Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. К. Саввиди, Тензорные глюоны и структура протона,
ТМФ, 2015, том 182, номер 1, 140–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8742>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:06:49

© 2015 г.

Д. Саввиди*

ТЕНЗОРНЫЕ ГЛЮОНЫ И СТРУКТУРА ПРОТОНА

Недавно была предложена теория, в которой предполагалось, что внутри протона, а также внутри других адронов существуют дополнительные партоны – тензорные глюоны, которые несут часть полного импульса. Как и глюоны, тензорные глюоны имеют нулевой электрический заряд, но больший спин. Тензорные глюоны могут рождаться в результате испускания их глюонами и расщепляться на пары тензорных глюонов с разными спинами. Вероятности этих процессов удовлетворяют общим соотношениям симметрии, которые удалось разрешить. Найденные функции расщепления входят в обобщенные эволюционные уравнения и позволяют рассчитать однопетлевой вклад в бета-функцию Каллана–Симанчика. Согласованность теории проверена на том основании, что поведение константы связи при высокой энергии должно быть универсальным. Сумма вкладов всех спинов в бета-функцию равна нулю, что приводит к конформно-инвариантной теории в пределе высоких энергий.

Ключевые слова: калибровочная теория, тензорные глюоны, ренормировочная группа, функции расщепления, уравнения, Докшицера–Грибова–Липатова–Альтарелли–Паризи, бета-функция Каллана–Симанчика, асимптотическая свобода.

DOI: 10.4213/tmf8742

*Посвящается профессору Андрею Славнову
по случаю его семидесятилетия*

1. ВВЕДЕНИЕ

В недавней статье [1] мы рассмотрели возможность существования внутри протона и, в более общем смысле, внутри адрона дополнительных партонов – тензорных глюонов, которые несут часть импульса протона. Тензорные глюоны, как и глюоны, имеют нулевой электрический заряд, но больший спин. Поэтому мы и называем их тензорными. Ненулевая плотность тензорных глюонов может создаваться по причине их испускания глюонами [2]–[7]. Процесс расщепления глюона на тензорные глюоны предполагает разделение части импульса протона, переносимой нейтральными партонами, между векторным и тензорным глюонами.

Для описания такого процесса необходимо знать амплитуду расщепления глюона на тензорные глюоны. Амплитуды рассеяния, описывающие слияние глюонов

*Institute of Nuclear and Particle Physics, Demokritos National Research Center, Athens, Greece. E-mail: savvidy@inp.demokritos.gr

в тензорные глюоны на древесном уровне были найдены в статье [6]. Они обобщают амплитуды рассеяния Парке–Тейлора на случай двух тензорных калибровочных бозонов со спином s и $n - 2$ глюонов со спином 1 и позволяют найти амплитуды расщепления [7]. Имея в наличии эти амплитуды расщепления, можно вывести обобщение эволюционного уравнения Докшицера–Грибова–Липатова–Альтарелли–Паризи (ДГЛАП) [8]–[12] на функции распределения партонов, которые учитывают процессы испускания глюонами тензорных глюонов [1]. В этом подходе правило сложения моментов позволяет найти вклад тензорных глюонов со спином s в однопетлевую бета-функцию Каллана–Симанчика глюонов со спином 1, которая принимает следующий вид [1]:

$$\alpha(t) = \frac{\alpha}{1 + b\alpha t}, \quad b_{11} = \frac{\sum_s (12s^2 - 1)C_2(G) - 4n_f T(R)}{12\pi}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

где s – спин тензорных глюонов, бегающих в петле¹⁾. Зависящий от спина член $12s^2 - 1$ в коэффициенте бета-функции Каллана–Симанчика (1.1) еще более усиливает асимптотическую свободу [13]–[15] и влияет на поведение структурных функций при высоких энергиях ($t = \ln(Q^2/Q_0^2)$). Он также влияет на масштаб объединения, при котором сливаются константы связи Стандартной модели [16], [17], смещая его значение в сторону низких энергий [1].

Согласованность теории требует, чтобы вклад тензорных глюонов в однопетлевую бета-функцию Каллана–Симанчика b_{11} , соответствующую глюонам со спином 1, равнялся вкладу тензорных глюонов с большим спином в однопетлевую бета-функцию Каллана–Симанчика b_{rr} , соответствующую тензорным глюонам со спином $r = 2, 3, \dots$. Это нетривиальное требование согласованности следует из того факта, что в теории имеется одна константа связи, и ее поведение при высоких энергиях должно быть общим для всех частиц спектра. Чтобы приблизиться к решению этой проблемы, нужно знать весь набор вероятностей расщеплений P_{BA}^C , которые описывают распад тензорного глюона с любым спином $A = r$ на два тензорных глюона с произвольными спинами B и C . Эти вероятности не были известны [1]. Вероятности расщепления P_{BA}^C должны удовлетворять самым общим соотношениям симметрии [8]–[12], которые, как будет показано в настоящей статье, позволяют найти искомые функции. Важной исходной информацией, позволяющей решить уравнения симметрии, являются функции расщепления P_{11}^1 и P_{s1}^s глюона со спином 1 на тензорные глюоны со спином s ; эти функции были найдены ранее в работах [1], [7].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем формулы для функций расщепления и их соотношения симметрии, вводим определения и обозначения. В разделе 3 введены индексы функций расщепления, которые далее рассчитываются из известных функций расщепления P_{11}^1 и P_{s1}^s . Этот подход позволяет определить неизвестные параметры и выяснить общую структуру вероятностей расщепления $P_{s-r\pm 1, r}^s$ тензорного глюона со спином r на два тензорных глюона со спинами $s - r \pm 1$ и s (см. формулы (3.5), (3.7)). В разделе 4 выводятся обобщенные эволюционные уравнения ДГЛАП, в которые входят вероятности всех расщеплений тензорных глюонов, а также показана согласованность расчетов, основанных на однопетлевой бета-функции Каллана–Симанчика. Мы утверждаем, что

¹⁾Обозначение для коэффициента b_{11} нацелено на то, чтобы показать, что внешние частицы являются глюонами со спином 1.

вклад всех спинов в бета-функцию исчезает, что приводит к конформно-инвариантной теории. В разделе 5 мы кратко формулируем результаты. Схема регуляризации подробно изложена в приложении.

2. ВЕРШИНЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ФУНКЦИИ РАСЩЕПЛЕНИЯ

В обобщенной теории Янга–Миллса [2]–[5] все вершины взаимодействия между частицами с большим спином имеют безразмерные константы связи, а это означает, что спиральности h_i , $i = 1, 2, 3$, взаимодействующих частиц связаны в вершинах соотношением²⁾

$$h_1 + h_2 + h_3 = \pm 1.$$

Поэтому на массовой оболочке вершина взаимодействия между безмассовыми тензорными глюонами (TTT -вершина) имеет следующий вид [6]:

$$\begin{aligned} M_3(1^{h_1}, 2^{h_2}, 3^{h_3}) &= g f^{abc} \langle 1, 2 \rangle^{-2h_1-2h_2-1} \langle 2, 3 \rangle^{2h_1+1} \langle 3, 1 \rangle^{2h_2+1}, \\ h_3 &= -1 - h_1 - h_2, \\ M_3(1^{h_1}, 2^{h_2}, 3^{h_3}) &= g f^{abc} [1, 2]^{2h_1+2h_2-1} [2, 3]^{-2h_1+1} [3, 1]^{-2h_2+1}, \\ h_3 &= 1 - h_1 - h_2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где g – константа связи теории Янга–Миллса и f^{abc} – структурные константы внутренней калибровочной группы G . В последующих уравнениях мы не будем явно писать множитель $g f^{abc}$. Также следует понимать, что в спинорном представлении вершин трехчастичных взаимодействий на массовой оболочке (2.1) импульсы частиц деформируются с помощью комплексного параметра [18]–[26].

