Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Родионов, Г. А. Кравцова, К развитию неэрмитовой алгебраической теории с γ_5 -расширением массы, *ТМФ*, 2015, том 182, номер 1, 124–139

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8744>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:51:39

© 2015 г.

В. Н. Родионов*, Г. А. Кравцова†

К РАЗВИТИЮ НЕЭРМИТОВОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ С γ_5 -РАСШИРЕНИЕМ МАССЫ

Рассматривается неэрмитова фермионная модель с γ_5 -расширением массы: $m \rightarrow m_1 + \gamma_5 m_2$. Устанавливается связь рассматриваемой теории и геометрической теории с максимальной массой в квантово-механическом приближении. Предлагается уточненное условие ненарушенности PT -симметрии теории. Оно содержит указание о разделении исходной области ненарушенности на подобласти, отвечающие описанию обычных и экзотических частиц. Вычисляется оператор $\mathcal{C}$, необходимый для построения нового скалярного произведения в данной теории с неэрмитовым гамильтонианом, и приводится ряд следствий его введения. Решается задача о нахождении собственных значений и собственных векторов рассматриваемого гамильтониана.

Ключевые слова: максимальная масса, фермионный сектор, PT -симметрия, псевдоэрмитовы теории.

DOI: 10.4213/tmf8744

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы интенсивно развивается неэрмитова квантовая теория. Центральным ее пункт – построение нового скалярного произведения, в котором средние значения неэрмитовых гамильтонианов становятся действительными.

Один из вариантов построения нового скалярного произведения осуществляется в PT -симметричных теориях (т. е. в моделях, где гамильтониан обладает совместной PT -симметрией, хотя по отдельности P - и T -симметрии в теории отсутствуют). Это достигалось нахождением оператора $\mathcal{C}$ с помощью рекуррентных соотношений (см. [1], [2]) и построением с его помощью нового скалярного произведения.

Другой способ построения оператора $\mathcal{C}$ осуществляется в псевдоэрмитовых теориях [3]. В них рассматриваются модели с неэрмитовыми гамильтонианами, обладающими свойством псевдоэрмитовости:

$$\eta_0 H \eta_0^{-1} = H^\dagger, \quad (1)$$

*Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва, Россия.
E-mail: vnrodionov@mtu-net.ru

†Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: gakr@chtc.ru

где η_0 – линейный эрмитов оператор. Оператор $\mathcal{C}$ строится с помощью η_0 точно следующим образом: $\mathcal{C} = \eta_0^{-1}P$.

Среди многочисленных моделей, рассмотренных в контексте развития неэрмитовой квантовой теории [1]–[23], имеется так называемая PT -симметричная массивная модель Тирринга [13] с гамильтоновой плотностью ($\hbar = c = 1$)

$$\mathcal{H}(x, t) = \bar{\psi}(x, t)(-i \vec{\partial} \vec{\gamma} + m_1 + \gamma_5 m_2)\psi(x, t). \quad (2)$$

Уравнение движения, следующее из гамильтониана (2), можно записать в (3 + 1)-мерном пространстве следующим образом:

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m_1 - \gamma_5 m_2)\psi(x, t) = 0. \quad (3)$$

Оно может быть преобразовано в уравнение второго порядка, и в результате получается уравнение Клейна–Гордона

$$(\partial^2 + m^2)\psi(x, t) = 0, \quad (4)$$

где

$$m^2 = m_1^2 - m_2^2. \quad (5)$$

Легко видеть, что так называемая физическая масса m , появляющаяся в данном уравнении, действительна, если выполняется неравенство

$$m_1 \geq m_2. \quad (6)$$

Это неравенство рассматривалось в данной теории как базовое требование, определяющее область ненарушенной PT -симметрии рассматриваемого гамильтониана.

Следует заметить, что модель (2) не нова: она была предложена задолго до публикации [13] в работе [24]. Как показано в [24], гамильтониан вида (2) появляется в теории с ограниченной массой, реализуемой в пространстве анти-де Ситтера, при описании фермионного сектора теории.

Идея ограниченности спектра масс элементарных частиц

$$m \leq m_{\text{Planck}} = 10^{19} \text{ ГэВ} \quad (7)$$

была высказана Марковым в 1965 году [25]. Частицы с предельной массой $m = m_{\text{Planck}}$ были названы автором *максимонами*. Первоначально условие (7) было чисто феноменологическим и в построении теории не участвовало. Однако в конце 70-х годов был предложен новый подход [24], в котором идея Маркова о существовании максимальной массы частиц принималась как новый фундаментальный физический принцип квантовой теории поля (КТП). В предложенной теории постулируется условие конечности спектра масс в виде

$$m \leq M, \quad (8)$$

где параметр максимальной массы M , называемый фундаментальной массой, является новой физической константой. Величина M рассматривается как радиус кривизны пятимерного гиперboloида, поверхность которого представляет собой реализацию искривленного импульсного 4-пространства, или пространства анти-де Ситтера:

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_5^2 = M^2. \quad (9)$$

В этом пространстве строится новая теория, в которой объекты с массой больше M не могут рассматриваться как элементарные частицы, так как им не соответствуют никакие локальные поля.

Легко видеть, что для свободной частицы $p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2$ условие (8) автоматически выполняется на поверхности (9). Также очевидно, что в приближении

$$|p_0|, |\vec{p}| \ll M, \quad p_5 \cong M \quad (10)$$

геометрия анти-де Ситтера переходит в геометрию Минковского в четырехмерном псевдоевклидовом p -пространстве (“плоский предел”).

