{\kappa}=1} + \sum_{m=1}^b \frac{\partial \tau(z|\bar{u}, \bar{v})}{\partial v_m} \frac{dv_m^c}{d\kappa_s} \Big|_{\bar{\kappa}=1} \right\} = \\ &= \frac{1}{f(z, \bar{u})f(\bar{v}, z)} \frac{d\tau(z|\bar{u}^c, \bar{v}^c)}{d\kappa_s} \Big|_{\bar{\kappa}=1}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Таким образом, мы получаем

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(s,s)}(z|\bar{u}, \bar{v}; \bar{u}, \bar{v}) = \frac{d\tau(z|\bar{u}, \bar{v})}{d\kappa_s} \Big|_{\bar{\kappa}=1} \cdot H_{a,b} \det_{a+b} \mathcal{N}. \quad (6.27)$$

Сравнивая равенства (6.27) и (6.15), мы приходим к представлению (6.14).

7. ОБСУЖДЕНИЯ

В настоящей статье мы рассмотрели формфакторы матричных элементов матрицы монодромии в моделях с $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей и получили детерминантные представления для них. Возникает вопрос об обобщении полученных результатов на модели с группой симметрии более высокого ранга. Для этого полезно сравнить структуру детерминантных формул в моделях с $GL(2)$ - и $GL(3)$ -симметрией.

Для моделей с группой симметрии $GL(3)$ все представления имеют схожую структуру и основаны на детерминантах матриц $\mathcal{N}$ или $\tilde{\mathcal{N}}$ (последняя может быть получена из $\mathcal{N}$ путем замены $\{\bar{u}^c, \bar{v}^c\} \leftrightarrow \{\bar{u}^B, \bar{v}^B\}$). В этих матрицах все строки и столбцы связаны с одним из параметров Бете или с внешней переменной z . Скажем, в матрице $\mathcal{N}$ первые a столбцов соответствуют набору $\bar{u}^B$, следующие b столбцов соответствуют набору $\bar{v}^C$, а последний столбец связан с переменной z . Строки этой матрицы связаны с параметрами $\bar{u}^C, \bar{v}^B$. В случае формфакторов диагональных матричных элементов, как и для формфактора оператора $T_{13}(z)$, матрица $\mathcal{N}$ имеет дополнительную строку.

Вряд ли возможно предсказать подобную структуру, основываясь на результатах, полученных в моделях с $GL(2)$ -симметрией. Например, можно было бы ожидать, что столбцы матриц должны соответствовать параметрам одного вектора Бете (скажем, $\{\bar{u}^B, \bar{v}^B\}$), в то время как строки должны отвечать параметрам другого вектора

Бете (в этом случае $\{\bar{u}^C, \bar{v}^C\}$). Мы видим, однако, что это не так, и, для того чтобы пометить строки и столбцы, следует “смешать” параметры из разных векторов Бете.

Подобное смешивание параметров Бете делает весьма проблематичным прямое обобщение наших результатов на модели с группой симметрии $GL(N)$ при $N > 3$. Существует также еще один аргумент против простого обобщения этих результатов на группы симметрии более высокого ранга. Мы видели, что матрицы, детерминанты которых описывают формфакторы, имеют блочную структуру:

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_\ell \\ \mathcal{N}_r \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} (\mathcal{N}_\ell)_{j,k} &\sim \frac{\partial \tau(x_k | \bar{u}^C, \bar{v}^C)}{\partial u_j^C}, \\ (\mathcal{N}_r)_{j,k} &\sim \frac{\partial \tau(x_k | \bar{u}^B, \bar{v}^B)}{\partial v_j^B}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Верхние и нижние блоки пропорциональны якобианам, порожденным собственными значениями трансфер-матрицы соответственно на левом и правом векторе Бете. С другой стороны, блочная структура также отражает тот факт, что векторы Бете зависят от двух наборов переменных. Однако в случае группы $GL(N)$ векторы Бете зависят от $N - 1$ набора переменных [32]. Следовательно, естественно ожидать, что если существуют детерминантные представления для формфакторов в моделях с группой симметрии, например, $GL(4)$, то соответствующие матрицы должны иметь (3×3) -блочную структуру. В то же время мы по-прежнему имеем только два вектора, а следовательно, только два собственных значения.

Разумеется, приведенные выше аргументы не означают, что в моделях с $GL(N)$ -инвариантной R -матрицей детерминантные представления для формфакторов не существуют. Данные аргументы говорят лишь о том, что для моделей с более высокой группой симметрии детерминантные представления на основе якобианов собственных значений вряд ли возможны. Однако, с другой стороны, мы не можем исключить существование детерминантных представлений, имеющих иную структуру.