В частности, рассмотрим взаимодействие между глюоном со спином $A = 1$ (спиральность $h_2 = \pm 1$) и тензорным глюоном со спином $C = s$ (спиральность $h_1 = \pm s$), т. е. вершину глюон–тензор–тензор (GTT -вершину), из формул (2.1) можно получить три решения для спиральностей третьей частицы,

$$h_3 = \pm |s - 2|, \pm s, \pm |s + 2|, \quad (2.2)$$

так что ее спин может принимать три различных значения $B = s - 2, s, s + 2$. Простой анализ показывает, что все возможные вершины можно рассчитать исходя из формулы (2.2), рассмотрев два случая: $B = s - 2$, $s \geq 3$ и $B = s$, $s \geq 1$. Поэтому соответствующие GTT -вершины взаимодействия имеют вид

$$\begin{aligned} M_3(1^{-s}, 2^{+1}, 3^{s-2}) &\propto \frac{\langle 1, 3 \rangle^4}{\langle 1, 2 \rangle \langle 2, 3 \rangle \langle 3, 1 \rangle} \left(\frac{\langle 1, 2 \rangle}{\langle 2, 3 \rangle} \right)^{2s-2}, & s \geq 3, \\ M_3(1^{+s}, 2^{-1}, 3^{-s}) &\propto \frac{\langle 2, 3 \rangle^4}{\langle 1, 2 \rangle \langle 2, 3 \rangle \langle 3, 1 \rangle} \left(\frac{\langle 2, 3 \rangle}{\langle 1, 2 \rangle} \right)^{2s-2}, & s \geq 1. \end{aligned}$$

Вершины взаимодействия третьего типа включают тензорные глюоны со спином $A = 2$ (и спиральностями $h_2 = \pm 2$) и со спином $C = s$ (и спиральностями $h_1 = \pm s$). В этом случае можно найти четыре решения по формулам (2.1):

$$h_3 = \pm |s - 3|, \pm |s - 1|, \pm |s + 1|, \pm |s + 3|. \quad (2.3)$$

²⁾Размерность трехточечной вершины $M_3(1^{h_1}, 2^{h_2}, 3^{h_3})$ равна $[\text{масса}]^{D=\pm(h_1+h_2+h_3)}$.

Все возможные вершины можно получить, рассмотрев два случая: $B = s - 3$, $s \geq 5$ и $B = s - 1$, $s \geq 3$. Соответствующие вершины взаимодействия тензор–тензор–тензор (TTT -вершины) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M_3(1^{-s}, 2^{+2}, 3^{+(s-3)}) &\propto \frac{\langle 3, 1 \rangle^4}{\langle 1, 2 \rangle \langle 2, 3 \rangle \langle 3, 1 \rangle} \left(\frac{\langle 1, 2 \rangle}{\langle 2, 3 \rangle} \right)^{2s-2} \left(\frac{\langle 3, 1 \rangle}{\langle 1, 2 \rangle} \right)^2, \\ M_3(1^{+s}, 2^{-2}, 3^{-(s-1)}) &\propto \frac{\langle 2, 3 \rangle^4}{\langle 1, 2 \rangle \langle 2, 3 \rangle \langle 3, 1 \rangle} \left(\frac{\langle 2, 3 \rangle}{\langle 1, 2 \rangle} \right)^{2s-2} \left(\frac{\langle 1, 2 \rangle}{\langle 3, 1 \rangle} \right)^2. \end{aligned}$$

В общем случае вершина взаимодействия, включающая тензорные глюоны со спином $A = r$ (и спиральностями $h_2 = \pm r$) и со спином $C = s$ (и спиральностями $h_1 = \pm s$) может быть четырех типов (2.1): в этом случае мы имеем

$$h_3 = \pm |s - r - 1|, \pm |s - r + 1|, \pm |s + r - 1|, \pm |s + r + 1|. \quad (2.4)$$

Чтобы рассчитать все возможные типы вершин, достаточно рассмотреть два случая спинов: $B = s - r - 1$, $s \geq 2r + 1$ и $B = s - r + 1$, $s \geq 2r - 1$ при $r = 1, 2, \dots$. Получаем

$$\begin{aligned} M_3(1^{-s}, 2^{+r}, 3^{+(s-r-1)}) &\propto \frac{\langle 3, 1 \rangle^4}{\langle 1, 2 \rangle \langle 2, 3 \rangle \langle 3, 1 \rangle} \left(\frac{\langle 1, 2 \rangle}{\langle 2, 3 \rangle} \right)^{2s-2} \left(\frac{\langle 3, 1 \rangle}{\langle 1, 2 \rangle} \right)^{2r-2}, \\ M_3(1^{+s}, 2^{-r}, 3^{-(s-r+1)}) &\propto \frac{\langle 2, 3 \rangle^4}{\langle 1, 2 \rangle \langle 2, 3 \rangle \langle 3, 1 \rangle} \left(\frac{\langle 2, 3 \rangle}{\langle 1, 2 \rangle} \right)^{2s-2} \left(\frac{\langle 1, 2 \rangle}{\langle 3, 1 \rangle} \right)^{2r-2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При $s = 1$ и $r = 1$ они все сводятся к вершинам Янга–Миллса [1].

Используя найденные вершины, можно рассчитать амплитуды рассеяния, которые включают тензорные глюоны [6]. Они сводятся к известной формуле Парке–Тейлора [19] при $s = 1$ и могут быть использованы для получения амплитуд расщепления глюона на два тензорных глюона [7]. Рассмотрим амплитуды в пределе, когда две соседние частицы становятся коллинеарными, $k_B \parallel k_C$, другими словами, $k_B = zk_A$, $k_C = (1 - z)k_A$, $k_A^2 \rightarrow 0$. Пусть z описывает продольный импульс, и соответствующее поведение спиноров характеризуется формулами $\lambda_B = \sqrt{z}\lambda_A$, $\lambda_C = \sqrt{1 - z}\lambda_A$. Тогда мы получим, что амплитуда принимает факторизованный вид [18], [19], [25], [26], [7]:

$$M_n^{\text{tree}}(\dots, B^{h_B}, C^{h_C}, \dots) \xrightarrow{B \parallel C} \sum_{h_A} \text{Split}_{-h_A}^{\text{tree}}(B^{h_B}, C^{h_C}) \times M_{n-1}^{\text{tree}}(\dots, A^{h_A}, \dots), \quad (2.6)$$

где $\text{Split}_{-h_A}^{\text{tree}}(B^{h_B}, C^{h_C})$ означает амплитуду расщепления $A \rightarrow B + C$, а промежуточное состояние A имеет импульс $k_A = k_B + k_C$ и спиральность h_A . Поскольку коллинеарные пределы амплитуд рассеяния отвечают за эволюцию партонов [8], из формулы (2.6) можно получить вероятности расщепления Альтарелли–Паризи для тензорных глюонов.