При рассмотрении фермионного сектора было выяснено [26], [27], что если в обычном формализме свободный оператор Дирака имеет вид

$$D(p) = p_\nu \gamma^\nu - m, \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (11)$$

и может рассматриваться как результат факторизации оператора Клейна–Гордона

$$p_\nu^2 - m^2 = (p_\nu \gamma^\nu + m)(p_\nu \gamma^\nu - m), \quad (12)$$

то в КТП с максимальной массой вместо (11), (12) возникает следующее соотношение:

$$2M(p_5 - M \cos \mu) = \left[\gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + \varepsilon_1 \gamma^5 (p_5 - M) + \varepsilon_2 2M \sin \frac{\mu}{2} \right] \times \\ \times \left[-\gamma^0 p_0 + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - \varepsilon_1 \gamma^5 (p_5 - M) + \varepsilon_2 2M \sin \frac{\mu}{2} \right], \quad (13)$$

где $\cos \mu = \sqrt{1 - m^2/M^2}$ и $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$. То есть в модифицированной КТП оператор $2M(p_5 - M \cos \mu)$ рассматривается как оператор Клейна–Гордона, а новое выражение для оператора Дирака имеет вид

$$D(p, M) = p_\nu \gamma^\nu + (p_5 - M) \gamma^5 - 2M \sin \frac{\mu}{2}. \quad (14)$$

Легко проверить, что в “плоском пределе” (см. (10)) выражения (11) и (14) совпадают, т. е. оператор (14) переходит в обычный оператор Дирака.

Рассматривая оператор (14) в конфигурационном пространстве (x_μ, x_5) с использованием пятимерного преобразования Фурье (см. [26]) и вводя обозначение $p_\mu = i\partial_\mu$, а также

$$m_1 = 2M \sin \frac{\mu}{2}, \quad m_2 = 2M \sin^2 \frac{\mu}{2}, \quad (15)$$

получаем

$$(p_0 - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{p} - \hat{\beta} m_1 - \hat{\beta} \gamma^5 m_2) \Psi(x, t, x_5) = 0. \quad (16)$$

В этом модифицированном уравнении Дирака матрицы $\hat{\beta} = \gamma_0$, $\hat{\alpha}^i = \hat{\beta} \gamma^i$. Важно заметить, что на массовой поверхности $p_5 = M \cos \mu$ не существует операторов, которые действуют на координату x_5 , и этот параметр без потери общности может быть выбран равным нулю [26], [27]. Таким образом, гамильтониан, отвечающий уравнению (16), можно представить в виде

$$\hat{H} = \vec{\alpha} \vec{p} + \hat{\beta} (m_1 + m_2 \gamma_5). \quad (17)$$

Очевидно, выражение (17) оказывается неэрмитовым из-за появления в нем γ_5 -массового слагаемого ($H \neq H^\dagger$) (см. (2)). Таким образом, можно сделать вывод о том, что ограничение спектра масс (8), которое было положено в основу геометрического подхода при разработке модифицированной КТП с максимальной массой [24], может приводить к появлению неэрмитовых вкладов в гамильтониан в фермионном секторе.

Геометрический подход к изучению квантованных полей в рамках модифицированной Стандартной модели (СМ), базирующейся на включении в качестве дополнительного постулата соотношения (8), получил дальнейшее развитие в работах [28]–[38]. Новая теория, построенная на основе чисто геометрического принципа, претендует на роль адекватного обобщения СМ в области высоких энергий $E \geq M$ [26], [27].

В настоящей работе мы продолжаем исследования, начатые в [37], [38], и показываем связь теории с максимальной массой с неэрмитовой квантовой механикой.

Данная работа имеет следующую структуру. В разделе 2 развивается алгебраический подход в исследовании модели с гамильтонианом (17). Анализируется связь данной алгебраической модели и геометрической теории с ограниченной массой, возникающая вследствие введения в алгебраическую теорию параметра $m_{\max}$. В разделе 3 осуществляется построение нового скалярного произведения в данной неэрмитовой (псевдоэрмитовой) теории, производится его анализ, а также рассматриваются некоторые характеристики модифицированной теории. В разделе 4 приводятся выводы, а также важные замечания, подробное рассмотрение которых не вошло в данную работу.

2. ОБ ОГРАНИЧЕНИИ МАСС В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ С γ_5 -РАСШИРЕННОЙ МАССОЙ

Если ограничиться для простоты квантово-механическим рассмотрением, то становится очевидно, что по сути гамильтонианы (17) и (2) совпадают, а также совпадают с точностью до обозначений следующие из них уравнения движения (16) и (3) соответственно. При обнаружении такой очевидной связи теории с максимальной массой и алгебраической модели (2) возникает вопрос: существует ли более глубокая связь между указанными теориями? В частности, возникает интерес к изучению возможных ограничений на параметры алгебраической модели, существование которых в рамках этого подхода изначально не является очевидным.

Заметим, что величины m_1 и m_2 , фигурирующие в условии (6), не являются массами частиц, а используются лишь как удобные вспомогательные параметры. Поэтому мы запишем дополнительное условие на физическую массу m и параметры m_1 и m_2 , которое, как увидим ниже, оказывается не менее существенным, чем условие (5).

Действительно, используя теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел, имеем

$$\frac{m^2 + m_2^2}{2} \geq \sqrt{m^2 m_2^2}, \quad (18)$$

откуда следует неравенство

$$m \leq \frac{m_1^2}{2m_2} \equiv m_{\max}, \quad (19)$$

где введен новый массовый параметр $m_{\max}$. Напомним, что мы исследуем вопрос о существовании в данной теории ограничений на массовые параметры. Предположим, что существует ограничение на параметр m . Тогда в силу (18) это ограничение должно иметь вид (19). Заметим, что здесь ограничение (19) является формальным, так как значение $m_{\max}$ определяется параметрами теории m_1 и m_2 , значения которых в общем случае могут меняться в бесконечных пределах. Однако, как будет показано ниже, обнаруживается связь между $m_{\max}$ и M из геометрической теории с ограниченной массой, что приводит к появлению в алгебраической теории условия физического ограничения на массу m .

