Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Соловьев, Звездочные произведения на линейных симплектических пространствах. Сходимость, представления, расширения, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 3, 568–596

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8745>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:48:29

© 2014 г.

М. А. Соловьев*

ЗВЕЗДОЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА ЛИНЕЙНЫХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ. СХОДИМОСТЬ, ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, РАСШИРЕНИЯ

Дан краткий обзор общей схемы деформационного квантования на линейных симплектических пространствах с анализом его функционально-аналитических аспектов. Различные звездочные произведения рассматриваются единым образом, с систематическим использованием подходящего пространства аналитических пробных функций, для которых абсолютно сходятся задающие произведения степенные ряды по параметру деформации. На более широкие функциональные классы звездочные произведения продолжаются по непрерывности. Единственность продолжения обеспечивают подходящие теоремы плотности. Доказана ядерность максимальной алгебры с абсолютно сходящимся звездочным произведением, состоящей из целых функций порядка не выше 2 и минимального типа. Получено интегральное представление для звездочного произведения, соответствующего s -упорядочению Кэжилла–Глаубера, которое при изменении s от 1 до -1 связывает непрерывным образом нормальное, симметричное и антинормальное упорядочения. Точно охарактеризованы расширения виковского и антивиковского соответствий, отвечающие известному расширению преобразования Вейля на обобщенные функции умеренного роста.

Ключевые слова: деформационное квантование, соответствие Вейля, виковские и антивиковские символы, алгебры со звездочным произведением, некоммутативная теория поля.

DOI: 10.4213/tmf8745

Посвящается 75-летию Андрея Алексеевича Славнова

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья содержит краткий обзор деформационного квантования на линейных симплектических пространствах и анализ его функционально-аналитических аспектов, важных для приложений к квантовой теории поля на некоммутативных пространствах. Для ознакомления с историей развития методов деформационного квантования и основных достижений последнего периода читателю можно рекомендовать

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: soloviev@lpi.ru

обзоры [1]–[3]. Эти достижения связаны в первую очередь с доказательством существования и с классификацией звездочных произведений на пуассоновых многообразиях общего вида. Однако в большинстве моделей некоммутативной теории поля используется давно и хорошо известное звездочное произведение Вейля–Мойала, лежащее в основе формулировки квантовой механики на плоском фазовом пространстве [4]. Звездочное произведение заменяет обычное поточечное произведение функций в лагранжианах некоммутативных моделей (см. [5] для введения в эту тематику). Оно нелокально по своей природе, и для физической интерпретации теории важно последовательно учитывать нелокальные эффекты. Существенными становятся условия сходимости формальных рядов, представляющих звездочное произведение, и выбор адекватного функционального класса, на котором следует строить некоммутативную теорию поля, поскольку имеются аргументы [6], что рамки распределений умеренного роста, используемых в обычной локальной квантовой теории поля [7], могут быть слишком узкими для этой цели. Кроме того, возникает вопрос об эквивалентности формулировок некоммутативной теории поля, использующих звездочные произведения Вейля–Мойала и Вика–Вороса, относительно которого в литературе нет единой точки зрения (см. [8]–[10]).

Пространство пробных функций Шварца S , сопряженное к которому составляют распределения умеренного роста, имеет структуру алгебры относительно произведения Вейля–Мойала, но не относительно произведения Вика. В работе [11] было определено пространство $\mathcal{S}^{1/2}$, являющееся максимальным подпространством S , для элементов которого представляющие произведение Вейля–Мойала ряды абсолютно сходятся, и в работе [12] показано, что $\mathcal{S}^{1/2}$ является алгеброй их относительно произведения Вика–Вороса. Там же показано, что быстроубывающие пробные функции из пространств $S^{1/2,b}$, пересечением которых при $b \rightarrow 0$ является $\mathcal{S}^{1/2}$, можно использовать для описания асимптотического поведения полевых коммутаторов в некоммутативных моделях и для формулировки условия причинности, заменяющего для них аксиому локальной коммутативности. В работе [13] такой подход был применен к активно изучаемым сейчас клино-локальным полям Гроссе–Лехнера [14], [15], интересным своими связями с интегрируемыми моделями. Хорошо известно, что произведение Вейля–Мойала можно распространить по дуальности на некоторые элементы пространства S' , сопряженного S . Эти элементы образуют алгебру мойаловских мультипликаторов для S , подробно охарактеризованную в работах [16]–[18]. В статьях [19]–[21] эта конструкция распространена на любое пространство типа S , инвариантное относительно преобразования Фурье, и получено расширение преобразования Вейля, дающее операторную реализацию соответствующих алгебр мультипликаторов.

В настоящей статье показано, что использование пространства $\mathcal{S}^{1/2}$ полезно при рассмотрении всех трансляционно-эквивариантных¹⁾ звездочных произведений на линейном симплектическом пространстве и дает единый, простой и строгий подход к различным способам квантования. На функциях из $\mathcal{S}^{1/2}$ формулы, понимаемые зачастую на эвристическом уровне, приобретают строгий математический смысл. На более широкие классы функций, включая распределения и ультрараспределения, звездочные произведения и соотношения между ними можно продолжить по

¹⁾Определение см. в разделе 2. В физической литературе вместо “эквивариантное” часто пишут “инвариантное”. Многие интересные звездочные произведения получаются из трансляционно-эквивариантных путем редукции (см. [17], [22]).

непрерывности, используя подходящие и, как правило, легко проверяемые теоремы о плотности. В ходе продолжения устанавливаются те границы, при которых оно возможно. Представления звездочных алгебр в гильбертовых пространствах также можно построить путем расширения с $\mathcal{S}^{1/2}$ исходя из заданного проективного унитарного представления группы трансляций. Пространство $\mathcal{S}^{1/2}$ состоит из целых аналитических функций и его можно определить в терминах как вещественных, так и комплексных переменных. Во втором случае мы предпочитаем использовать обозначение $\mathcal{W}^2$, и это представление удобнее для большинства доказательств. Мы всюду в статье стремимся подчеркнуть связь формул с исходной симплектической структурой и естественность конструкций. Поэтому, в частности, в основных определениях используется симплектическое преобразование Фурье. Однако в выкладках часто удобнее обычное преобразование Фурье. Простой переход от одних формул к другим указан ниже.

Статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит краткий очерк деформационного квантования на линейных симплектических пространствах без анализа вопросов сходимости, который выполнен в последующих разделах. Определено семейство трансляционно-эквивариантных звездочных произведений, полученных некоммутативной деформацией обычного произведения функций, и дано определение обобщенного соответствия Вейля, переводящего эти произведения в произведение операторов в гильбертовом пространстве. Звездочное произведение задается постоянной матрицей ϑ , антисимметричная часть которой однозначно определяется квантовым принципом соответствия, а выбор симметричной части конкретизирует тип упорядочения квантовых операторов, включая симметричное, стандартное, антистандартное, а также нормальное и антинормальное упорядочения. Показано, как осуществляется переход от дифференциальной формы звездочного произведения (в виде ряда по степеням параметра деформации ϑ) к его интегральному представлению. В разделе 3 вводится пространство аналитических пробных функций $\mathcal{W}^2 \approx \mathcal{S}^{1/2}$. Показано, что оно является топологической алгеброй относительно любого из рассматриваемых звездочных произведений, и указаны его линейные автоморфизмы, осуществляющие переход от одного произведения к другому. Параллельно рассматривается фурье-преобразованное пространство $\widehat{\mathcal{W}}^2 = \mathcal{W}_2$, которое является алгеброй относительно соответствующим образом деформированной свертки. В разделе 4 исследуется максимальная алгебра аналитических функций $\mathcal{E}^2$, для которой абсолютно сходятся задающие звездочные произведения степенные ряды по параметру некоммутативности²⁾. Доказано, что она имеет структуру ядерной алгебры Фреше, а мономы образуют безусловный базис Шаудера для векторного пространства $\mathcal{E}^2$. В разделе 5 рассматриваются виковское и антивиковское произведения, а также их обобщение, соответствующее s -упорядочению [23] операторов рождения и уничтожения. Получено интегральное представление для звездочного произведения, соответствующего s -упорядочению. В разделе 6 построены расширения виковского и антивиковского соответствий, отвечающие расширению [24], [25] исчисления вейлевских символов на распределения умеренного роста, и определены отображения, связывающие эти расширения. В заключительном разделе 7 кратко сказано о возможности дальнейшего расширения исчисления символов с использованием пространства $S_{1/2}^{1/2} \approx W_2^2$, которое является минимальным пространством типа S , инвариантным относительно преобразования Фурье.