В самом деле, квадрат вычета коллинеарного полюса (факторизованной амплитуды (2.6)) дает вероятности расщепления Альтарелли–Паризи $P(z)$ [18], [19], [25], [26], [7]:

$$P_{BA}^C(z) = C_2(G) \sum_{h_A, h_B, h_C} |\text{Split}_{-h_A}(B^{h_B}, C^{h_C})|^2 s_{BC}, \quad (2.7)$$

где $s_{BC} = 2k_B \cdot k_C = \langle B, C \rangle [B, C]$. Инвариантный оператор C_2 для представления R вводится с помощью уравнений

$$t^a t^a = C_2(R) 1, \quad \text{tr}(t^a t^b) = T(R) \delta^{ab}.$$

Те же вероятности расщепления можно получить, непосредственно рассматривая распад частицы A вне массовой оболочки. Он определяет вероятность того, что внутри частицы A находится частица B с долей z от продольного импульса частицы A и излучается третья частица C с долей $1 - z$ от продольного импульса частицы A [8]:

$$P_{BA}^C(z) = \frac{1}{2} z(1-z) \sum_{\text{helicities}} \frac{|M_{A \rightarrow B+C}|^2}{p_{\perp}^2}, \quad (2.8)$$

где суммирование производится по спиральностям частиц B и C , а усреднение – по спиральности частицы A .

В работе [7] найден полный набор амплитуд расщепления, описывающих распад глюонов и тензорных глюонов:

$$\begin{aligned} \text{Split}_+(B^{+s}, C^{-s}) &= \frac{(1-z)^{s+1/2}}{z^{s-1/2}} \frac{1}{\langle B, C \rangle}, & \text{Split}_+(B^{-s}, C^{+s}) &= \frac{z^{s+1/2}}{(1-z)^{s-1/2}} \frac{1}{\langle B, C \rangle}, \\ \text{Split}_{+s}(B^+, C^{-s}) &= \frac{(1-z)^{s+1}}{\sqrt{z(1-z)}} \frac{1}{\langle B, C \rangle}, & \text{Split}_{+s}(B^{-s}, C^+) &= \frac{z^{s+1}}{\sqrt{z(1-z)}} \frac{1}{\langle B, C \rangle}, \\ \text{Split}_{-s}(B^{+s}, C^+) &= \frac{z^{-s+1}}{\sqrt{z(1-z)}} \frac{1}{\langle B, C \rangle}, & \text{Split}_{-s}(B^+, C^{+s}) &= \frac{(1-z)^{-s+1}}{\sqrt{z(1-z)}} \frac{1}{\langle B, C \rangle}. \end{aligned}$$

Этот набор амплитуд расщеплений $G \rightarrow TT$, $T \rightarrow GT$ и $TT \rightarrow TG$ сводится к полному набору амплитуд расщепления глюона при $s = 1$. Подставляя приведенные выше формулы расщепления в выражение (2.7), получим [1]

$$\begin{aligned} P_{TG}^T(z) &= C_2(G) \left(\frac{z^{2s+1}}{(1-z)^{2s-1}} + \frac{(1-z)^{2s+1}}{z^{2s-1}} \right), \\ P_{GT}^T(z) &= C_2(G) \left(\frac{1}{z(1-z)^{2s-1}} + \frac{(1-z)^{2s+1}}{z} \right), \\ P_{TT}^G(z) &= C_2(G) \left(\frac{1}{(1-z)z^{2s-1}} + \frac{z^{2s+1}}{1-z} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

В главном порядке ядро $P_{TG}^T(z)$ имеет смысл изменения плотности вероятности нахождения тензорного глюона внутри глюона, $P_{GT}^T(z)$ – вероятности нахождения глюона внутри тензорного глюона, а $P_{TT}^G(z)$ – вероятности нахождения тензорного глюона внутри тензорного глюона.

Важными свойствами функций расщепления являются симметрии [8]–[12] относительно перестановки частиц $B \leftrightarrow C$ (см. рис. 1), имеющих взаимно дополнительные доли импульса,

$$P_{BA}^C(z) = P_{CA}^B(1-z), \quad (2.10)$$

и кроссинг-соотношение

$$P_{AB}^C(z) = (-1)^{2h_A+2h_B+1} z P_{BA}^C(1/z), \quad (2.11)$$

Рис. 1. Распад тензорного глюона со спином A на тензорные глюоны со спинами B и C . Стрелки указывают направления спиральностей. Соответствующая функция расщепления определена как $P_{B^+A^+}^{C^-}$.

которое появляется вследствие того, что два процесса расщепления связаны обращением времени $A \leftrightarrow B$. Мы постулируем справедливость свойств (2.10) и (2.11) для взаимодействующих частиц с любыми спинами. Легко увидеть, что эти связи выполняются для более высоких спинов (2.9): при $0 < z < 1$

$$\begin{aligned} P_{TG}^T(z) &= P_{TG}^T(1-z), & P_{TG}^T(z) &= P_{TT}^G(1-z), \\ P_{TG}^T(z) &= -zP_{TG}^T(1/z), & P_{TT}^G(z) &= -zP_{TT}^G(1/z). \end{aligned}$$

Для полноты выпишем также вероятности расщепления кварка и глюона [8]:

$$\begin{aligned} P_{qq}^G(z) &= C_2(R) \frac{1+z^2}{1-z}, \\ P_{Gq}^q(z) &= C_2(R) \left(\frac{1}{z} + \frac{(1-z)^2}{z} \right), \\ P_{qG}^q(z) &= T(R)(z^2 + (1-z)^2), \\ P_{GG}^G(z) &= C_2(G) \left(\frac{1}{z(1-z)} + \frac{z^4}{z(1-z)} + \frac{(1-z)^4}{z(1-z)} \right), \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $C_2(G) = N$, $C_2(R) = (N^2 - 1)/2N$, $T(R) = 1/2$ для группы $SU(N)$.

Вероятности расщепления (2.9) в пределе полуцелого спина $s \rightarrow 1/2$ сводятся к кварк-глюонным вероятностям расщепления (2.12),

$$P_{TT}(z) \rightarrow P_{qq}(z), \quad P_{GT}(z) \rightarrow P_{Gq}(z), \quad P_{TG}(z) \rightarrow P_{qG}(z),$$

а в пределе $s \rightarrow 1$ — к глюон-глюонной вероятности расщепления,

$$\frac{1}{2}(P_{TG}(z) + P_{GT}(z) + P_{TT}(z)) \rightarrow P_{GG}(z).$$

Вероятности расщепления (2.9) и (2.12) представляют собой важные данные, необходимые для распространения результатов на более общие случаи переходов между тензорами с более высокими спинами, которые будут рассмотрены в следующем разделе.

3. ОБЩАЯ СТРУКТУРА ВЕРОЯТНОСТЕЙ РАСЩЕПЛЕНИЯ

Как можно видеть из предыдущих примеров, вероятности расщепления представляют собой полиномиальные функции простого вида:

$$P_{BA}^C \propto z^n (1 - z)^m.$$

Используя симметричное кроссинг-соотношение (2.11) для перестановки $A \leftrightarrow B$ и тот факт, что мы рассматриваем случай целых спинов,

$$P_{AB}^C(z) = (-1)^{2h_A+2h_B+1} z P_{BA}^C(1/z) = -z P_{BA}^C(1/z),$$

можно обнаружить, что

$$P_{AB}^C(z) \propto -z \frac{1}{z^n} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^m = -\frac{(z-1)^m}{z^{n+m-1}}.$$

Поскольку вероятности должны быть положительными, целое число m должно быть нечетным, в соответствии с этим сделаем замену $m \rightarrow 2m+1$: имеем

$$P_{BA}^C \propto z^n (1 - z)^{2m+1}, \quad P_{AB}^C \propto \frac{(1 - z)^{2m+1}}{z^{2m+n}}.$$