Так, существует очевидная аналогия между M и $m_{\max}$. Нетрудно видеть, что в геометрической теории имеет место равенство

$$\frac{m_1^2}{2m_2} = M,$$

что буквально соответствует определению (19). Однако ниже мы увидим, что связь между M и $m_{\max}$ оказывается более глубокой.

Очевидно, что при заданных m_1 и m_2 , фиксированных в рассматриваемом гамильтониане, неравенство (19) всегда имеет место. Таким образом, соотношение (19) является следствием введения в гамильтониан (17) γ_5 -массового слагаемого, приводящего к неэрмитовости гамильтониана.

В эрмитовом пределе $m_2 \rightarrow 0$ из (19) имеем

$$m_{\max} \rightarrow \infty, \quad (20)$$

что соответствует переходу к стандартной дираковской теории, в которой, как известно, отсутствует какое бы то ни было ограничение на массы фермионов. Следовательно, предел (20) не только корректен, но и означает, что рассматриваемая модель удовлетворяет принципу соответствия, т. е. в указанном пределе она переходит в дираковскую теорию. С другой стороны, в “плоском пределе” (10), когда параметр M неограниченно возрастает (и формально также $M \rightarrow \infty$), мы имеем переход от искривленного импульсного пространства анти-де Ситтера к обычному пространству Минковского.

Заметим, что условия (5), (6) и (19) выполняются автоматически, если ввести следующую параметризацию:

$$m_1 = m \operatorname{ch} \alpha, \quad m_2 = m \operatorname{sh} \alpha. \quad (21)$$

Из (19) и (21) можно определить

$$m = 2m_{\max} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha}, \quad m_1 = 2m_{\max} \operatorname{th} \alpha, \quad m_2 = 2m_{\max} \operatorname{th}^2 \alpha, \quad (22)$$

и таким образом получить

$$\operatorname{th} \alpha = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - m^2/m_{\max}^2}}{2}}. \quad (23)$$

Рис. 1. Значения параметров $\nu_1^\mp, \nu_2^\mp$ как функции ν : ν_1^- – жирная сплошная кривая, ν_1^+ – пунктирная кривая, ν_2^- – тонкая сплошная кривая, ν_2^+ – штриховая кривая.

Подставляя (23) в (22), получаем

$$m_1^\mp = \sqrt{2}m_{\max} \sqrt{1 \mp \sqrt{1 - \frac{m^2}{m_{\max}^2}}}, \quad (24)$$

$$m_2^\mp = m_{\max} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{m^2}{m_{\max}^2}} \right). \quad (25)$$

Из формул (24), (25) видно, что m_1 и m_2 являются двузначными функциями физической массы m . Для иллюстрации этой двузначности приведем график, представляющий связь функций m_1, m_2 и m (см. рис. 1). Определим приведенные массы $\nu = m/m_{\max}$, $\nu_1 = m_1/m_{\max}$ и $\nu_2 = m_2/m_{\max}$. Первое соотношение в (22) может быть представлено в виде

$$\frac{\nu}{2} = \text{th } \alpha \sqrt{1 - \text{th}^2 \alpha}. \quad (26)$$

Из (22) и (24), (25) имеем также

$$\nu_1^\mp = \sqrt{2} \sqrt{1 \mp \sqrt{1 - \nu^2}}, \quad (27)$$

$$\nu_2^\mp = 1 \mp \sqrt{1 - \nu^2}. \quad (28)$$

Таким образом, рис. 1 демонстрирует зависимость параметров $\nu_1^\mp, \nu_2^\mp$ от величины ν . Область существования PT -симметрии $0 \leq \nu \leq 1$. Для этих значений

параметров ν_1 и ν_2 модифицированное уравнение Дирака с максимальной массой описывает распространение частиц, имеющих действительные массы.

Чтобы понять физический смысл двузначной зависимости m_1 и m_2 от m , $m_{\max}$, обратимся вновь к геометрической теории с ограниченной массой. Весьма важно, что в этой теории новый оператор Клейна–Гордона $2M(p_5 - M \cos \mu)$ может быть разложен на матричные множители и иным, совершенно независимым от (13) способом:

$$2M(p_5 - M \cos \mu) = \left[\gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + \varepsilon_1 \gamma^5 (p_5 + M) + \varepsilon_2 2M \cos \frac{\mu}{2} \right] \times \\ \times \left[\gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + \varepsilon_1 \gamma^5 (p_5 + M) - \varepsilon_2 2M \cos \frac{\mu}{2} \right], \quad (29)$$

где по-прежнему $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$. Таким образом, в развиваемом подходе возникает новый оператор

$$D_{\text{exotic}}(p, M) = p_\nu \gamma^\nu + (p_5 + M) \gamma^5 - 2M \cos \frac{\mu}{2}. \quad (30)$$

Главное отличие оператора $D_{\text{exotic}}(p, m)$ от оператора (14) состоит в том, что он не имеет плоского предела (см. (10)), т. е. для него отсутствует переход к эрмитову выражению при $M \rightarrow \infty$. С этим оператором ассоциируются гамильтониан

$$\hat{H}_{\text{ex}} = \vec{\alpha} \vec{p} + \hat{\beta}(m_3 + m_4 \gamma_5), \quad (31)$$