²⁾Пространство $\mathcal{W}^2$ является пересечением $\mathcal{E}^2$ с пространством Шварца.

2. КВАНТОВАНИЕ НА ЛИНЕЙНЫХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть X – вещественное векторное пространство размерности $2n$, снабженное симплектической билинейной формой ω . Выбрав базис в X , мы отождествляем форму ω с ее матрицей Ω_{jk} и обозначаем через π^{jk} обратную матрицу. Скобка Пуассона двух функций на пространстве X записывается как

$$\{f, g\} = \sum_{j,k=1}^{2n} \pi^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial g}{\partial x^k}.$$

Лежащее в основе деформационного квантования звездочное произведение Вейля–Грёневольда–Мойала³⁾ $f \star g$ является некоммутативной деформацией обычного (поточечного) произведения $f(x)g(x)$ и определяется формулой

$$(f \star g)(x) = f(x) e^{(i\hbar/2) \overleftarrow{\partial}_j \pi^{jk} \overrightarrow{\partial}_k} g(x), \quad (1)$$

где постоянная Планка $\hbar$ играет роль параметра деформации. Здесь и ниже мы используем соглашение, что по повторяющимся индексам j, k должно быть произведено суммирование. Произведение (1), очевидно, трансляционно-эквивариантно, т.е. отображение $(f, g) \rightarrow f \star g$ коммутирует со сдвигами. Кроме того, оно симплектически эквивариантно. Иначе говоря, если τ – такое линейное преобразование пространства X , что $\omega(\tau x, \tau x') = \omega(x, x')$ и $f_\tau(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(\tau^{-1}x)$, то

$$(f \star g)_\tau = f_\tau \star g_\tau. \quad (2)$$

Заменяя $\pi/2$ в (1) постоянной матрицей θ более общего вида, можно получить другие трансляционно-эквивариантные звездочные произведения. Квантовый принцип соответствия требует, чтобы антисимметричная часть матрицы θ равнялась $\pi/2$. В этом и только в этом случае произведение

$$(f \star_{\hbar\theta} g)(x) = f(x) e^{i\hbar \overleftarrow{\partial}_j \theta^{jk} \overrightarrow{\partial}_k} g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\hbar)^m}{m!} (\theta^{jk} \partial_{x^j} \partial_{x'^k})^m f(x)g(x') \Big|_{x=x'} \quad (3)$$

удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} (f \star_{\hbar\theta} g - g \star_{\hbar\theta} f) = \{f, g\}.$$

Поэтому в дальнейшем мы считаем, что

$$\theta = \frac{1}{2} \pi + S, \quad \text{где } \pi = \Omega^{-1}, \quad S^{jk} = S^{j^k}. \quad (4)$$

Для краткости введем обозначение $\vartheta = \hbar\theta$ и будем писать $f \star_{\vartheta} g$ вместо $f \star_{\hbar\theta} g$. Различные выборы симметричной матрицы S соответствуют различным квантованиям, т.е. различным правилам сопоставления функциям на X квантовых операторов. В отличие от Ω , матрица S не обязана быть вещественной. Например, для

³⁾В некоммутативной теории поля это произведение обычно называют произведением Мойала и обозначают через $\star_M$, но всюду в этой статье оно обозначается через $\star$.

виковского и антивиковского квантований она является чисто мнимой (см. раздел 5). Представления алгебр функций со звездочным произведением (3) в гильбертовом пространстве H можно построить исходя из унитарного проективного представления T группы трансляций пространства X с мультипликатором $e^{i\omega/2\hbar}$, для которого соблюдается соотношение

$$T_x T_{x'} = e^{(i/2\hbar)\omega(x, x')} T_{x+x'}. \quad (5)$$

Вейлевское квантование сопоставляет функциям на пространстве X операторы в H по правилу

$$f \mapsto A(f) = \frac{1}{\hbar^{2n}} \iint f(x) e^{(i/\hbar)\omega(x, x')} T_{x'} d\mu(x) d\mu(x') = \int \tilde{f}(k) T_{\hbar k} d\mu(k), \quad (6)$$

где мера $d\mu$ задается симплектической формой ω , точнее, ее внешней n -й степенью, и где $\tilde{f}$ – симплектическое преобразование Фурье функции f , определяемое формулой

$$\tilde{f}(k) = \int f(x) e^{i\omega(x, k)} d\mu(x). \quad (7)$$

Отметим соотношение размерностей $[x] = [\hbar][k]$, существенное в физических приложениях. Мера $d\mu$ в (6), (7) трансляционно-инвариантна и поэтому совпадает с мерой Лебега $dx = dx^1 \cdots dx^{2n}$ на X с точностью до нормировочного коэффициента, который можно фиксировать условием инволютивности $\tilde{\tilde{f}} = f$, равносильным тому, что функция $f(x) \equiv 1$ при отображении (6) переходит в единичный оператор. Функция f , связанная с оператором $A(f)$ формулой (6), называется вейлевским символом этого оператора. Интеграл в (6) корректно определен, если функция $\tilde{f}$ интегрируема, в частности если f принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R}^{2n})$ гладких быстроубывающих функций. На более широкие классы символов соответствие (6) можно распространить с помощью методов теории обобщенных функций (см., например, [24], [25]). Произведение (1) при отображении (6) переходит в произведение операторов, и сама формула (1) (точнее, равносильный ей закон композиции для $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$) была получена фон Нейманом из анализа соответствия Вейля. В случае матрицы θ более общего вида (4) его следует заменить соответствием

$$f \mapsto A_\theta(f) = \int \tilde{f}(k) e^{(i\hbar/2)k \cdot \tilde{S}k} T_{\hbar k} d\mu(k), \quad (8)$$

где

$$k \cdot \tilde{S}k = k^i \tilde{S}_{ij} k^j, \quad \tilde{S} = \Omega^t S \Omega = -\Omega S \Omega. \quad (9)$$

Индекс t означает транспонирование.