Перестановка (2.10) частиц $A \leftrightarrow C$, а затем частиц $C \leftrightarrow B$ приводит к соотношениям

$$P_{CB}^A \propto \frac{z^{2m+1}}{(1 - z)^{2m+n}} \implies P_{BC}^A \propto -z \frac{z^{2m+n}}{z^{2m+1}(z-1)^{2m+n}} = -\frac{z^n}{(z-1)^{2m+n}}.$$

Отсюда следует, что целое число n также должно быть нечетным, $n \rightarrow 2n+1$, поэтому вероятности расщепления должны иметь следующий общий вид:

$$P_{BA}^C \propto z^{2n+1} (1 - z)^{2m+1}.$$

Полный набор вероятностей расщепления можно получить с помощью симметрий (2.10), (2.11), он имеет вид

$$\begin{aligned} P_{BA}^C &\propto z^{2n+1} (1 - z)^{2m+1}, & P_{CA}^B &\propto (1 - z)^{2n+1} z^{2m+1}, \\ P_{AB}^C &\propto \frac{(1 - z)^{2m+1}}{z^{2n+2m+1}}, & P_{AC}^B &\propto \frac{(1 - z)^{2n+1}}{z^{2n+2m+1}}, \\ P_{CB}^A &\propto \frac{z^{2m+1}}{(1 - z)^{2n+2m+1}}, & P_{BC}^A &\propto \frac{z^{2n+1}}{(1 - z)^{2n+2m+1}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Чтобы связать указанные выше параметры n и m со спиральностью взаимодействующих частиц, рассмотрим аналитическое продолжение этих функций на полную комплексную плоскость $\mathbb{C}^2$ и возьмем предел $|z| \rightarrow \infty$. Отношение

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\ln P}{\ln |z|} = \nu \quad (3.2)$$

Рис. 2. Диаграммы спиральностей, соответствующих функциям расщепления $P_{B \leftarrow A}^{C \searrow}$, представляют собой распад партонa со спином A на партонa со спинами B и C в формулах (3.3). Короткие стрелки обозначают партонa со спином 1, длинные стрелки – партонa со спином s .

назовем *индексом* данной функции расщепления P . Таким образом из формул (3.1) получим

$$\nu = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{\ln P_{BA}^C}{\ln |z|}, \\ \frac{\ln P_{CB}^A}{\ln |z|}, \\ \frac{\ln P_{AB}^C}{\ln |z|} \end{cases} \propto \begin{cases} 2n + 2m + 2, \\ -2n, \\ -2n \end{cases}$$

и

$$\nu = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{\ln P_{CA}^B}{\ln |z|}, \\ \frac{\ln P_{AC}^B}{\ln |z|}, \\ \frac{\ln P_{BC}^A}{\ln |z|} \end{cases} \propto \begin{cases} 2n + 2m + 2, \\ -2m, \\ -2m; . \end{cases}$$

Теперь сравним выписанные выше индексы с индексами известных GTT -поляризованных функций расщепления (2.7), (2.9):

$$\begin{aligned} P_{s-1+}^{s+}(z) &= C_2(G) \frac{z^{2s+1}}{(1-z)^{2s-1}}, & P_{s+1+}^{s-}(z) &= C_2(G) \frac{(1-z)^{2s+1}}{z^{2s-1}}, \\ P_{1-s+}^{s+}(z) &= C_2(G) \frac{1}{z(1-z)^{2s-1}}, & P_{1+s+}^{s+}(z) &= C_2(G) \frac{(1-z)^{2s+1}}{z}, \\ P_{s+s+}^{1-}(z) &= C_2(G) \frac{1}{(1-z)^{2s-1}}, & P_{s+s+}^{1+}(z) &= C_2(G) \frac{z^{2s+1}}{1-z}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $s \geq 1$. Получим следующие соотношения для параметров n и m в общем выражении (3.1):

$$2n + 2m + 2 = 2, \quad -2n = -2s, \quad -2m = 2s.$$

Отсюда параметры, соответствующие всем возможным поляризациям взаимодействующих частиц, таковы:

$$A = 1, \quad B = s, \quad C = s \quad \implies \quad n = s, \quad m = -s.$$

Эти результаты имеют очень простой смысл, если рассмотреть диаграммы на рис. 2, где показано распределение спиральностей между взаимодействующими частицами, которые соответствуют функциям расщепления (3.3). В самом деле, поскольку в обобщенной теории Янга–Миллса вершины взаимодействия имеют одну производную [1], полная сумма спиральностей в процессе взаимодействий может измениться только на одну единицу углового момента (2.1). Поэтому, если распадающийся партон имеет спин 1, а уходящие партоны имеют большой спин s , единственный способ удовлетворить закон сохранения углового момента (2.1) – это направить спиральности тензорных глюонов в противоположных направлениях, что показано на верхних диаграммах рис. 2. Если исходный партон имеет большой спин s и распадается на партоны со спинами 1 и s , то направление больших спиральностей не может измениться, что показано на последних четырех диаграммах рис. 2.

Теперь нашей целью является вычисление вероятностей расщепления тензорных глюонов со спином $A = 2$. Соответствующий набор спинов частиц приводится в формуле (2.3), поэтому

$$A = 2, \quad B = s - 1, \quad C = s, \quad \implies \quad n = s - 1, \quad m = -(s - 1)$$

и

$$\begin{aligned} P_{(s-1)^-2+}^{s+}(z) &= C_2(G) \frac{z^{2s-1}}{(1-z)^{2s-3}}, & P_{s^+2+}^{(s-1)^-}(z) &= C_2(G) \frac{(1-z)^{2s-1}}{z^{2s-3}}, \\ P_{2^-(s-1)^+}^{s+}(z) &= C_2(G) \frac{1}{z(1-z)^{2s-3}}, & P_{2^+s^+}^{(s-1)^+}(z) &= C_2(G) \frac{(1-z)^{2s-1}}{z}, \\ P_{s^+(s-1)^+}^{2-}(z) &= C_2(G) \frac{1}{(1-z)z^{2s-3}}, & P_{(s-1)^+s^+}^{2+}(z) &= C_2(G) \frac{z^{2s-1}}{1-z}, \end{aligned}$$

где $s \geq 3$.

В другом основном случае спина $B = s - 3$, приведенном в формулах (2.3), мы имеем

$$A = 2, \quad B = s - 3, \quad C = s \quad \implies \quad n = s - 3, \quad m = -(s - 3),$$

а вероятности расщепления записываются как

$$\begin{aligned} P_{(s-3)^-2+}^{s+}(z) &= C_2(G) \frac{z^{2s-5}}{(1-z)^{2s-7}}, & P_{s^+2+}^{(s-3)^-}(z) &= C_2(G) \frac{(1-z)^{2s-5}}{z^{2s-7}}, \\ P_{2^-(s-3)^+}^{s+}(z) &= C_2(G) \frac{1}{z(1-z)^{2s-7}}, & P_{2^+s^+}^{(s-3)^+}(z) &= C_2(G) \frac{(1-z)^{2s-5}}{z}, \\ P_{s^+(s-3)^+}^{2-}(z) &= C_2(G) \frac{1}{(1-z)z^{2s-7}}, & P_{(s-3)^+s^+}^{2+}(z) &= C_2(G) \frac{z^{2s-5}}{1-z}, \end{aligned}$$

где $s \geq 5$.