где

$$m_3 = 2M \cos \frac{\mu}{2}, \quad m_4 = 2M \cos^2 \frac{\mu}{2}, \quad (32)$$

и так называемое “экзотическое” фермионное поле, удовлетворяющее уравнению

$$(p_0 - \hat{\alpha} \mathbf{p} - \hat{\beta} m_3 - \hat{\beta} \gamma^5 m_4) \Psi^{\text{ex}}(x, t, x_5) = 0. \quad (33)$$

Из сравнения формул (17) и (31), (16) и (33) видно, что они различаются лишь определениями массовых параметров m_1 , m_3 и m_2 , m_4 соответственно. Кроме того, анализируя формулы (24), (25), и (15), (32), можно установить, что как в геометрической теории параметры m_1 и m_2 участвуют в описании обычных частиц, так и в алгебраической теории ту же роль выполняют параметры m_1^- , m_2^- (на рис. 1 им соответствуют нижние ветви графиков ν_1^- , ν_2^-). Совершенно аналогично для описания экзотических частиц в геометрической теории используются параметры m_3 , m_4 , а в алгебраической теории им соответствуют m_1^+ , m_2^+ (верхние ветви графиков ν_1^+ , ν_2^+). Области изменения физической массы m , а также параметров m_1 и m_2 таковы:

$$0 \leq m \leq m_{\max}, \quad m \leq m_1 \leq 2m_{\max}, \quad 0 \leq m_2 \leq 2m_{\max}. \quad (34)$$

На графике эти области соответствуют интервалам $0 \leq \nu \leq 1$, $\nu \leq \nu_1 \leq 2$, $0 \leq \nu_2 \leq 2$. Очевидно, что в алгебраической интерпретации эти ограничения определяют область ненарушенной PT -симметрии модели, которая соответствует условию (6). Точка $m = m_{\max}$ (на графике $\nu = 1$) представляет собой особый случай: она соответствует максимуму. В этой точке графика имеем $\nu_1^- = \nu_1^+ = \sqrt{2}$ и $\nu_2^- = \nu_2^+ = 1$.

Рис. 2. Параметрическая область ненарушенной PT -симметрии $m_1^2 \geq m_2^2$ для гамильтониана (33) состоит из трех характерных подобластей. Затемненная область II отвечает обычным частицам, а граничащие с ней две области I и III соответствуют описанию “экзотических” фермионов.

Заметим, что при появлении “экзотических” частиц суть максимона в теории не меняется ни физически, ни математически. Он по-прежнему играет роль частицы с максимальной массой. Нетрудно также видеть соответствие параметров геометрической и алгебраической теорий:

$$\frac{m_1^2}{2m_2} = \frac{m_3^2}{2m_4} = M \longleftrightarrow \frac{m_1^\mp^2}{2m_2^\mp} = m_{\max}.$$

Заметим, что в геометрической модели появление “экзотических” частиц считалось прерогативой самого подхода, где появление новых необычных свойств частиц связывалось с присутствием в теории новой степени свободы – знака компоненты импульса p_5 ($\epsilon = p_5/|p_5|$, см. [24], [28]). Однако мы видим, что в алгебраическом подходе введение параметра $m_{\max}$ также позволяет включить в теорию описание “экзотических” частиц. Кроме того, это дает возможность уточнить область PT -симметрии модели. На рис. 2 можно видеть, что область PT -симметрии гамильтониана

$$\hat{H} = \vec{\alpha}\vec{p} + \hat{\beta}(m_1^\mp + m_2^\mp\gamma_5) \quad (35)$$

в плоскости m_1, m_2 определяется тремя группами неравенств:

$$\begin{aligned} \text{I} - \quad & \frac{m_1}{\sqrt{2}} \leq m_2 \leq m_1; \\ \text{II} - \quad & -\frac{m_1}{\sqrt{2}} \leq m_2 \leq \frac{m_1}{\sqrt{2}}; \\ \text{III} - \quad & -m_1 \leq m_2 \leq -\frac{m_1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Рис. 2 аналогичен рис. 1 в работе [13], но здесь область PT -симметрии детализирована: если подобласть II отвечает обычным частицам, то области I и III соответствуют описанию “экзотических” частиц. Таким образом, становится ясно, что

условие (6) не может рассматриваться как единственное ограничение в теории, и введение параметра $m_{\max}$, а также учет неравенства (19) позволяют уточнить область PT -симметрии модели.

Выражения (24), (25) позволяют в данной алгебраической модели рассматривать “физический” подход, т. е. ответить на вопрос, как с помощью гамильтониана (17) описать конкретную частицу. Иначе говоря, как по известной физической массе данной частицы m найти параметры m_1 , m_2 для ее описания в рамках алгебраической модели. Очевидно, что с помощью одного лишь условия (5) невозможно однозначно ответить на этот вопрос. Однако если ввести параметр $m_{\max}$, то ответ следует из формул (24), (25). Фактически совершается переход от двухпараметрической задачи, задаваемой гамильтонианом (17) с параметрами m_1 , m_2 , к двухпараметрической задаче с параметрами m , $m_{\max}$. Это еще раз доказывает необходимость введения параметра $m_{\max}$, а также учета неравенства (19).