В заключение мы хотели бы сказать несколько слов о возможных приложениях. Одно из них сразу же возникает в квантовых моделях, допускающих явное решение квантовой обратной задачи рассеяния [16], [21]. В частности, в $SU(3)$ -инвариантной XXZ -цепочке Гейзенберга представления для локальных операторов имеют вид

$$E_m^{\alpha,\beta} = (\text{tr } T(0))^{m-1} T_{\beta\alpha}(0) (\text{tr } T(0))^{-m}. \quad (7.2)$$

Здесь $E_m^{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, является элементарной единицей, $(E^{\alpha,\beta})_{jk} = \delta_{j\alpha} \delta_{k\beta}$, связанной с m -м узлом цепочки. Поскольку действие трансфер-матрицы $\text{tr } T(0)$ на on-shell векторы Бете тривиально, мы видим, что формфакторы операторов $E_m^{\alpha,\beta}$ пропорциональны формфакторам операторов $T_{\beta\alpha}$:

$$\mathbb{C}^{a',b'}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) E_m^{\alpha,\beta} \mathbb{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) = \frac{\tau^{m-1}(0 | \bar{u}^C, \bar{v}^C)}{\tau^m(0 | \bar{u}^B, \bar{v}^B)} \mathcal{F}_{a,b}^{(\beta,\alpha)}(0 | \bar{u}^C, \bar{v}^C; \bar{u}^B, \bar{v}^B). \quad (7.3)$$

Таким образом, если у нас есть явные и компактные представления для формфакторов операторов $T_{\beta,\alpha}$, мы можем исследовать задачи о вычислении двухточечных и многоточечных корреляционных функций, разлагая их в ряды по формфакторам.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Формулы суммирования

Докажем несколько тождеств для вектора Ω , введенного формулами (6.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.1. Пусть Ω определен формулами (6.3). Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^a t(u_j^C, z) \Omega_j &= \frac{h(\bar{u}^B, z)}{h(\bar{u}^C, z)} \left(1 - \frac{f(\bar{u}^C, z)}{f(\bar{u}^B, z)} \right), \\ \sum_{j=1}^a t(z, u_j^C) \Omega_j &= \frac{h(z, \bar{u}^B)}{h(z, \bar{u}^C)} \left(\frac{f(z, \bar{u}^C)}{f(z, \bar{u}^B)} - 1 \right), \\ \sum_{j=1}^b t(v_j^B, z) \Omega_{j+a} &= \frac{h(\bar{v}^C, z)}{h(\bar{v}^B, z)} \left(1 - \frac{f(\bar{v}^B, z)}{f(\bar{v}^C, z)} \right), \\ \sum_{j=1}^b t(z, v_j^B) \Omega_{j+a} &= \frac{h(z, \bar{v}^C)}{h(z, \bar{v}^B)} \left(\frac{f(z, \bar{v}^B)}{f(z, \bar{v}^C)} - 1 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Все приведенные выше тождества доказываются одним и тем же способом. Рассмотрим, например, первое тождество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\sum_{j=1}^a t(u_j^C, z) \Omega_j = W(z). \quad (\text{A.2})$$

В левой части равенства (A.2) сумму можно вычислить с помощью вспомогательного контурного интеграла

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\omega|=R \rightarrow \infty} \frac{c d\omega}{(\omega - z)(\omega - z + c)} \prod_{\ell=1}^a \frac{\omega - u_\ell^B}{\omega - u_\ell^C}. \quad (\text{A.3})$$

Интеграл берется в положительном направлении по контуру $|\omega| = R$, и мы рассматриваем предел $R \rightarrow \infty$. Тогда $I = 0$, поскольку подынтегральное выражение ведет себя, как $1/\omega^2$ при $\omega \rightarrow \infty$. С другой стороны, тот же самый интеграл равен сумме вычетов внутри контура интегрирования. Очевидно, что сумма вычетов в точках $\omega = u_\ell^C$ дает $W(z)$. Мы также имеем два дополнительных полюса при $\omega = z$ и $\omega = z - c$. Отсюда получаем

$$I = 0 = W(z) - \prod_{\ell=1}^a \frac{z - u_\ell^B - c}{z - u_\ell^C - c} + \prod_{\ell=1}^a \frac{z - u_\ell^B}{z - u_\ell^C}. \quad (\text{A.4})$$

Таким образом, мы приходим к первому тождеству в (A.1).

Благодарности. Работа С. Пакуляка частично финансово поддержана РФФИ (грант № 14-01-00474_а) и Программой “Научный фонд НИУ ВШЭ”. Э. Рагуси поддержан проектом ANR DIADEMS (Programme Blanc ANR SIMI1 2010-BLAN-0120-02). Н. Славнов поддержан Программой президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” и РФФИ (гранты № 14-01-00440_а, 13-01-12405-офи_м2).