В общем случае спинов $A = r$ и $C = s$ третий спин принимает значения (2.4), следовательно,

$$B = s - r + 1, \quad s \geq 2r - 1 \quad \text{и} \quad B = s - r - 1, \quad s \geq 2r + 1, \quad \text{где} \quad r = 1, 2, \dots$$

В этом случае получим, что

$$A = r, \quad B = s - r + 1, \quad C = s \quad \implies \quad n = s - r + 1, \quad m = -(s - r + 1), \quad (3.4)$$

а вероятности расщепления таковы:

$$\begin{aligned}
 P_{(s-r+1)^-r+}^{s+}(z) &= C_2(G) \frac{z^{2s-2r+3}}{(1-z)^{2s-2r+1}}, \\
 P_{s+r+}^{(s-r+1)^-}(z) &= C_2(G) \frac{(1-z)^{2s-2r+3}}{z^{2s-2r+1}}, \\
 P_{r^-(s-r+1)^+}^{s+}(z) &= C_2(G) \frac{1}{z(1-z)^{2s-2r+1}}, \\
 P_{r+s+}^{(s-r+1)^+}(z) &= C_2(G) \frac{(1-z)^{2s-2r+3}}{z}, \\
 P_{s^+(s-r+1)^+}^{r-}(z) &= C_2(G) \frac{1}{(1-z)z^{2s-2r+1}}, \\
 P_{(s-r+1)^+s+}^{r+}(z) &= C_2(G) \frac{z^{2s-2r+3}}{1-z},
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $s \geq 2r - 1$.

Наконец, для

$$A = r, \quad B = s - r - 1, \quad C = s \implies n = s - r - 1, \quad m = -(s - r - 1) \tag{3.6}$$

получаем

$$\begin{aligned}
 P_{(s-r-1)^-r+}^{s+}(z) &= C_2(G) \frac{z^{2s-2r-1}}{(1-z)^{2s-2r-3}}, \\
 P_{s+r+}^{(s-r-1)^-}(z) &= C_2(G) \frac{(1-z)^{2s-2r-1}}{z^{2s-2r-3}}, \\
 P_{r^-(s-r-1)^+}^{s+}(z) &= C_2(G) \frac{1}{z(1-z)^{2s-2r-3}}, \\
 P_{r+s+}^{(s-r-1)^+}(z) &= C_2(G) \frac{(1-z)^{2s-2r-1}}{z}, \\
 P_{s^+(s-r-1)^+}^{r-}(z) &= C_2(G) \frac{1}{(1-z)z^{2s-2r-3}}, \\
 P_{(s-r-1)^+s+}^{r+}(z) &= C_2(G) \frac{z^{2s-2r-1}}{1-z},
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $s \geq 2r + 1$. Общие выражения (3.5), (3.7) описывают все возможные вероятности расщепления, которые соответствуют вершинам взаимодействия с одной пространственно-временной производной и, следовательно, с безразмерной константой связи, как в обобщенной теории Янга-Миллса [1], [2].

4. ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДГЛАП

Имея в наличии набор вероятностей расщепления тензорных глюонов (3.5), (3.7), можно рассчитать возможное излучение тензорных глюонов, которое появляется в дополнение к “облакам” из кварк-антикварков и глюонов в протоне. Нашей целью является вывод уравнений ДГЛАП [8]–[12], [27]–[29], которые учитывают эти новые процессы испускания.

В соответствии с нашей гипотезой существует дополнительное излучение тензорных глюонов в протоне, поэтому следует ввести соответствующие плотности $T_s(x, t)$

тензорных глюонов (просуммированные по цветам) внутри протона в системе бесконечного импульса P_∞ [1]. Следовательно, можно вывести интегро-дифференциальные уравнения, которые описывают зависимость плотностей партонов от Q^2 в этом общем случае. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dq^i(x, t)}{dt} &= \frac{\alpha(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[\sum_{j=1}^{2n_f} q^j(y, t) P_{q^i q^j}(x/y) + G(y, t) P_{q^i G}(x/y) \right], \\ \frac{dG(x, t)}{dt} &= \frac{\alpha(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[\sum_{j=1}^{2n_f} q^j(y, t) P_{G q^j}(x/y) + G(y, t) P_{GG}(x/y) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_s T_s(y, t) P_{GT_s}(x/y) \right], \\ \frac{dT_r(x, t)}{dt} &= \frac{\alpha(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[G(y, t) P_{T_r G}(x/y) + \sum_s T_s(y, t) P_{T_r T_s}(x/y) \right].\end{aligned}\tag{4.1}$$

Здесь $\alpha(t)$ – бегущая константа связи ($\alpha = g^2/4\pi$). В главном логарифмическом приближении $\alpha(t)$ имеет вид

$$\frac{\alpha}{\alpha(t)} = 1 + b\alpha t, \tag{4.2}$$

где $\alpha = \alpha(0)$ и b – однопетлевой коэффициент Каллана–Симанчика, в который вошел дополнительный вклад от тензорного глюона, бегающего в петле. Здесь индексы i и j пробегают по всем ароматам кварков и антикварков, а s и r пробегают по всем спинам тензорных глюонов. Число кварков с фиксированной долей импульса изменяется в том случае, когда кварк теряет импульс при излучении глюона или глюон внутри протона генерирует пару кварк–антикварк [8]. Аналогичным образом число глюонов изменяется из-за того, что кварк может испустить глюон, или из-за того, что глюон может расщепиться либо на пару кварк–антикварк, либо на два глюона, либо на два тензорных глюона. Плотность тензорных глюонов также изменяется из-за переходов между ними посредством расщеплений, которые описываются вероятностями (3.5) и (3.7).

Чтобы обеспечить постоянство полного импульса протона, т.е. всех партонов, следует наложить ограничения

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 dz z \left(\sum_{i=1}^{2n_f} q^i(z, t) + G(z, t) + \sum_s T_s(z, t) \right) = 0. \tag{4.3}$$

Используя эволюционные уравнения (4.1), выразим производные плотностей в (4.3) через вероятности расщепления P_{BA}^C (ядра эволюционных уравнений) и получим, что должны быть выполнены следующие правила сложения импульсов:

$$\begin{aligned}\int_0^1 dz z (P_{qq}(z) + P_{Gq}(z)) &= 0, \\ \int_0^1 dz z \left(2n_f P_{qG}(z) + P_{GG}(z) + \sum_s P_{T_s G}(z) \right) &= 0, \\ \int_0^1 dz z \left(P_{GT_r}(z) + \sum_s P_{T_s T_r}(z) \right) &= 0.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Прежде чем проанализировать эти правила сложения импульсов, исследуем поведение ядер тензорных глюонов (3.3)–(3.7) в точках $z = 0, 1$. Как видно, они сингулярны на границе интервала интегрирования, что аналогично случаю стандартных ядер (2.12). Хотя существует и отличие: эти сингулярности имеют более высокий порядок по сравнению со стандартным случаем [8]. Поэтому нужно ввести процедуру регуляризации сингулярных множителей $(1 - z)^{-2s+1}$ и z^{-2s+1} , придав им другое толкование как распределений $(1 - z)_+^{-2s+1}$ и z_+^{-2s+1} [1] аналогично регуляризации Альтарелли–Паризи. Подробности даны в приложении.