Рассмотрим в данном контексте алгебраическую модель, описывающую весь спектр фермионов. В этом случае возникает вопрос о единственности $m_{\max}$ для всех частиц. Из физических соображений мы можем предположить, что модель, в которой $m_{\max}$ единственна для всех частиц, предпочтительна. Тогда логично сделать вывод, что эта единственная величина $m_{\max}$ является массой максимона и должна соответствовать M в геометрическом подходе. Это оказывается возможным, потому что, как уже указывалось, гамильтонианы и уравнения эволюции в этих двух моделях совпадают вплоть до обозначений. Иными словами, в теории, описывающей спектр масс элементарных частиц, необходимо принять из физических соображений предположение равенства $m_{\max}$ и M . Поскольку значение M должно следовать из эксперимента, то установление постулата о равенстве $m_{\max}$ и M приводит к появлению в алгебраической теории физического ограничения спектра масс.

Тем самым, кроме того, еще раз устанавливается связь данной алгебраической модели и геометрической теории с максимальной массой [24]–[36].

3. МОДИФИКАЦИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ. СПЕКТР ЭНЕРГИЙ И ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ

Так как рассматриваемый гамильтониан неэрмитов (псевдоэрмитов, см. (1)), то необходимо ввести новое скалярное произведение, определяемое оператором $\mathcal{C}$, связанным с CPT -симметрией гамильтониана. Для этого перепишем массовый член гамильтониана в виде

$$\hat{\beta}(m_1 + m_2\gamma_5) = \hat{\beta}m(\operatorname{ch} \alpha + \gamma_5 \operatorname{sh} \alpha) = \hat{\beta}me^{\gamma_5\alpha}. \quad (36)$$

Теперь можно записать исходный гамильтониан следующим образом:

$$\hat{H} = \hat{\alpha}\vec{p} + \hat{\beta}me^{\gamma_5\alpha}, \quad (37)$$

а эрмитово-сопряженный гамильтониан представить в виде

$$\hat{H}^\dagger = \hat{\alpha}\vec{p} + \hat{\beta}me^{-\gamma_5\alpha}. \quad (38)$$

Используя правила коммутации матриц γ_5 , $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} e^{\alpha\gamma_5/2}\hat{H} &= \hat{H}_0 e^{\alpha\gamma_5/2} = \hat{H}_0\eta, \\ e^{-\alpha\gamma_5/2}\hat{H}^\dagger &= \hat{H}_0 e^{-\alpha\gamma_5/2} = \hat{H}_0\eta^{-1}, \end{aligned} \quad (39)$$

где введено обозначение $\hat{H}_0 = \vec{\alpha}\vec{p} + \hat{\beta}m$, соответствующее обычному дираковскому гамильтониану, и

$$\eta = e^{\alpha\gamma_5/2}. \quad (40)$$

Из (37) легко видеть, что эрмитов гамильтониан $\hat{H}_0$ и гамильтонианы $\hat{H}$, $\hat{H}^\dagger$ связаны неунитарным преобразованием η :

$$\hat{H}_0 = \eta\hat{H}\eta^{-1}, \quad \hat{H}_0 = \eta^{-1}\hat{H}^\dagger\eta. \quad (41)$$

Из (41) также следует

$$\eta_0\hat{H}\eta_0^{-1} = \hat{H}^\dagger, \quad (42)$$

где оператор $\eta_0 = e^{\alpha\gamma_5} = \eta^2$ определяет псевдоэрмитовы свойства гамильтониана. Следуя [3], можно определить оператор

$$\mathcal{C} = \eta_0^{-1}P = e^{-\alpha\gamma_5}\gamma_0. \quad (43)$$

Используя стандартное представление γ -матриц, можно представить оператор $\mathcal{C}$ в матричном виде:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & I\frac{m_1^\mp - m_2^\mp}{m} \\ I\frac{m_1^\mp + m_2^\mp}{m} & 0 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

где $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что оператор $\mathcal{C}$ в записи (43) или (44) имеет более простой вид и более удобен для использования, чем соответствующее выражение в работе [13], так как здесь он получен в простом явном виде, в то время как в [13] данный оператор был построен методом итераций и записан в интегральном представлении.

Нетрудно убедиться, что скалярное произведение, построенное с помощью $\mathcal{C}$ -оператора (44) стандартным способом [3], положительно определено. Действительно (см. [38], запишем произвольный вектор в модифицированной теории:

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} x + iy \\ u + iv \\ z + iw \\ t + ip \end{pmatrix}.$$

Используя представление (44) для оператора $\mathcal{C}$, нетрудно прямыми вычислениями убедиться, что норма вектора $\tilde{\psi}$ в рассматриваемой теории с модифицированным скалярным произведением дается выражением

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi} | \tilde{\psi} \rangle &= \frac{m_1 + m_2}{m}(x^2 + y^2) + \frac{m_1 + m_2}{m}(u^2 + v^2) + \\ &+ \frac{m_1 - m_2}{m}(z^2 + w^2) + \frac{m_1 - m_2}{m}(t^2 + p^2). \end{aligned} \quad (45)$$

Это выражение положительно определено в области (6) PT -симметрии рассматриваемой теории, т. е. при $m_1 \geq m_2$.

Нетрудно видеть также, что средние значения гамильтониана (35) в модифицированном скалярном произведении действительны. Запишем

$$\langle \bar{\psi} \mathcal{C} \hat{H} | \tilde{\psi} \rangle = \langle \bar{\psi} e^{-\alpha \gamma_5} \gamma_0 (\vec{\alpha} \vec{p} + \hat{\beta} m e^{\alpha \gamma_5}) \tilde{\psi} \rangle. \quad (46)$$

Выполнив эрмитово сопряжение и производя элементарные коммутации подобно (39), убеждаемся в действительности данного выражения.