Список литературы

- [1] M. Karowski, P. Weisz, *Nucl. Phys. B*, **139**:4 (1978), 455–476.
- [2] F. A. Smirnov, *Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory*, Advanced Series in Mathematical Physics, **14**, World Sci., Singapore, 1992.
- [3] J. Cardy, G. Mussardo, *Nucl. Phys. B*, **340**:2–3 (1990), 387–402.
- [4] G. Mussardo, *Phys. Rep.*, **218**:5–6 (1992), 215–379.
- [5] A. Fring, G. Mussardo, P. Simonetti, *Nucl. Phys. B*, **393**:1–2 (1990), 413–441, arXiv: hep-th/9211053.
- [6] A. Koubek, G. Mussardo, *Phys. Lett. B*, **311**:1–4 (1993), 193–201, arXiv: hep-th/9306044.
- [7] C. Ahn, G. Delfino, G. Mussardo, *Phys. Lett. B*, **317**:4 (1993), 573–580, arXiv: hep-th/9306103.
- [8] A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **348**:3 (1991), 619–641.
- [9] S. Lukyanov, A. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **493** (1997), 571–587, arXiv: hep-th/9611238.
- [10] S. Lukyanov, *Phys. Rev. B*, **59**:17 (1999), 11163–11164, arXiv: cond-mat/9809254.
- [11] S. Lukyanov, A. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **607**:3 (2001), 437–455, arXiv: hep-th/0102079.
- [12] M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa, A. Nakayashiki, *Phys. Lett. A*, **168**:4 (1992), 256–263, arXiv: hep-th/9205055.
- [13] M. Jimbo, T. Miwa, *Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **85**, AMS, Providence, RI, 1995.
- [14] M. Jimbo, T. Miwa, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**:12 (1996), 2923–2958, arXiv: hep-th/9601135.
- [15] T. Kojima, V. Korepin, N. Slavnov, *Commun. Math. Phys.*, **188**:3 (1997), 657–689, arXiv: hep-th/9611216.
- [16] N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **554**:3 (1999), 647–678, arXiv: math-ph/9807020.
- [17] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **40**:2 (1979), 194–220.
- [18] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *УМН*, **34**:5(209) (1979), 13–63.
- [19] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [20] L. D. Faddeev, “How algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Symétries quantiques* (Les Houches, August 1–September 8, 1995), eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam, 1998, 149–219.
- [21] J. M. Maillet, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **575**:3 (2000), 627–644, arXiv: hep-th/9911030.
- [22] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Stat. Mech.*, **12** (2011), P12010, 28 pp., arXiv: 1110.0803.
- [23] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Stat. Mech.*, **09** (2012), P09001, 33 pp., arXiv: 1206.2630.
- [24] J. S. Caux, J. M. Maillet, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:7 (2005), 077201, 3 pp., arXiv: cond-mat/0502365.
- [25] J. S. Caux, P. Calabrese, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **01** (2007), P01008, 20 pp., arXiv: cond-mat/0611321.
- [26] A. Minahan, K. Zarembo, *JHEP*, **03** (2003), 013, 30 pp., arXiv: hep-th/0212208.
- [27] N. Beisert, M. Staudacher, *Nucl. Phys. B*, **670** (2003), 439–463, arXiv: hep-th/0307042.
- [28] N. Beisert, C. Ahn, L. F. Alday, Z. Bajnok, J. M. Drummond, L. Freyhult, N. Gromov, R. A. Janik, V. Kazakov, T. Klose, G. P. Korchemsky, C. Kristjansen, M. Magro, T. McLoughlin, J. A. Minahan, R. I. Nepomechie, A. Rej, R. Roiban, S. Schäfer-Nameki, C. Sieg, M. Staudacher, A. Torrielli, A. A. Tseytlin, P. Vieira, D. Volin, K. Zoubos, *Lett. Math. Phys.*, **99**:1–3 (2012), 3–32, arXiv: 1012.3982.

- [29] R. Assaraf, P. Azaria, E. Boulat, M. Caffarel, P. Lecheminant, *Phys. Rev. Lett.*, **93**:1 (2004), 016407, 4 pp., arXiv: cond-mat/0310090.
- [30] H.-H. Lin, L. Balents, M. P. A. Fisher, *Phys. Rev. B*, **58**:4 (1998), 1794–1825, arXiv: cond-mat/9801285.
- [31] B. Pozsgay, W.-V. van G. Oei, M. Kormos, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:46 (2012), 465007, 34 pp., arXiv: 1204.4037.
- [32] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, *J. Phys. A*, **16**:16 (1983), L591–L596.
- [33] П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, *ЖЭТФ*, **80**:1 (1981), 214–228.
- [34] П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **120** (1982), 92–121.
- [35] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **10** (2012), P10017, 25 pp., arXiv: 1207.0956.
- [36] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **04** (2013), P04033, 16 pp., arXiv: 1211.3968.
- [37] S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *Nucl. Phys. B*, **881** (2014), 343–368, arXiv: 1312.1488.
- [38] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **02** (2013), P02020, 24 pp., arXiv: 1210.0768.
- [39] Н. А. Славнов, *ТМФ*, **79**:2 (1989), 232–240.
- [40] N. Kitanine, K. Kozłowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Stat. Mech.*, **01** (2007), P01022, 17 pp., arXiv: hep-th/0611142.
- [41] Н. Ю. Решетихин, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **150** (1986), 196–213.
- [42] M. Wheeler, *Commun. Math. Phys.*, **327**:3 (2014), 737–777, arXiv: 1204.2089.
- [43] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **09** (2012), P09003, 17 pp., arXiv: 1206.4931.
- [44] V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **86**:3 (1982), 391–418.
- [45] A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **94**:1 (1984), 67–92.
- [46] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **712**:3 (2005), 600–622, arXiv: hep-th/0406190.

Поступила в редакцию 20.06.2014