Первое уравнение в правилах сложения импульсов (4.4) остается неизменным из-за отсутствия вклада тензорных глюонов в эволюцию кварка. Второе уравнение в (4.4) принимает следующий вид (подробности приводятся в работе [1] и в приложении):

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz z \left(2n_f P_{qG}(z) + P_{GG}(z) + \sum_s P_{TsG}(z) + b_G \delta(z - 1) \right) = \\ = \int_0^1 dz z \left\{ 2n_f T(R)(z^2 + (1 - z)^2) + C_2(G) \left(\frac{1}{z(1 - z)} + \frac{z^4}{z(1 - z)} + \frac{(1 - z)^4}{z(1 - z)} \right) + \right. \\ \left. + C_2(G) \sum_s \left(\frac{z^{2s+1}}{(1 - z)^{2s-1}} + \frac{(1 - z)^{2s+1}}{z^{2s-1}} \right) \right\} + b_{11} = \\ = \frac{2}{3} n_f T(R) - \frac{11}{6} C_2(G) - \sum_s \frac{12s^2 - 1}{6} C_2(G) + b_{11} = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Теперь мы можем извлечь дополнительный вклад b_{11} в однопетлевую бета-функцию Каллана–Симанчика для глюонов, возникающий из петли тензорного глюона со спином s [1]:

$$b_{11} = \sum_s \frac{12s^2 - 1}{6} C_2(G), \quad s = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

При $s = 1$ эта формула воспроизводит заново результат, относящийся к асимптотической свободе [13]–[15]. Что касается больших спинов, то вклад тензорных глюонов в бета-функцию Каллана–Симанчика имеет ту же сигнатуру, что и вклад стандартных глюонов, а это означает, что тензорные глюоны “ускоряют” асимптотическую свободу (4.2) константы связи сильного взаимодействия $\alpha(t)$. При передаче больших импульсов, константа связи сильного взаимодействия стремится к нулю быстрее чем в стандартном случае [1]³⁾.

Приведенные выше результаты подтверждаются с помощью подхода, который основан на эффективном действии и развивается в теории Янга–Миллса [30]–[33], обобщенного на калибровочные бозоны с большим спином. Имея спектр тензорных глюонов во внешнем хромоманнитном поле $k_0^2 = (2n + 1 \pm 2s)gH + k_{\parallel}^2$, можно просуммировать моды и получить точный результат для однопетлевого эффективного действия аналогично тому, как это сделано в работах [30], [33]:

$$\epsilon = \frac{H^2}{2} + \frac{(gH)^2}{4\pi} b_{11} \left(\ln \frac{gH}{\mu^2} - \frac{1}{2} \right),$$

³⁾В формуле (4.6) следует учесть кратность состояний с большим спином в рассматриваемой теории.

где

$$b_{11} = -\frac{2C_2(G)}{\pi} \zeta(-1, (2s+1)/2) = \frac{12s^2-1}{12\pi} C_2(G), \quad (4.7)$$

а $\zeta(-1, q) = -(q^2 - q + 1/6)/2$ – обобщенная дзета-функция⁴⁾. Поскольку коэффициент перед логарифмом определяет бета-функцию [30], [31], очевидно, что формула (4.7) согласуется с результатом (4.6).

Третье уравнение в правилах сложения импульса (4.4) принимает следующий вид:

$$\int_0^1 dz z \left(P_{GT_r}(z) + \sum_s P_{T_s T_r}(z) + b_{rr} \delta(z-1) \right) = 0, \quad (4.8)$$

и мы получаем

$$\begin{aligned} C_2(G) \int_0^1 dz z \sum_s \left(\frac{z^{2s-2r+3}}{(1-z)^{2s-2r+1}} + \frac{(1-z)^{2s-2r+3}}{z^{2s-2r+1}} \right) + b_{rr} = \\ = - \sum_s \frac{12(s-r+1)^2-1}{6} C_2(G) + b_{rr} = 0. \end{aligned}$$

Теперь мы можем вывести однопетлевой коэффициент бета-функции Каллана–Симанчика для тензорного глюона со спином r : этот коэффициент записывается как

$$b_{rr} = \sum_s \frac{12(s-r+1)^2-1}{6} C_2(G), \quad r = 1, 2, \dots, \quad (4.9)$$

и имеет такую же квадратичную зависимость от спинов частиц, бегающих в петле, как и для глюонов (4.6). Теперь условие согласованности принимает следующий вид:

$$b_{11} = \sum_s \frac{12s^2-1}{6} C_2(G) = \sum_{s'} \frac{12(s'-r+1)^2-1}{6} C_2(G) = b_{rr}. \quad (4.10)$$

Чтобы провести суммирование по спинам в приведенном выше уравнении, следует учесть кратность состояний с более высоким спином в рассматриваемой теории. В обобщенной теории Янга–Милса значения спинов тензорных глюонов уходят в бесконечность, а их кратность задается как [5]

$$\begin{aligned} & \pm(s-1), \quad \pm(s-3), \dots \\ & \pm(s+1), \\ & \pm(s-1), \quad \pm(s-3), \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

Поэтому суммы в обеих частях равенства (4.10) расходятся. Можно предложить два сценария [1]. В первом из них глюоны с большим спином, скажем, со спином $s \geq 3$, имеют большую массу, и поэтому их можно игнорировать на данном энергетическом масштабе. Во втором случае, когда все глюоны безмассовые, или, что то

⁴⁾Обобщенная дзета-функция определяется следующим образом:

$$\zeta(p, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+q)^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} dt t^{-1+p} \frac{e^{-qt}}{1-e^{-t}}.$$

же самое, энергия намного превосходит все массы тензорных глюонов, тогда можно предложить регуляризацию с помощью дзета-функции Римана, аналогичную регуляризации Бринка–Нильсена [34]. Спектр (4.11) представляется в виде

$$\begin{array}{cccccc}
 \pm 1 & & & & & \\
 \pm 2, & & 0, & & & \\
 \pm 3, & & \pm 1, & & \pm 1, & \\
 \pm 4, & & \pm 2, & & \pm 2, & 0, \\
 \pm 5, & & \pm 3, & & \pm 3, & \pm 1, & \pm 1, \\
 \pm 6, & & \pm 4, & & \pm 4, & \pm 2, & \pm 2, & 0
 \end{array}$$

и т. д., а суммирование по столбцам дает выражение

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= C_2(G) \left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(12s^2 - 1)}{12\pi} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(12s^2 - 1)}{12\pi} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(12s^2 - 1)}{12\pi} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(12s^2 - 1)}{12\pi} + \dots \right) = \\
 &= C_2(G) \left(\frac{1}{\pi} \zeta(-2) - \frac{1}{12\pi} \zeta(0) - \frac{1}{12\pi} + \frac{1}{\pi} \zeta(-2) - \frac{1}{12\pi} \zeta(0) + \dots \right) = \\
 &= C_2(G) \left(\frac{1}{24\pi} - \frac{1}{12\pi} + \frac{1}{24\pi} + \dots \right) = 0,
 \end{aligned}$$

где $\zeta(-2) = 0$, $\zeta(0) = -1/2$. Это выражение приводит к конформно-инвариантной при очень больших энергиях теории. Проведенное выше суммирование требует явной регуляризации и дальнейшей проверки.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы продолжили анализ возможности существования внутри протона и, в более общем смысле, внутри адронов дополнительных партонов – тензорных глюонов, которые несут часть импульса протона [1]. Ненулевая плотность тензорных глюонов может порождаться испусканием глюонами тензорных глюонов. Сами тензорные глюоны далее расщепляются на пары тензорных глюонов по различным каналам. Поэтому плотность нейтральных партонов в протоне определяется суммой двух выражений

$$G(x, t) + \sum_s T_s(x, t),$$

где $T_s(x, t)$ – плотность тензорных глюонов со спином s . Для описания этих процессов между глюонами и тензорными глюонами нужно знать общие вероятности расщепления тензорных глюонов P_{BA}^C . Эти вероятности удовлетворяют самым общим соотношениям симметрии, которые можно решить, введя индекс расщепления (3.2). Этот подход позволяет найти общий вид функций расщепления (3.5), (3.7), вывести соответствующие эволюционные уравнения ДГЛАП (4.1) и рассчитать однопетлевую бета-функцию Каллана–Симанчика (4.9) для тензорных глюонов с различными спинами.