Рассмотрим задачу о нахождении собственных значений и собственных векторов гамильтониана (17):

$$\hat{H} \tilde{\psi} = E \tilde{\psi}.$$

Используя стандартное представление γ -матриц, запишем $\hat{H}$ в матричном представлении:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & p_3 - m_2 & p_1 - ip_2 \\ 0 & m_1 & p_1 + ip_2 & -m_2 - p_3 \\ m_2 + p_3 & p_1 - ip_2 & -m_1 & 0 \\ p_1 + ip_2 & m_2 - p_3 & 0 & -m_1 \end{pmatrix},$$

где p_i – компоненты импульса. Условие

$$\det(\hat{H} - E) = (-E^2 + m_1^2 - m_2^2 + p_\perp^2 + p_3^2)^2 = 0$$

позволяет определить собственные значения E :

$$E = \pm \sqrt{m_1^2 - m_2^2 + p_\perp^2 + p_3^2}, \quad (47)$$

где $p_\perp = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ и $m_1^2 - m_2^2 = m^2$. Видно, что значения E совпадают с собственными значениями эрмитова оператора $\hat{H}_0$.

Рассмотрим волновую функцию, описывающую свободную частицу с определенными значениями энергии и импульса. Она может быть представлена в виде плоской волны:

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2E}} \tilde{u} e^{-ipx}. \quad (48)$$

Здесь амплитуда $\tilde{u}$ является биспинором и удовлетворяет алгебраическим уравнениям

$$\begin{aligned} (\gamma p - m e^{\gamma_5 \vartheta}) \tilde{u} &= 0, \\ \bar{\tilde{u}} (\gamma p - m e^{-\vartheta \gamma_5}) &= 0, \end{aligned} \quad (49)$$

где $\bar{\tilde{u}} = \tilde{u}^* \gamma_0$. Решения уравнений (49) можно представить в виде (см. [38])

$$\tilde{u} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} A_1 w \\ A_2 w \end{pmatrix}, \quad \bar{\tilde{u}} = \sqrt{2m} (A_1^* w^*, -A_2^* w^*), \quad (50)$$

где A_1, A_2 определяются выражениями

$$\begin{aligned} A_1 &= \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} + \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} (\mathbf{n} \vec{\sigma}), \\ A_2 &= \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} (\mathbf{n} \vec{\sigma}). \end{aligned}$$

Здесь $\text{ch } \alpha = m_1/m$, $\text{sh } \alpha = m_2/m$ и $\text{ch } \beta = E/m$, $\text{sh } \beta = p/m$, а w – двухкомпонентный спинор, удовлетворяющий уравнению

$$\vec{\sigma} \mathbf{n} w_\zeta = \zeta w_\zeta \quad (51)$$

и нормировочным соотношениям $w^* w = 1$. Напомним здесь и стандартные обозначения: $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули размерности 2×2 , $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$ – единичный вектор вдоль направления импульса.

Решая уравнение (51), имеем

$$w_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad w_{-1} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

где θ и φ – полярный и азимутальный углы, определяющие направление $\mathbf{n}$ в осях x_1 , x_2 , x_3 .

Непосредственным вычислением нетрудно проверить выполнение условия $\bar{u}\tilde{u} = 2m$. Этот результат вполне ожидаем, так как существует преобразование, связывающее биспинорные амплитуды модифицированных уравнений $\bar{u}$, $\tilde{u}$ и соответствующие решения обычных уравнений Дирака:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= e^{-\gamma_5 \alpha/2} u, \\ \bar{u} &= \bar{u} e^{\gamma_5 \alpha/2}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что дираковские биспиноры нормируются обычным соотношением $\bar{u}u = 2m$ (см. [39]), имеем

$$\bar{u}\tilde{u} = \bar{u}u = 2m. \quad (52)$$

В заключение заметим, что интересно увидеть, как в рассматриваемой алгебраической теории с γ_5 -расширением массы оператор $\mathcal{C}$ в форме (40) возникает естественным образом. Для этого запишем модифицированное уравнение Дирака и сопряженное ему в x -представлении:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - (m_1 + m_2 \gamma_5))\tilde{\psi} &= 0, \\ \bar{\tilde{\psi}}(i\gamma^\mu \partial_\mu + (m_1 - m_2 \gamma_5)) &= 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Переписывая их в виде

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m e^{\alpha \gamma_5})\tilde{\psi} &= 0, \\ \bar{\tilde{\psi}}(i\gamma^\mu \partial_\mu + m e^{-\alpha \gamma_5}) &= 0, \end{aligned} \quad (54)$$

умножая первое уравнение на $\bar{\tilde{\psi}}e^{-\alpha \gamma_5}$ слева, второе уравнение на $e^{\alpha \gamma_5}\tilde{\psi}$ справа и складывая, а также проводя элементарные коммутации, получаем стандартным способом закон непрерывности плотности тока:

$$\partial_\mu (\bar{\tilde{\psi}} e^{-\alpha \gamma_5} \gamma_\mu \tilde{\psi}) = 0. \quad (55)$$

В данном случае ток j_μ определяется формулой

$$j_\mu = \bar{\tilde{\psi}} e^{-\alpha \gamma_5} \gamma_\mu \tilde{\psi}. \quad (56)$$

Учитывая

$$\int_{V_\infty} \operatorname{div} \vec{j} dV = 0,$$

получаем сохранение во времени величины

$$\int_{V_\infty} j_0 dV \equiv \int_{V_\infty} \rho dV.$$

Используя преобразования, произведенные в [38], имеем

$$\int_{V_\infty} \rho dV = \int \bar{\psi} e^{-\alpha\gamma_5} \gamma_0 \tilde{\psi} dV = \int \bar{\psi} \eta_0^{-1} P \tilde{\psi} dV = \int \bar{\psi} \mathcal{C} \tilde{\psi} dV = 1.$$

Тем самым смысл амплитуды вероятности имеет величина $\bar{\psi} \mathcal{C} \tilde{\psi}$, и мы видим, что в скалярном произведении содержится оператор $\mathcal{C} = \eta_0^{-1} P$. Таким образом, в данном случае оператор $\mathcal{C}$, совпадающий с оператором (43), построенным в строгом соответствии с теориями [3], [1], возникает естественным образом.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог изложенному выше, отметим следующие важные моменты.