Чтобы показать, что отображение (8) переводит функцию $f \star_\theta g$ в произведение операторов $A_\theta(f)A_\theta(g)$, мы фиксируем в X симплектический базис. Тогда матрица Ω имеет стандартный вид $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ и $d\mu(x) = (2\pi)^{-n} dx$. Ясно, что

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x) e^{ix \cdot \Omega k} dx = \hat{f}(-\Omega k), \quad (10)$$

где

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

– обычное преобразование Фурье. Обозначим через $\hat{f} \circledast_{\vartheta} \hat{g}$ деформированную свертку функций $\hat{f}$ и $\hat{g}$, определяемую формулой

$$\begin{aligned} (\hat{f} \circledast_{\vartheta} \hat{g})(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\xi - \xi') \hat{g}(\xi') e^{-i(\xi - \xi') \cdot \vartheta \xi'} d\xi' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\xi') \hat{g}(\xi - \xi') e^{-i\xi' \cdot \vartheta (\xi - \xi')} d\xi'. \end{aligned} \quad (11)$$

В случае вейлевского квантования, когда $\vartheta = \hbar\pi/2$ и $e^{-i\xi' \cdot \vartheta (\xi - \xi')} = e^{(i\hbar/2)\xi \cdot \pi \xi'}$ в силу антисимметричности π , выражение (11) называют скрученной сверткой, и тогда мы используем обозначение $\circledast$. Из определения (3) следует, что

$$\widehat{f \star_{\vartheta} g} = \hat{f} \circledast_{\vartheta} \hat{g}. \quad (12)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} f(x) e^{i\overleftarrow{\partial}_j \vartheta^{jk} \overrightarrow{\partial}_k} g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iint \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi') \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} (\vartheta^{jk} \partial_{x_j} \partial_{x'_k})^m e^{ix \cdot \xi + ix' \cdot \xi'} d\xi d\xi' \Big|_{x=x'} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iint \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi') e^{-i\xi \cdot \vartheta \xi' + ix \cdot (\xi + \xi')} d\xi d\xi' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int (\hat{f} \circledast_{\vartheta} \hat{g})(\xi'') e^{ix \cdot \xi''} d\xi''. \end{aligned} \quad (13)$$

Функциональные классы, для которых формулы данного раздела имеют строгий смысл, подробно охарактеризованы ниже, однако уже сейчас стоит отметить, что если $\hat{f}$ и $\hat{g}$ убывают на бесконечности быстрее, чем гауссова функция, то выполненные в (13) дифференцирование и суммирование под знаком интеграла оправданы стандартными теоремами анализа, причем и в случае комплексной матрицы ϑ . Используя (10), мы находим, что наряду с (12) справедлива формула

$$\widetilde{f \star_{\vartheta} g} = \tilde{f} \circledast_{\tilde{\vartheta}} \tilde{g}, \quad \text{где} \quad \tilde{\vartheta} = \hbar \tilde{\theta}, \quad \tilde{\theta} = \Omega^t \theta \Omega = \tilde{S} - \frac{1}{2} \Omega. \quad (14)$$

Из (5), (14) и определения (8) вытекает

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} \int (\widetilde{f \star_{\vartheta} g})(k) e^{(i\hbar/2)k \cdot \tilde{S}k} T_{\hbar k} dk &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iint \tilde{f}(k - k') \tilde{g}(k') e^{-i\hbar(k - k') \cdot \tilde{\theta} k' + (i\hbar/2)k \cdot \tilde{S}k} T_{\hbar k} dk dk' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iint \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{-i\hbar k \cdot \tilde{\theta} k' + (i\hbar/2)(k + k') \cdot \tilde{S}(k + k')} T_{\hbar(k + k')} dk dk' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iint \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{-i\hbar k \cdot (\tilde{\theta} - \tilde{S})k' + (i\hbar/2)k \cdot \tilde{S}k + (i\hbar/2)k' \cdot \tilde{S}k' - (i\hbar/2)k \cdot \Omega k'} T_{\hbar k} T_{\hbar k'} dk dk' = \\ &= A_{\vartheta}(f) A_{\vartheta}(g). \end{aligned}$$

Таким образом, $f \star_{\vartheta} g \mapsto A_{\vartheta}(f) A_{\vartheta}(g)$, что и требовалось доказать.

Симплектический фурье-образ символа оператора при квантовании (8) связан с симплектическим фурье-образом вейлевского символа этого же оператора очевидным соотношением

$$\tilde{f}_{\vartheta}(k)e^{(i\hbar/2)k\cdot\tilde{S}k} = \tilde{f}_{\text{Weyl}}(k).$$

Значит, $\hat{f}_{\vartheta}(\xi)e^{(i\hbar/2)\xi\cdot S\xi} = \hat{f}_{\text{Weyl}}(\xi)$ и, следовательно,

$$f_{\vartheta}(x) = e^{(i\hbar/2)S^{ij}\partial_i\partial_j} f_{\text{Weyl}}(x). \quad (15)$$

Звездочное произведение (3) можно представить также в интегральном виде. Если матрица ϑ вещественна, это представление имеет вид

$$\begin{aligned} (f \star_{\vartheta} g)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iint f(x - \vartheta\xi)g(x - x')e^{ix'\cdot\xi} dx' d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iint f(x - x')g(x - \vartheta^t\xi)e^{ix'\cdot\xi} dx' d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

В самом деле, применяя к (11) обратное преобразование Фурье, мы получаем

$$\begin{aligned} (f \star_{\vartheta} g)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int (\hat{f} \circledast_{\vartheta} \hat{g})(\xi)e^{ix\cdot\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iint \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi')e^{-i\xi\cdot\vartheta\xi' + ix\cdot(\xi+\xi')} d\xi d\xi' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x - \vartheta\xi')\hat{g}(\xi')e^{ix\cdot\xi'} d\xi' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\xi)g(x - \vartheta^t\xi)e^{ix\cdot\xi} d\xi, \end{aligned} \quad (17)$$

где изменение порядка интегрирования правомерно в силу теоремы Фубини, если функции $\hat{f}$ и $\hat{g}$ интегрируемы и достаточно быстро убывают на бесконечности, например, если они принадлежат пространству Шварца S . Подставляя в (17) явные выражения для $\hat{g}$ и $\hat{f}$, мы приходим к (16). В случае произведения Вейля–Мойала формула (16) принимает вид

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{(\pi\hbar)^{2n}} \iint f(x - x')g(x - x'')e^{-(2i/\hbar)\omega(x', x'')} dx' dx'', \quad (18)$$

и эта запись делает, в частности, очевидным свойство (2). В общем случае матрица ϑ может оказаться вырожденной, и тогда при интегрировании в (16) возникают дельта-функции, которые снижают кратность интеграла. Вывод интегрального представления для звездочного произведения с комплексной матрицей ϑ изложен в разделе 5. При этом, естественно, нужно предполагать, что функции допускают продолжение в комплексное пространство $\mathbb{C}^{2n}$.

Рассмотрим для примера квантование с $S = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Матрица $\tilde{S}$ имеет тот

же вид, но другой знак. Пусть p_j, q^j – координаты Дарбу, $x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $\omega(x, x') = p \cdot q' - q \cdot p'$, и пусть $T_{p,q}$ – стандартное проективное унитарное представление группы трансляций в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ квадратично-интегрируемых функций,

$$T_{p,q} = e^{(i/\hbar)(p \cdot Q - q \cdot P)} = e^{-(i/2\hbar)p \cdot q} e^{(i/\hbar)p \cdot Q} e^{-(i/\hbar)q \cdot P}, \quad (19)$$

где Q^j – оператор умножения на j -ю координату, $P_j = -i\hbar \partial_j$. Легко проверяется, что соотношение (5) выполнено. Пусть $k = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$, тогда $k \cdot \tilde{S}k = u \cdot v = u^j v_j$ и соответствие (8) принимает вид

$$\begin{aligned} f &\longmapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \iint \tilde{f}(u, v) e^{(i\hbar/2)u \cdot v + i(v \cdot Q - u \cdot P)} du dv = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \iint \tilde{f}(u, v) e^{iv \cdot Q} e^{-iu \cdot P} du dv, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\tilde{f}(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint f(p, q) e^{i(p \cdot u - q \cdot v)} dp dq.$$