Наши результаты представляют собой нетривиальную проверку согласованности теории и расчетов на основе бета-функции Каллана–Симанчика, поскольку теория имеет единственную константу связи, и ее поведение при больших энергиях должно

быть общим для всех частиц спектра. Мы утверждаем, что вклад всех спинов в бета-функцию исчезает, что приводит к конформно-инвариантной теории при очень высоких энергиях.

Добавление при корректуре. Можно предложить и альтернативный метод вычисления функций расщепления, который основан на комплексной деформации импульсов w в трехчастичной вершине взаимодействия (2.6), причем такой, при которой импульсы частиц остаются на массовой оболочке [7]:

$$p_1 = (\omega z, w, iw, kz), \quad p_2 = (\omega(1-z), -w, -iw, k(1-z)), \quad p_3 = (\omega, 0, 0, k). \quad (5.1)$$

Векторы поляризации

$$e_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{\omega}, 1, -i, -\frac{z}{k} \right), \quad e_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{z}{\omega}, 1, -i, -\frac{z}{k} \right), \quad e_3^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -i, 0)$$

выбраны таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_1 p_2 = p_2 p_3 = p_3 p_1 = p_1 e_1^+ = p_2 e_2^+ = p_3 e_3^- = 0.$$

Спинорное представление импульсов (5.1) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (\sqrt{(\omega+k)z}, 0), & \tilde{\lambda}_1 &= \left(\sqrt{(\omega+k)z}, \frac{2w}{\sqrt{(\omega+k)z}} \right), \\ \lambda_2 &= (\sqrt{(\omega+k)(1-z)}, 0), & \tilde{\lambda}_2 &= \left(\sqrt{(\omega+k)(1-z)}, -\frac{2w}{\sqrt{(\omega+k)(1-z)}} \right), \\ \lambda_3 &= (\sqrt{(\omega+k)}, 0), & \tilde{\lambda}_3 &= (\sqrt{(\omega+k)}, 0). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что скалярные произведения $\langle 1, 2 \rangle = \langle 2, 3 \rangle = \langle 3, 1 \rangle = 0$ обращаются в ноль и что

$$[1, 2] = -2w \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}, \quad [2, 3] = 2w \frac{1}{\sqrt{1-z}}, \quad [3, 1] = 2w \frac{1}{\sqrt{z}}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим вершину взаимодействия тензорных глюонов (2.6), в которую входят спины $A = r$, $C = s$ и $B = s - r + 1$, где $s \geq 2r - 1$, $r = 1, 2, 3, \dots$. Непосредственное вычисление скалярных произведений (5.2) дает

$$\begin{aligned} M_3(1^{-s}, 2^{+r}, 3^{s-r+1}) &\propto \frac{[2, 3]^{2s+1}}{[1, 2]^{2s-2r+1} [3, 1]^{2r-1}} = -2w \frac{z^s}{(1-z)^r}, \\ M_3(1^{-s}, 2^{s-r+1}, 3^{+r}) &\propto \frac{[2, 3]^{2s+1}}{[1, 2]^{2r-1} [3, 1]^{2s-2r+1}} = -2w \frac{z^s}{(1-z)^{s-r+1}}, \\ M_3(1^{+r}, 2^{s-r+1}, 3^{-s}) &\propto \frac{[1, 2]^{2s+1}}{[2, 3]^{2r-1} [3, 1]^{2s-2r+1}} = -2w \frac{1}{z^r (1-z)^{s-r+1}}, \\ M_3(1^{+r}, 2^{-s}, 3^{s-r+1}) &\propto \frac{[3, 1]^{2s+1}}{[2, 3]^{2r-1} [1, 2]^{2s-2r+1}} = -2w \frac{(1-z)^s}{z^r}, \\ M_3(1^{s-r+1}, 2^{+r}, 3^{-s}) &\propto \frac{[1, 2]^{2s+1}}{[3, 1]^{2r-1} [2, 3]^{2s-2r+1}} = -2w \frac{1}{z^{s-r+1} (1-z)^r}, \\ M_3(1^{s-r+1}, 2^{-s}, 3^{+r}) &\propto \frac{[3, 1]^{2s+1}}{[1, 2]^{2r-1} [2, 3]^{2s-2r+1}} = -2w \frac{(1-z)^s}{z^{s-r+1}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Выбирая поперечный импульс $p_\perp$ в (2.11) пропорциональным параметру деформации, $p_\perp \propto w$, можно получить следующее выражение для вероятности расщепления:

$$P(z) = \frac{1}{2} z(1-z) |M_3|^2 \frac{1}{|w|^2},$$

и затем, используя (5.3), получить полный набор вероятностей расщепления:

$$\begin{aligned} P_{s-r+1,r}^s &= C_2(G) \frac{(1-z)^{2s+1}}{z^{2s-2r+1}}, & P_{s,r}^{s-r+1} &= C_2(G) \frac{z^{2s+1}}{(1-z)^{2s-2r+1}}, \\ P_{r,s-r+1}^s &= C_2(G) \frac{(1-z)^{2s+1}}{z^{2r-1}}, & P_{r,s}^{s-r+1} &= C_2(G) \frac{1}{z^{2r-1}(1-z)^{2s-2r+1}}, \\ P_{s,s-r+1}^r &= C_2(G) \frac{z^{2s+1}}{(1-z)^{2r-1}}, & P_{s-r+1,s}^r &= C_2(G) \frac{1}{z^{2s-2r+1}(1-z)^{2r-1}}. \end{aligned}$$

У этих вероятностей индексы расщепления (3.2) равны $n = s$ и $m = -(s - r + 1)$, причем первый из них отличается от $n = s - r + 1$ в формулах (3.5). Аналогичным образом найдем вероятности расщепления для вершины со спинами $A = r$, $C = s$ и $B = s - r - 1$:

$$\begin{aligned} P_{s-r-1,r}^s &= C_2(G) \frac{z^{2s-2r-1}}{(1-z)^{2s-1}}, & P_{s,r}^{s-r-1} &= C_2(G) \frac{(1-z)^{2s-2r-1}}{z^{2s-1}}, \\ P_{r,s-r-1}^s &= C_2(G) \frac{z^{2r+1}}{(1-z)^{2s-1}}, & P_{r,s}^{s-r-1} &= C_2(G) z^{2r+1} (1-z)^{2s-2r-1}, \\ P_{s,s-r-1}^r &= C_2(G) \frac{(1-z)^{2r+1}}{z^{2s-1}}, & P_{s-r-1,s}^r &= C_2(G) z^{2s-2r-1} (1-z)^{2r+1}, \end{aligned}$$

где $s \geq 2r + 1$, $r = 1, 2, 3, \dots$. Соответствующие индексы расщепления имеют вид $n = s - r - 1$ и $m = -s$, причем последний отличается от $m = -(s - r - 1)$ в (3.6). Импульсное правило сумм (4.8) принимает вид

$$\begin{aligned} C_2(G) \int_0^1 dz z \sum_s \left[\frac{z^{2s+1}}{(1-z)^{2s-2r+1}} + \frac{(1-z)^{2s+1}}{z^{2s-2r+1}} \right] + b_{rr} = \\ = C_2(G) \sum_{k=2s-2r+1}^{2s+1} \frac{(2s+1)!}{k! (2s+1-k)!} \frac{1}{k-2s+2r} + b_{rr} = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