1. При развитии алгебраического подхода в исследовании модели (35) на вопрос, можно ли физическую частицу массы m описать с помощью гамильтониана (35) при использовании параметров m_1 и m_2 , следует положительный ответ: можно, если введен параметр $m_{\max}$. В этом случае при равенстве $m_{\max}$ и M описание частицы производится в соответствии с геометрической теорией с ограниченной массой, рассматриваемой на пространстве анти-де Ситтера. Связь этих двух теорий оказывается очевидной.

2. Введение параметра $m_{\max}$ позволяет включить в алгебраическом подходе описание “экзотических” частиц, появлявшихся ранее только в геометрической теории с ограниченной массой. Это еще раз указывает на связь этих двух теорий.

3. Введение параметра $m_{\max}$ позволяет также уточнить область PT -симметрии рассматриваемой модели, а именно детализировать ее в смысле выделения областей, соответствующих обычным и “экзотическим” частицам.

4. Так как гамильтониан (35) псевдоэрмитов, то необходимо ввести модифицированное скалярное произведение стандартным способом с помощью введения оператора $\mathcal{C}$. Мы получили его для данной модели в максимально простом виде. Была также наглядно продемонстрирована естественность возникновения оператора $\mathcal{C}$ в данной модели в указанном виде и приведен ряд следствий его введения.

5. Решена задача о нахождении собственных чисел рассматриваемого гамильтониана (т. е. значений энергии) и собственных векторов в виде плоских волн. Отмечено, что уровни энергии совпадают с дираковскими, а собственные векторы связаны с дираковскими неунитарным преобразованием.

Заметим, что если геометрическая теория с ограниченной массой развивается в пространстве де Ситтера, характеризуемом отрицательной кривизной, в котором выполняется соотношение

$$\vec{p}^2 - p_5^2 = -M^2, \quad (57)$$

то гамильтониан, описывающий фермионный сектор теории (в рамках квантовой механики), имеет вид

$$\hat{H} = \vec{\alpha}\vec{p} + \hat{\beta}(m_1 + im_2\gamma_5), \quad (58)$$

где $m_1 = 2M \operatorname{sh}(\mu/2)$, $m_2 = 2M \operatorname{sh}^2(\mu/2)$, и по-прежнему выполняется соотношение $m_1^2 = 2Mm_2$. Физическая масса m определяется в этом случае как $m^2 = m_1^2 + m_2^2$. Очевидно, гамильтониан (58) эрмитов. Так же очевидно, что в алгебраической теории не будет иметь место неравенство типа (19). Что касается геометрического подхода, развиваемого в пространстве де Ситтера, то нетрудно видеть, что гамильтониан (58) и стандартный дираковский гамильтониан связаны унитарным преобразованием

$$\tilde{\eta} = e^{i\alpha\gamma_5/2}$$

(см. также [40]). Подчеркнем, что в отличие от данного случая, рассматриваемая нами алгебраическая модель, иницируемая геометрической теорией в пространстве анти-де Ситтера, определяется неэрмитовым гамильтонианом. В изучаемом случае имеет место ограничение масс как в геометрическом подходе, так и в предлагаемой алгебраической модели.

Заметим также, что алгебраический подход допускает рассмотрение “смешанного” случая

$$\hat{H} = \vec{\alpha}\vec{p} + \hat{\beta}[m_1 + (m'_2 + im''_2)\gamma_5]. \quad (59)$$

Аналог этой модели в рамках геометрической теории с ограниченной массой неизвестен.

Благодарности. Авторы искренне благодарны А. А. Славнову за плодотворные дискуссии и многочисленные важные замечания. Авторы также признательны В. Г. Кадышевскому за многолетнее сотрудничество и ценные обсуждения ряда ключевых вопросов, затрагиваемых в статье.

Список литературы

- [1] C. M. Bender, S. Boettcher, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:24 (1998), 5243–5246, arXiv: physics/9712001.
- [2] C. M. Bender, S. Boettcher, P. N. Meisinger, *J. Math. Phys.*, **40**:5 (1999), 2201–2229, arXiv: quant-ph/9809072.
- [3] A. Mostafazadeh, *Internat. J. Geom. Meth. Modern Phys.*, **7**:7 (2010), 1191–1306, arXiv: 0810.5643.
- [4] A. Khare, B. P. Mandal, *Phys. Lett. A*, **272**:1–2 (2000), 53–56, arXiv: quant-ph/0006126.
- [5] G. Lévai, M. Znojil, *Modern Phys. Lett. A*, **16**:30 (2001), 2273, arXiv: hep-th/0111213.
- [6] A. Mostafazadeh, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**:29 (2005), 6557–6569; Erratum **38**:37 (2005), 8185.
- [7] C. M. Bender, D. C. Brody, J.-H. Chen, H. F. Jones, K. A. Milton, M. C. Ogilvie, *Phys. Rev. D*, **74**:2 (2006), 025016, 10 pp., arXiv: hep-th/0605066.
- [8] C. M. Bender, K. Besseghir, H. F. Jones, X. Yin, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:35 (2009), 355301, 10 pp., arXiv: 0906.1291.
- [9] A. Khare, B. P. Mandal, *Pramana J. of Physics*, **73**:2 (2009), 387–395.
- [10] P. Dorey, C. Dunning, R. Tateo, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**:28 (2001), 5679–5704, arXiv: hep-th/0103051.