Отображение (20), часто называемое соответствием Кона–Ниренберга [25], определяет qp -квантование, т.е. стандартное упорядочение операторов Q^j, P_j . Моном $q^\alpha p^\beta \stackrel{\text{def}}{=} (q^1)^{\alpha_1} \dots (q^n)^{\alpha_n} p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}$ при таком квантовании переходит в оператор $Q^\alpha P^\beta$, что ясно из формул

$$\begin{aligned} \widetilde{q^\alpha p^\beta} &= (2\pi)^n i^{|\alpha|} (-i)^{|\beta|} \partial^\alpha \delta(v) \partial^\beta \delta(u), \\ \partial_v^\beta \partial_u^\alpha e^{iv \cdot Q} e^{-iu \cdot P} &= i^{|\alpha|} (-i)^{|\beta|} Q^\alpha e^{iv \cdot Q} P^\beta e^{-iu \cdot P}, \end{aligned}$$

где использованы обычные мультииндексные обозначения

$$\partial^\alpha = \partial_{v_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{v_n}^{\alpha_n}, \quad \partial_{v_j}^{\alpha_j} = \partial^{\alpha_j} / \partial v_j^{\alpha_j}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, т.е. всевозможных наборов n неотрицательных целых чисел, в дальнейшем будет обозначаться через $\mathbb{Z}_+^n$. Строгое определение оператора, формально задаваемого посредством (20), для f из пространства распределений S' дано в [25] (см. также раздел 6 ниже). В рассматриваемом случае $\theta = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det \theta = 0$, и формула (16) в подробной записи с $\xi = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}$ принимает вид

$$\begin{aligned} (f \star_\theta g)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iiint f(p + \hbar \eta, q) g(p - p', q - q') e^{ip' \cdot \zeta + iq' \cdot \eta} dp' dq' d\zeta d\eta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \iint f(p + \hbar \eta, q) g(p, q - q') e^{iq' \cdot \eta} dq' d\eta = \\ &= \frac{1}{(2\pi \hbar)^n} \iint f(p', q) g(p, q') e^{-(i/\hbar)(p - p') \cdot (q - q')} dp' dq', \end{aligned}$$

что выражает хорошо известный закон композиции для qp -символов. Аналогичным образом легко убедиться, что матрица $S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ задает pq -квантование, т.е. антистандартное упорядочение операторов Q_j^i, P_j . Стоит упомянуть также квантование, задаваемое матрицей $S = \frac{t}{2} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, где $t \in \mathbb{R}$. Соответствующее звездочное произведение записывается как

$$(f \star_t g)(p, q) = f(p, q) e^{(i\hbar/2)[(t+1)\overleftarrow{\partial}_q \cdot \overrightarrow{\partial}_p + (t-1)\overleftarrow{\partial}_p \cdot \overrightarrow{\partial}_q]} g(p, q). \quad (21)$$

При изменении вещественного параметра t от -1 до 0 мы непрерывным образом переходим от стандартного к симметричному упорядочению, а при дальнейшем изменении t от 0 до $+1$ — от симметричного к антистандартному упорядочению.

Отметим, что одними из первых работ, развивающих унифицирующий подход к различным правилам упорядочения квантовых операторов, были статьи [23], [26]. Формулировке квантовой механики на фазовом пространстве со звездочным произведением общего вида посвящен недавний обзор [27].

3. ПОДХОДЯЩИЕ ПРОБНЫЕ ФУНКЦИИ

При построении общей схемы квантования на линейных симплектических пространствах полезно наряду с пробными функциями из пространства Шварца, адекватного вейлевскому квантованию, или вместо них использовать функции, для которых интегралы в формуле (11) корректно определены при любой комплексной матрице ϑ .

Обозначим через $\mathscr{W}_2(\mathbb{R}^n)$ пространство гладких функций g на $\mathbb{R}^n$, для которых конечна каждая из норм

$$\|g\|_{N,a} = \max_{|\alpha| \leq N} \sup_{\xi} |\partial^\alpha g(\xi)| e^{a|\xi|^2}, \quad a > 0, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

где $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^n \xi_j^2$. Это пространство принадлежит классу пространств $K(M_p)$, теория которых развита в [28]. В данном случае $M_p(\xi) = e^{p|\xi|^2}$, $p = 0, 1, 2, \dots$. Используемое нами обозначение мотивировано тем, что по запасу функций $\mathscr{W}_2$ близко пространству W_2 из класса пространств типа W , рассматривавшегося в [29], но не совпадает с ним. Пространство $\mathscr{W}_2$ является пересечением нормированных пространств $W_{2,N,a}$ с нормами (22), тогда как $W_2 = \bigcup_{a \rightarrow 0} \bigcap_N W_{2,N,a}$. Топологические свойства $\mathscr{W}_2$ похожи на свойства пространства Шварца S и столь же удобны для приложений. Оно принадлежит классу ядерных пространств Фреше, для которого принята аббревиатура FN, и является, в частности, монтелевским и рефлексивным. Хорошо известно, что S является алгеброй относительно скрученной свертки, определяемой вещественной антисимметричной матрицей. Относительно $\mathscr{W}_2$ справедливо более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой комплексной матрицы ϑ пространство $\mathscr{W}_2(\mathbb{R}^{2n})$ является ассоциативной топологической алгеброй относительно деформированной свертки, определяемой формулой (11).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_1, g_2 \in \mathcal{W}_2$ и $|\operatorname{Im} \vartheta| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|\xi|=|\xi'|=1} |\xi \cdot \operatorname{Im} \vartheta \xi'|$. Считая, что $2a \geq |\operatorname{Im} \vartheta|$ и $|\alpha| \leq N$, производные функции $g_1 \circledast_{\vartheta} g_2$ можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha (g_1 \circledast_{\vartheta} g_2)(\xi)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\beta} \binom{\alpha}{\beta} \int |\partial_{\xi}^{\alpha-\beta} g_1(\xi - \xi')| |g_2(\xi')| \partial_{\xi}^{\beta} e^{-i(\xi-\xi') \cdot \vartheta \xi'} d\xi' \leq \\ &\leq C_{\vartheta, N} \|g_1\|_{N, 3a} \|g_2\|_{0, 4a} \int e^{-3a|\xi-\xi'|^2 - 4a|\xi'|^2} (1 + |\xi'|)^N e^{|\operatorname{Im} \vartheta| |\xi-\xi'| |\xi'|} d\xi' \leq \\ &\leq C_{\vartheta, N} \|g_1\|_{N, 3a} \|g_2\|_{0, 4a} \int e^{-2a|\xi-\xi'|^2 - 3a|\xi'|^2} (1 + |\xi'|)^N d\xi' \leq \\ &\leq C'_{\vartheta, N} \|g_1\|_{N, 3a} \|g_2\|_{0, 4a} e^{-a|\xi|^2}, \end{aligned}$$

где

$$C'_{\vartheta, N} = C_{\vartheta, N} \int e^{-a|\xi'|^2} (1 + |\xi'|)^N d\xi'.$$