и позволяет найти однопетлевую бета-функцию Каллана-Симанчика:

$$b_{rr} = -C_2(G) \sum_s \sum_{k=2s+1-2r}^{2s+1} \frac{(2s+1)!}{k! (2s+1-k)!} \frac{1}{k-2s+2r}, \quad r = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.5)$$

которая растет, как s^{2r} . В связи с приведенными выше выкладками следует заметить, что использование для вычисления функций расщепления трехчастичных вершин взаимодействия, заданных на массовой оболочке, требует дополнительного обоснования.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Регуляризация вводится следующим образом [1]:

$$\begin{aligned}\int_0^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+^{2s-1}} &= \int_0^1 \frac{dz}{(1-z)^{2s-1}} \left(f(z) - \sum_{k=0}^{2s-2} \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(1)(1-z)^k \right), \\ \int_0^1 dz \frac{f(z)}{z_+^{2s-1}} &= \int_0^1 \frac{dz}{(1-z)^{2s-1}} \left(f(z) - \sum_{k=0}^{2s-2} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)z^k \right), \\ \int_0^1 dz \frac{f(z)}{z_+(1-z)_+} &= \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)} (f(z) - (1-z)f(0) - zf(1)),\end{aligned}\tag{П.1}$$

где $f(z)$ – любая тестовая функция, достаточно регулярная в конечных точках, а введенное вычитание, как можно заметить, гарантирует сходимость интегралов. Основываясь на тех же соображениях, что и в стандартном случае [8], в определение ядер следует добавить члены с дельта-функциями.

Интегралы в правилах сложения импульсов (4.4), (4.5) и (4.8) можно вычислить двумя различными способами: прямой регуляризацией интегралов вблизи $z = 1$ и вблизи $z = 0$, как это сделано в (П.1), или используя подстановку $w = 1 - z$ во второй член подынтегрального выражения и после этого регуляризуя результат вблизи $z = 1$. Как можно убедиться, оба метода приводят к одному и тому же результату. Поэтому интеграл по $P_{TG}(z)$ в уравнении (4.5) дает

$$\begin{aligned}\int_0^1 dz \left(\frac{z^{2s+2}}{(1-z)_+^{2s-1}} + \frac{(1-z)^{2s+1}}{z_+^{2s-2}} \right) &= \\ &= \int_0^1 dz \left(\sum_{k=2s-1}^{2s+2} \frac{(-1)^k (2s+2)!}{k! (2s+2-k)!} \frac{(1-z)^k}{(1-z)^{2s-1}} + \sum_{k=2s-2}^{2s+1} \frac{(-1)^k (2s+1)!}{k! (2s+1-k)!} \frac{z^k}{z^{2s-2}} \right) = \\ &= -\frac{12s^2 - 1}{6}.\end{aligned}$$

Этот интеграл можно также вычислить с помощью подстановки $w = 1 - z$ во второй член подынтегрального выражения:

$$\int_0^1 dz \frac{z^{2s+1}}{(1-z)_+^{2s-1}} = \int_0^1 dz \sum_{k=2s-1}^{2s+1} \left(\frac{(-1)^k (2s+1)!}{k! (2s+1-k)!} \frac{(1-z)^k}{(1-z)^{2s-1}} \right) = -\frac{12s^2 - 1}{6},$$

что совпадает с предыдущим результатом.

Благодарности. Автор благодарен Г. Георгиу и С. Конитопулосу за обсуждение, которое стимулировало вычисление, добавленное при корректуре. Настоящая работа получила частичную поддержку со стороны General Secretariat for Research and Technology of Greece, а также European Regional Development Fund MIS-448332-ORASY (NSRF 2007-13 ACTION, KRIPIS).

Список литературы

- [1] G. Savvidy, *Phys. Lett. B*, **732** (2014), 150–155.
- [2] G. Savvidy, *Phys. Lett. B*, **625**:3–4 (2005), 341–350, arXiv: hep-th/0509049.

- [3] G. Savvidy, *Internat. J. Modern Phys. A*, **21**:23–24 (2006), 4931–4957, arXiv: hep-th/0505033.
- [4] G. Savvidy, *Internat. J. Modern Phys. A*, **21**:23–24 (2006), 4959–4977, arXiv: hep-th/0510258.
- [5] G. Savvidy, *Internat. J. Modern Phys. A*, **25**:31 (2010), 5765–5785, arXiv: 1006.3005.
- [6] G. Georgiou, G. Savvidy, *Internat. J. Modern Phys. A*, **26**:15 (2011), 2537–2555, arXiv: 1007.3756.
- [7] I. Antoniadis, G. Savvidy, *Modern Phys. Lett. A*, **27**:18 (2012), 1250103, 14 pp., arXiv: 1107.4997.
- [8] G. Altarelli, G. Parisi, *Nucl. Phys. B*, **126**:2 (1977), 298–318.
- [9] Ю. Л. Докшицер, *ЖЭТФ*, **73**:4 (1977), 1216–1240.
- [10] В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **15**:4 (1972), 781–807.
- [11] В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **15**:6 (1972), 1218–1237.
- [12] Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **20**:1 (1974), 181–198.
- [13] D. J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev. D*, **8**:10 (1973), 3633–3652.
- [14] D. J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev. D*, **9**:4 (1974), 980–993.
- [15] H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.*, **30**:26 (1973), 1346–1349.
- [16] H. Georgi, S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.*, **32**:8 (1974), 438–441.
- [17] H. Georgi, H. R. Quinn, S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **33**:7 (1974), 451–454.
- [18] L. J. Dixon, *Calculating scattering amplitudes efficiently*, arXiv: hep-ph/9601359.
- [19] S. J. Parke, T. R. Taylor, *Phys. Rev. Lett.*, **56**:23 (1986), 2459–2460.
- [20] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **252**:1–3 (2004), 189–258, arXiv: hep-th/0312171.
- [21] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng, E. Witten, *Phys. Rev. Lett.*, **94**:18 (2005), 181602, 4 pp., arXiv: hep-th/0501052.
- [22] P. Benincasa, F. Cachazo, *Consistency conditions on the S-matrix of massless particles*, arXiv: 0705.4305.
- [23] F. Cachazo, P. Svrcek, E. Witten, *JHEP*, **09** (2004), 006, 21 pp., arXiv: hep-th/0403047.
- [24] N. Arkani-Hamed, J. Kaplan, *JHEP*, **04** (2008), 076, 21 pp., arXiv: 0801.2385.
- [25] F. A. Berends, W. T. Giele, *Nucl. Phys. B*, **313**:3 (1989), 595–633.
- [26] M. L. Mangano, S. J. Parke, *Nucl. Phys. B*, **299**:4 (1988), 673–692.
- [27] V. S. Fadin, E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, *Phys. Lett. B*, **60**:1 (1975), 50–52.
- [28] Э. А. Кураев, Л. Н. Липатов, В. С. Фадин, *ЖЭТФ*, **72**:2 (1977), 377–389.
- [29] Я. Я. Балицкий, Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **28**:7 (1978), 1597–1611.
- [30] G. K. Savvidy, *Phys. Lett. B*, **71**:1 (1977), 133–134.
- [31] S. G. Matinyan, G. K. Savvidy, *Nucl. Phys. B*, **134**:3 (1978), 539–545.
- [32] И. А. Баталин, С. Г. Матинян, Г. К. Саввиди, *ЯФ*, **26**:2 (1977), 407–414.
- [33] D. Kay, *Phys. Rev. D*, **28**:6 (1983), 1562–1565.
- [34] L. Brink, H. B. Nielsen, *Phys. Lett. B*, **43**:4 (1973), 319–322.