- [11] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones, *Phys. Rev. D*, **70**:2 (2004), 025001, 19 pp., arXiv: hep-th/0402183; Erratum **71**:4 (2005), 049901, 1 pp.
- [12] C. M. Bender, S. F. Brandt, J.-H. Chen, Q. Wang, *Phys. Rev. D*, **71**:6 (2005), 065010, 7 pp., arXiv: hep-th/0412316.
- [13] C. M. Bender, H. F. Jones, R. J. Rivers, *Phys. Lett. B*, **625**:3–4 (2005), 333–340, arXiv: hep-th/0508105.
- [14] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones, *Phys. Rev. Lett.*, **89**:27 (2002), 270401, 4 pp.; Erratum **92**:11 (2004), 119902, 1 pp.
- [15] C. M. Bender, J. Brod, A. Refig, M. E. Reuter, *Phys. A: Math. Gen.*, **37**:43 (2004), 10139–10165, arXiv: quant-ph/0402026.
- [16] A. Mostafazadeh, *J. Math. Phys.*, **43**:1 (2002), 205–214, arXiv: math-ph/0107001; **43**:5 (2002), 2814–2816; **43**:8 (2002), 3944–3951.
- [17] A. Mostafazadeh, A. Batal, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:48 (2004), 11645–11679, arXiv: quant-ph/0408132.
- [18] A. Mostafazadeh, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **36**:25 (2003), 7081–7091, arXiv: quant-ph/0304080.
- [19] M. Mostafazadeh, *Class. Quantum Grav.*, **20**:1 (2003), 155–171, arXiv: math-ph/0209014.
- [20] M. Mostafazadeh, *Ann. Phys.*, **309**:1 (2004), 1–48, arXiv: gr-qc/0306003.
- [21] M. Mostafazadeh, F. Zamani, *Ann. Phys.*, **321**:9 (2006), 2183–2209, arXiv: quant-ph/0602151; 2210–2241, arXiv: quant-ph/0602161.
- [22] M. Mostafazadeh, *Internat. J. Modern Phys. A*, **21**:12 (2006), 2553–2572.
- [23] F. Zamani, M. Mostafazadeh, *J. Math. Phys.*, **50**:5 (2009), 052302, 35 pp., arXiv: 0805.1651.
- [24] V. G. Kadyshevsky, *Nucl. Phys. B*, **141**:4 (1978), 477–496; “Fundamental length hypothesis in a Gauge theory context”, *Proceedings of International Integrative Conference on Group Theory and Mathematical Physics* (Austin, Texas, September 11–16, 1978), *Lecture Notes in Physics*, **94**, eds. W. Beiglbock, A. Bohm, E. Takasugi, Springer, Berlin, 1979, 114–124; В. Г. Кадышевский, *ЭЧАЯ*, **11**:1 (1980), 5–39.
- [25] M. A. Markov, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, Extra Number (1965), 85–95; М. А. Марков, *ЖЭТФ*, **51**:3 (1967), 878–890.
- [26] V. G. Kadyshevsky, M. D. Mateev, V. N. Rodionov, A. S. Sorin, *Towards a maximal mass model*, arXiv: 0708.4205.
- [27] В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, В. Н. Родионов, А. С. Сорин, *Докл. РАН*, **408**:4 (2006), 465–468, arXiv: hep-ph/0512332.
- [28] В. Г. Кадышевский, *ЭЧАЯ*, **29**:3 (1998), 563–576.
- [29] V. G. Kadyshevsky, M. D. Mateev, *Phys. Lett. B*, **106**:1–2 (1981), 139–142.
- [30] V. G. Kadyshevsky, M. D. Mateev, *Nuovo Cimento A*, **87**:3 (1985), 324–349.
- [31] M. V. Chizhov, A. D. Donkov, V. G. Kadyshevsky, M. D. Mateev, *Nuovo Cimento A*, **87** (1985), 350–372.
- [32] M. V. Chizhov, A. D. Donkov, V. G. Kadyshevsky, M. D. Mateev, *Nuovo Cimento A*, **87**:4 (1985), 373–396.
- [33] V. G. Kadyshevsky, D. V. Fursaev, *JINR Rapid Commun.*, 1992, №6, 5–8.
- [34] Р. М. Ибадов, В. Г. Кадышевский, *О преобразованиях суперсимметрии в теории поля с фундаментальной массой*, препринт ОИЯИ Р2-86-835, ОИЯИ, Дубна, 1986.
- [35] В. Г. Кадышевский, Д. В. Фурсаев, *О киральных фермионных полях при высоких энергиях*, препринт ОИЯИ Р2-87-913, ОИЯИ, Дубна, 1987; *Докл. АН СССР*, **306**:4 (1989), 856–858.
- [36] V. G. Kadyshevsky, V. N. Rodionov, *Phys. Part. Nucl.*, **36**:1 (2005), S34–S37.

- [37] V. N. Rodionov, *PT-symmetric pseudo-Hermitian relativistic quantum mechanics with maximal mass*, [arXiv: 1207.5463](#).
- [38] V. N. Rodionov, *Exact solutions for non-Hermitian Dirac–Pauli equation in an intensive magnetic field*, [arXiv: 1406.0383](#).
- [39] И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Родионов, *Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1982.
- [40] И. П. Волобуев, В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, М. Р. Мир-Касимов, *ТМФ*, **40:3** (1979), 363–372.

Поступила в редакцию 23.06.2014