Поскольку a можно взять сколь угодно большим, мы заключаем, что $g_1 \circledast_{\vartheta} g_2 \in \mathcal{W}_2$, причем билинейное отображение $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 \circledast_{\vartheta} g_2$ из $\mathcal{W}_2 \times \mathcal{W}_2$ в $\mathcal{W}_2$ совместно непрерывно. Легко видеть, что эта бинарная операция ассоциативна. В самом деле, используя теорему Фубини и билинейность формы $\xi \cdot \vartheta \xi'$, мы получаем

$$\begin{aligned} ((g_1 \circledast_{\vartheta} g_2) \circledast_{\vartheta} g_3)(\xi) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int \left\{ \int g_1(\xi - \xi' - \xi'') g_2(\xi') e^{-i(\xi-\xi'-\xi'') \cdot \vartheta \xi'} d\xi' \right\} g_3(\xi'') e^{-i(\xi-\xi'') \cdot \vartheta \xi''} d\xi'' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iint g_1(\xi - \xi') g_2(\xi' - \xi'') g_3(\xi'') e^{-i(\xi-\xi') \cdot \vartheta (\xi' - \xi'') - i(\xi-\xi'') \cdot \vartheta \xi''} d\xi' d\xi'' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int g_1(\xi - \xi') \left\{ \int g_2(\xi' - \xi'') g_3(\xi'') e^{-i(\xi' - \xi'') \cdot \vartheta \xi''} d\xi'' \right\} e^{-i(\xi-\xi') \cdot \vartheta \xi'} d\xi' = \\ &= (g_1 \circledast_{\vartheta} (g_2 \circledast_{\vartheta} g_3))(\xi). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЛЕММА 1. Преобразование Лапласа

$$g \rightarrow f(x + iy) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{i(x+iy) \cdot \xi} g(\xi) d\xi$$

изоморфно отображает $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n)$ на пространство $\mathcal{W}^2(\mathbb{C}^n)$ целых аналитических функций, удовлетворяющих условию

$$|x^\alpha f(x + iy)| \leq C_{\alpha, \varepsilon} e^{\varepsilon |y|^2} \quad \text{при всех } \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \text{ и любом } \varepsilon > 0. \quad (23)$$

Более того, оно взаимно непрерывно, если топологию $\mathcal{W}^2$ задать системой норм

$$\|f\|_{N, \varepsilon} = \max_{|\alpha| \leq N} \sup_{x, y} |x^\alpha f(x + iy)| e^{-\varepsilon |y|^2}, \quad \varepsilon > 0, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что преобразование Лапласа любой функции $g \in \mathscr{W}_2$ определено и аналитично во всем пространстве $\mathbb{C}^n$. Если $|\alpha| \leq N$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |x^\alpha f(x + iy)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |e^{i(x+iy)\cdot\xi} \partial^\alpha g(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|g\|_{N,a} \int e^{-y\cdot\xi - a|\xi|^2} d\xi \leq C_a \|g\|_{N,a} e^{|y|^2/4a}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|f\|_{N,\varepsilon} \leq C_a \|g\|_{N,a}$ при $\varepsilon \geq 1/4a$. Обратно, пусть f — целая функция со свойством (23). Тогда интеграл

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i(x+iy)\xi} f(x + iy) dx$$

не зависит от y . Обозначая его через $g(\xi)$ и считая, что $|\alpha| \leq N$, мы получаем

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha g(\xi)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \inf_y \int e^{y\cdot\xi} |(x + iy)^\alpha f(x + iy)| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \inf_y \int e^{y\cdot\xi} (1 + |y|)^N (1 + |x|)^N |f(x + iy)| dx. \end{aligned}$$

Используя неравенство

$$(1 + |x|)^N \leq C_N \max_{|\alpha| \leq N} |x^\alpha|, \quad (25)$$

эту оценку можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha g(\xi)| &\leq C'_N \|f\|_{N+n+1,\varepsilon} \inf_y e^{y\cdot\xi + \varepsilon|y|^2} (1 + |y|)^N \int \frac{dx}{(1 + |x|)^{(n+1)}} \leq \\ &\leq C''_{N,\varepsilon} \|f\|_{N+d+1,\varepsilon} e^{-|\xi|^2/4\varepsilon'}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon' > \varepsilon$ и сколь угодно близко к ε . Значит, $g \in \mathscr{W}_2$ и обратное отображение $f \rightarrow g$ непрерывно в указанной топологии. Лемма доказана.

Функции из $\mathscr{W}^2(\mathbb{C}^n)$ однозначно определяются своими ограничениями на $\mathbb{R}^n$, и определение этого пространства можно переформулировать в терминах функций вещественных переменных.

ЛЕММА 2. Пространство $\mathscr{W}^2(\mathbb{C}^n)$ канонически изоморфно пространству $\mathscr{S}^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ гладких функций на $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$(1 + |x|)^N |\partial^\beta f(x)| \leq C_{N,b} b^{|\beta|} (\beta!)^{1/2} \quad \text{при всех } \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \quad b > 0, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

а система норм (24) эквивалентна системе

$$\|f\|'_{N,b} = \sup_{x,\beta} \frac{(1 + |x|)^N |\partial^\beta f(x)|}{b^{|\beta|} (\beta!)^{1/2}}. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложение функции $f \in \mathscr{S}^{1/2}$ в ряд Тейлора в точке $x \in \mathbb{R}^n$ имеет бесконечный радиус сходимости и определяет аналитическое продолжение

$f(x + iy)$, удовлетворяющее условию (23). Действительно, используя неравенство $\beta! \geq \beta^\beta / e^{|\beta|}$ и взяв $b' > b$, мы получаем

$$\begin{aligned} \max_{|\alpha| \leq N} |x^\alpha f(x + iy)| &\leq (1 + |x|)^N \sum_{\beta} \frac{|y^\beta|}{\beta!} |\partial^\beta f(x)| \leq \|f\|'_{N,b} \sum_{\beta} \frac{b^{|\beta|} |y^\beta|}{\sqrt{\beta!}} \leq \\ &\leq \|f\|'_{N,b} \sup_{\beta} \frac{(b' \sqrt{e})^{|\beta|} |y^\beta|}{\sqrt{\beta^\beta}} \sum_{\beta} \left(\frac{b}{b'}\right)^{|\beta|} \leq \\ &\leq C_{b,b'} \|f\|'_{N,b} e^{b'y|^2/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|f\|_{N,\varepsilon} \leq C_{\varepsilon,b} \|f\|'_{N,b}$ при $b < \sqrt{2\varepsilon}$.

Обратно, пусть f – целая функция, удовлетворяющая условию (23). Тогда в силу (25) мы имеем

$$(1 + |x|)^N |f(x + iy)| \leq C_N \|f\|_{N,\varepsilon} e^{\varepsilon|y|^2}. \quad (28)$$

Пусть $D_r = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| \leq r_j, j = 1, \dots, n\}$. Из неравенства Коши и (28) следует, что

$$\begin{aligned} (1 + |x|)^N |\partial^\beta f(x)| &\leq (1 + |x|)^N \frac{\beta!}{r^\beta} \sup_{z \in D_r} |f(x + z)| \leq \\ &\leq \frac{\beta!}{r^\beta} \sup_{z \in D_r} |(1 + |\operatorname{Re} z|)^N (1 + |x + \operatorname{Re} z|)^N f(x + z)| \leq \\ &\leq C_N \|f\|_{N,\varepsilon} \frac{\beta!}{r^\beta} \sup_{z \in D_r} (1 + |z|)^N e^{\varepsilon|\operatorname{Im} z|^2} \leq C_{N,\varepsilon'} \|f\|_{N,\varepsilon} \frac{\beta!}{r^\beta} e^{\varepsilon'|r|^2} \end{aligned}$$

при любом $r = (r_1, \dots, r_n)$ и любом $\varepsilon' > \varepsilon$. Взяв нижнюю грань по r , мы получаем

$$(1 + |x|)^N |\partial^\beta f(x)| \leq C_{N,\varepsilon'} \|f\|_{N,\varepsilon} (2\varepsilon'e)^{|\beta|/2} \frac{\beta!}{\sqrt{\beta^\beta}}. \quad (29)$$

По формуле Стирлинга $\beta! \leq C_\delta (1 + \delta)^{|\beta|} e^{-|\beta|} \beta^\beta$ при сколь угодно малом $\delta > 0$ и, значит, $f|_{\mathbb{R}^n} \in \mathcal{S}^{1/2}$ и $\|f|_{\mathbb{R}^n}\|'_{N,b} \leq C'_{N,b} \|f\|_{N,\varepsilon}$ при $b > \sqrt{2\varepsilon}$, что завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 2. Для любой комплексной матрицы ϑ пространство $\mathcal{W}^2(\mathbb{C}^{2n}) = \mathcal{S}^{1/2}(\mathbb{R}^{2n})$ является ассоциативной топологической алгеброй относительно звездочного произведения $\star_\vartheta$ и задающий это произведение ряд абсолютно сходится в $\mathcal{W}^2$. Преобразование Фурье является топологическим изоморфизмом алгебр $(\mathcal{W}^2, \star_\vartheta)$ и $(\mathcal{W}_2, \otimes_\vartheta)$.

Первая часть теоремы 2 доказана в работе [11]. Для удобства читателя воспроизведем доказательство в используемых нами обозначениях. Произведение $(f_1 \star_\vartheta f_2)(x)$ получается применением оператора $e^{i\vartheta^{jk} \partial_j \otimes \partial_k}$ к функции $(f_1 \otimes f_2)(x, x')$ и последующим сужением на диагональ $x = x'$. Из определения $\mathcal{W}^2$ ясно, что отображение $(f_1, f_2) \rightarrow f_1 \otimes f_2$ непрерывно из $\mathcal{W}^2(\mathbb{C}^{2n}) \times \mathcal{W}^2(\mathbb{C}^{2n})$ в $\mathcal{W}^2(\mathbb{C}^{4n})$, а оператор сужения на диагональ непрерывен из $\mathcal{W}^2(\mathbb{C}^{4n})$ в $\mathcal{W}^2(\mathbb{C}^{2n})$. Покажем, что оператор $e^{i\vartheta^{jk} \partial_j \otimes \partial_k}$ корректно определен и непрерывен в $\mathcal{S}^{1/2}(\mathbb{R}^{4n}) = \mathcal{W}^2(\mathbb{C}^{4n})$. Запишем его в виде

$$e^{i\vartheta^{jk} \partial_j \otimes \partial_k} = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_+^{4n}} c_\beta \partial^\beta. \quad (30)$$

Ясно, что

$$|e^{i\vartheta^{jk} z_j z'_k}| \leq e^{|\vartheta|(|z|^2 + |z'|^2)/2}, \quad z, z' \in \mathbb{C}^{2n}.$$

Согласно теории целых функций из этой оценки следует, что коэффициенты c_β в правой части (30) удовлетворяют неравенству

$$|c_\beta| \leq C \frac{(|\vartheta|e)^{|\beta|/2}}{\sqrt{\beta^\beta}}. \quad (31)$$

Это доказывается тем же способом, что и формула (29), с помощью неравенства Коши. Пусть $f \in \mathcal{S}^{1/2}(\mathbb{R}^{4n})$ и $x = (x, x')$. Используя (27) и (31), мы получаем

$$\begin{aligned} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha (c_\beta \partial^\beta f)(x)| &\leq \|f\|'_{b,N} |c_\beta| b^{|\alpha+\beta|} \sqrt{(\alpha + \beta)!} \leq \\ &\leq C \|f\|'_{b,N} (b\sqrt{2})^{|\alpha+\beta|} (|\vartheta|e)^{|\beta|/2} \sqrt{\frac{\alpha! \beta!}{\beta^\beta}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|c_\beta \partial^\beta f\|'_{b',N} \leq C \|f\|'_{b,N} (b\sqrt{2}|\vartheta|e)^{|\beta|} \sqrt{\frac{\beta!}{\beta^\beta}}, \quad b' \geq b\sqrt{2}.$$

Используя формулу Стирлинга и взяв $b < 1/\sqrt{2|\vartheta|}$, мы заключаем, что

$$\sum_\beta \|c_\beta \partial^\beta f\|'_{b',N} \leq C' \|f\|'_{b,N}.$$

Тем самым показано, что ряд $\sum_\beta c_\beta \partial^\beta f$ абсолютно сходится в полном пространстве $\mathcal{S}^{1/2} = \mathcal{W}^2$ и его сумма непрерывно зависит от f . Поэтому абсолютно сходится и ряд, определяющий произведение $f_1 \star_\vartheta f_2$, и отображение $(f_1, f_2) \rightarrow f_1 \star_\vartheta f_2$ непрерывно из $\mathcal{W}^2(\mathbb{C}^{2n}) \times \mathcal{W}^2(\mathbb{C}^{2n})$ в $\mathcal{W}^2(\mathbb{C}^{2n})$. Ассоциативность этой билинейной операции очевидна из теоремы 1. В силу классических теорем анализа ряд, полученный преобразованием Фурье, поточечно сходится к $\hat{f}_1 \otimes_\vartheta \hat{f}_2 \in \mathcal{W}_2$, что уже было отмечено выше в связи с формулой (13), а в силу леммы 1 этот ряд сходится к тому же пределу по топологии $\mathcal{W}_2$, которая сильнее топологии простой сходимости. Значит, $(\mathcal{W}^2, \star_\vartheta)$ является ассоциативной топологической алгеброй, изоморфной алгебре $(\mathcal{W}_2, \otimes_\vartheta)$.

Звездочное произведение, определяемое матрицей θ вида (4), и произведение Вейля–Мойала (1) связаны в $\mathcal{W}^2$ простым образом. Чтобы охарактеризовать эту связь, сначала отметим следующее.

ЛЕММА 3. Для любой комплексной квадратичной формы $Q(\xi)$ функция $e^{iQ(\xi)}$ является мультипликатором пространства $\mathcal{W}_2$ относительно поточечного умножения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любых N, a и $\epsilon > 0$ справедлива оценка

$$\max_{\alpha \leq N} |\partial^\alpha (e^{iQ(\xi)} g(\xi))| \leq C_{N,Q,\epsilon} \|g\|_{N,a} e^{(|\operatorname{Im} Q| + \epsilon)|\xi|^2} e^{-a|\xi|^2},$$

где $|\operatorname{Im} Q| = \sup_{|\xi|=1} |\operatorname{Im} Q(\xi)|$. Поэтому $\|e^{iQ} g\|_{N,a'} \leq C_{N,Q,a'} \|g\|_{N,a}$ при $a > a' + |\operatorname{Im} Q|$, и мы заключаем, что умножение на $e^{iQ(\xi)}$ есть непрерывный автоморфизм пространства $\mathcal{W}_2$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть, как и прежде, $\theta = \pi/2 + S$, $\vartheta = \hbar\theta$, и пусть $Q(\xi) = \xi \cdot S\xi$. Отображение $g \rightarrow g \cdot e^{(i\hbar/2)Q}$ является топологическим изоморфизмом алгебры $(\mathscr{W}_2, \otimes_\vartheta)$ на алгебру $(\mathscr{W}_2, \otimes)$, а оператор $e^{(i\hbar/2)S^{jk}\partial_j\partial_k}$ изоморфно отображает алгебру $(\mathscr{W}^2, \star_\vartheta)$ на алгебру $(\mathscr{W}^2, \star)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3 функция $e^{(i\hbar/2)Q(\xi)}$ является поточечным мультипликатором для $\mathscr{W}_2$. Из определения (11), симметричности матрицы S и антисимметричности матрицы π немедленно следует, что при всех $g_1, g_2 \in \mathscr{W}_2$

$$\begin{aligned} e^{(i\hbar/2)Q}(g_1 \otimes_\vartheta g_2) &= \frac{1}{(2\pi)^n} e^{(i\hbar/2)\xi \cdot S\xi} \int g_1(\xi - \xi') g_2(\xi') e^{-i\hbar(\xi - \xi') \cdot (\pi/2 + S)\xi'} d\xi' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{(i\hbar/2)(\xi - \xi') \cdot S(\xi - \xi')} g_1(\xi - \xi') e^{(i\hbar/2)\xi' \cdot S\xi'} g_2(\xi') e^{-(i\hbar/2)\xi \cdot \pi\xi'} d\xi' = \\ &= (e^{(i\hbar/2)Q} g_1) \otimes (e^{(i\hbar/2)Q} g_2). \end{aligned}$$

Сделаем обратное преобразование Фурье и используя (12), мы получаем

$$e^{-(i\hbar/2)S^{jk}\partial_j\partial_k}(f_1 \star_\vartheta f_2) = (e^{-(i\hbar/2)S^{jk}\partial_j\partial_k} f_1) \star (e^{-(i\hbar/2)S^{jk}\partial_j\partial_k} f_2), \quad f_1, f_2 \in \mathscr{W}^2, \quad (32)$$

что завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 1. Звездочные произведения в $\mathscr{W}^2$, определяемые матрицами $\theta_1 = \pi/2 + S_1$ и $\theta_2 = \pi/2 + S_2$, связаны алгебраическим изоморфизмом

$$e^{(i\hbar/2)(S_2 - S_1)^{jk}\partial_j\partial_k}(f_1 \star_{\vartheta_1} f_2) = (e^{(i\hbar/2)(S_2 - S_1)^{jk}\partial_j\partial_k} f_1) \star_{\vartheta_2} (e^{(i\hbar/2)(S_2 - S_1)^{jk}\partial_j\partial_k} f_2). \quad (33)$$

4. МАКСИМАЛЬНАЯ АЛГЕБРА СО СХОДЯЩИМСЯ ЗВЕЗДОЧНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Теоремы 1–3 показывают, что для функций из $\mathscr{W}^2$ все формулы раздела 2 имеют ясный и строгий смысл. В оставшейся части статьи обсуждается их распространение на более широкие классы символов. Чтобы получить максимальную алгебру со сходящимся звездочным произведением, надо отбросить входящее в формулу (23) ограничение на поведение функций на вещественной бесконечности.

Обозначим через $\mathcal{E}^2(\mathbb{C}^n)$ пространство целых аналитических функций на $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|z|^2}, \quad (34)$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало и $|z|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2$. Естественная топология на $\mathcal{E}_2$ задается семейством норм

$$\|f\|_\varepsilon = \sup_z |f(z)| e^{-\varepsilon|z|^2}. \quad (35)$$

Эта топология метризуема, и из элементарных свойств аналитических функций нескольких комплексных переменных (см., например, [30], раздел II.2.2) следует, что пространство $\mathcal{E}^2$ является полным, т. е. является пространством Фреше. Ясно, что оно имеет структуру коммутативной топологической алгебры относительно обычного поточечного произведения, поскольку

$$\|fg\|_{2\varepsilon} \leq \|f\|_\varepsilon \|g\|_\varepsilon. \quad (36)$$

Как и в случае пространства $\mathscr{W}^2$, говоря о звездочном произведении функций из $\mathcal{E}^2(\mathbb{C}^{2n})$, мы имеем в виду звездочное произведение их ограничений на $\mathbb{R}^{2n}$, которыми эти функции однозначно определяются. В теореме 4 ниже дано простое доказательство того, что поточечное произведение может быть деформировано в $\mathcal{E}^2(\mathbb{C}^{2n})$ в звездочное произведение (3). Некоммутативные алгебры $(\mathcal{E}^\rho, \star)$ с произведением Вейля–Мойала, состоящие из целых функций порядка не выше, чем ρ , и минимального типа (т. е. функций, удовлетворяющих условию типа (34), но с $|z|^\rho$ вместо $|z|^2$ в экспоненте), изучались ранее в [31], [32]. В работе [33] показано, что при условии $\rho \leq 2$ пространства $\mathcal{E}^\rho$ являются алгебрами относительно любого звездочного произведения вида (3), и построены их представления в гильбертовых пространствах. Пространство $\mathcal{E}^2$ играет в этой шкале пространств выделенную роль, поскольку является наибольшим пространством, для которого сходится любое звездочное произведение. Сходимость виковского звездочного произведения анализировалась также в работе [34], но построенная там алгебра Фреше $\mathcal{A}_{p,\hbar}$ не максимальна⁴). В этом разделе мы докажем некоторые дополнительные полезные свойства алгебр $(\mathcal{E}^2, \star_\vartheta)$.

ЛЕММА 4. *Пространство $\mathcal{E}^2(\mathbb{C}^n)$ является ядерным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементы $\mathcal{E}^2$ полностью определяются последовательностью своих производных в любой заданной точке, и соответствие

$$f \leftrightarrow s_\beta(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^\beta f(0)}{\sqrt{\beta!}} \quad (37)$$

отождествляет это пространство с пространством последовательностей $\mathbf{s} = \{s_\beta\}_{\beta \in \mathbb{Z}_+^n}$ комплексных чисел таких, что

$$\|\mathbf{s}\|_L \stackrel{\text{def}}{=} \sup_\beta |L^{|\beta|} s_\beta| < \infty \quad \text{при любом } L > 0. \quad (38)$$

Действительно, пусть $f \in \mathcal{E}^2$. Согласно неравенству Коши

$$|\partial^\beta f(0)| \leq \frac{\beta!}{r^\beta} \sup_{z \in D_r} |f(z)| \leq \frac{\beta!}{r^\beta} \|f\|_\varepsilon e^{\varepsilon|r|^2} \quad \text{при любом } r = r_1, \dots, r_n.$$

Взяв нижнюю грань по r , мы получаем

$$|\partial^\beta f(0)| \leq \|f\|_\varepsilon (2e\varepsilon)^{|\beta|/2} \frac{\beta!}{\sqrt{\beta^\beta}}. \quad (39)$$

Отсюда и из формулы Стирлинга следует, что

$$\|\mathbf{s}(f)\|_L = \sup_\beta \frac{L^{|\beta|} |\partial^\beta f(0)|}{\sqrt{\beta!}} \leq C_{\varepsilon,L} \|f\|_\varepsilon \quad \text{при } L < \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}. \quad (40)$$

⁴)Предложенная в [34] конструкция не дает явного описания элементов алгебры, но из пункта (vi) предложения 3.3 в [34] следует, в частности, что $\mathcal{A}_{p,\hbar} \subset \mathcal{E}^\rho$ при любом $\rho > 4/3$.

Обратно, пусть $\mathbf{s} = \{s_\beta\}$ – последовательность, удовлетворяющая условию (38), и пусть $f(z) = \sum_\beta s_\beta z^\beta / \beta!$. Взяв $L' < L$ и используя неравенство $\beta! \geq \beta^\beta / e^{|\beta|}$, мы получаем

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \|\mathbf{s}\|_L \sum_\beta \frac{|z^\beta|}{L^{|\beta|} \sqrt{\beta!}} \leq \\ &\leq \|\mathbf{s}\|_L \sup_\beta \frac{|z^\beta| e^{|\beta|/2}}{L^{|\beta|} \sqrt{\beta^\beta}} \sum_\beta \left(\frac{L'}{L}\right)^{|\beta|} \leq C_{L'} \|\mathbf{s}\|_L e^{|z|/L'^2/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|f\|_\varepsilon \leq C'_{\varepsilon,L} \|\mathbf{s}\|_L$ при $L > 1/\sqrt{2\varepsilon}$, и тем самым соответствие (37) является топологическим изоморфизмом. В свою очередь, система норм (38) эквивалентна системе, определяемой скалярными произведениями

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{s}' \rangle_L = \sum_\beta L^{2|\beta|} \bar{s}_\beta s'_\beta. \quad (41)$$

В самом деле, при любых $L < L'$ мы имеем

$$\|\mathbf{s}\|_L^2 \leq \langle \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle_L \leq \|\mathbf{s}\|_{L'}^2 \sum_\beta \left(\frac{L}{L'}\right)^{2|\beta|}.$$

Таким образом, $\mathcal{E}^2$ изоморфно проективному пределу гильбертовых пространств H_L со скалярным произведением (41). Пусть $e^\kappa_\beta = L^{-|\beta|} \delta^\kappa_\beta$, где δ^κ_β – символ Кронекера. Последовательности $\mathbf{e}^\kappa = \{e^\kappa_\beta\}$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+^n$, образуют ортонормированный базис в H_L , и для всякого $L' < L$ мы имеем

$$\sum_\kappa \langle \mathbf{e}^\kappa, \mathbf{e}^\kappa \rangle_{L'} = \sum_\kappa (L'/L)^{2|\kappa|} < +\infty.$$

Следовательно, каноническое вложение $H_L \rightarrow H_{L'}$ есть отображение Гильберта–Шмидта, а композиция $H_L \rightarrow H_{L'} \rightarrow H_{L''}$ является ядерным отображением при любых $L'' < L' < L$. Это означает, что пространство $\mathcal{E}^2$ ядерно. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пространство $\mathcal{E}^2$ является монтелевским, и, в частности, оно рефлексивно и сепарабельно. Любой безусловно сходящийся ряд в $\mathcal{E}^2$ сходится абсолютно.

Согласно теории топологических векторных пространств [35] любое ядерное пространство Фреше обладает перечисленными свойствами.

ЛЕММА 5. Мономы z^β , $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, образуют безусловный базис Шаудера в $\mathcal{E}^2(\mathbb{C}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \mathcal{E}^2$ и $\varepsilon' > \varepsilon$. Из определения (35) и неравенства (39) следует

$$\left\| \sum_{|\beta| \leq N} \frac{z^\beta}{\beta!} \partial^\beta f(0) \right\|_{\varepsilon'} \leq \|f\|_\varepsilon \sum_\beta \frac{(2e\varepsilon)^{|\beta|/2}}{\sqrt{\beta^\beta}} \sup_z |z^\beta| e^{-\varepsilon'|z|^2} = \|f\|_\varepsilon \sum_\beta \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^{|\beta|/2}.$$

Мы видим, что последовательность частичных сумм разложения функции f в ряд Тейлора ограничена в пространстве $\mathcal{E}^2$. Поскольку оно является монтелевским, из

этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, пределом которой служит f , так как топология $\mathcal{E}^2$ сильнее топологии простой сходимости. По этой же причине других предельных точек у последовательности частичных сумм нет, т. е. ряд Тейлора безусловно сходится в пространстве $\mathcal{E}^2$. Таким образом, мономы z^β составляют в нем безусловный базис. Коэффициенты разложения по этому базису являются непрерывными линейными функционалами, поскольку операция дифференцирования непрерывна в $\mathcal{E}^2$. Значит, он является базисом Шаудера. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пространство $\mathcal{W}^2(\mathbb{C}^n)$ плотно в $\mathcal{E}^2(\mathbb{C}^n)$.*

Достаточно показать, что каждый полином $P(z)$ можно сколь угодно точно приблизить функциями из $\mathcal{W}^2$ по топологии $\mathcal{E}^2$. Пусть f – любая функция из $\mathcal{W}^2$ со свойством $f(0) = 1$. Последовательность $P(z)f(z/m)$, $m = 1, 2, \dots$, ограничена по каждой норме (35) и сходится к $P(z)$ в каждой точке z . Поскольку $\mathcal{E}^2$ – монтелиевское пространство, отсюда вытекает, что эта последовательность сходится к $P(z)$ по его топологии.

ТЕОРЕМА 4. *Пространство $\mathcal{E}^2(\mathbb{C}^n)$ имеет структуру ядерной алгебры Фреше с единицей относительно любого звездочного произведения вида (3), и задающий это произведение ряд абсолютно сходится в $\mathcal{E}^2(\mathbb{C}^n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор (30) определен и непрерывен в $\mathcal{E}^2$, а применение его к функции $f \in \mathcal{E}^2$ дает абсолютно сходящийся ряд, сумма которого непрерывна по f . Это доказывается так же, как аналогичное утверждение для $\mathcal{W}^2$, с помощью неравенства (31) и неравенства

$$|\partial^\beta f(z)| \leq \|f\|_\varepsilon (4e\varepsilon)^{|\beta|/2} \frac{\beta!}{\sqrt{\beta^\beta}} e^{2\varepsilon|z|^2},$$

которое наряду с (39) справедливо для всех элементов $\mathcal{E}^2$. Ясно также, что отображение $(f_1, f_2) \rightarrow f_1 \otimes f_2$ непрерывно из $\mathcal{E}^2(\mathbb{C}^{2n}) \times \mathcal{E}^2(\mathbb{C}^{2n})$ в $\mathcal{E}^2(\mathbb{C}^{4n})$, а оператор сужения на диагональ непрерывен из $\mathcal{E}^2(\mathbb{C}^{4n})$ в $\mathcal{E}^2(\mathbb{C}^{2n})$. Поэтому абсолютно сходится и ряд, определяющий произведение $f_1 \star_\vartheta f_2$, и отображение $(f_1, f_2) \rightarrow f_1 \star_\vartheta f_2$ непрерывно из $\mathcal{E}^2(\mathbb{C}^{2n}) \times \mathcal{E}^2(\mathbb{C}^{2n})$ в $\mathcal{E}^2(\mathbb{C}^{2n})$. Поскольку $\mathcal{W}^2$ плотно в $\mathcal{E}^2$, ассоциативность этой билинейной операции в $\mathcal{E}^2$ следует по непрерывности из ее ассоциативности в $\mathcal{W}^2$. Ясно, что единицей алгебры $(\mathcal{E}^2, \star_\vartheta)$ служит функция, тождественно равная единице. Теорема доказана.

Если $\rho > 2$, пространство $\mathcal{E}^\rho$ содержит все функции вида $e^{iQ(z)}$, где Q – квадратичная форма, но оно не является алгеброй относительно звездочного произведения (1), как показывает следующее простое предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Не существует ни одной алгебры со сходящимся произведением Вейля–Мойала (1), которая содержала бы все функции вида $e^{iQ(x)}$, где Q – вещественная квадратичная форма.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай двумерного фазового пространства X и указать две функции, звездочное произведение которых расходится

в начале координат. Возьмем функции $e^{(2i/\hbar)apq}$ и $e^{(2i/\hbar)bpq}$, где a и b – действительные числа. Мы имеем

$$\begin{aligned} e^{(i\hbar/2)(\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})} e^{(2i/\hbar)(apq + bp'q')} &= \\ &= e^{(i\hbar/2)\partial_q \partial_{p'}} e^{(2i/\hbar)(apq + bp'q' + abp'q)} = \\ &= \sum_m \frac{(-1)^m}{m!} \partial_q^m [(bq' + abq)^m e^{(2i/\hbar)(apq + bp'q' + abp'q)}]. \end{aligned} \quad (42)$$

При $q = q' = 0$ этот ряд принимает вид $\sum_m (-ab)^m$ и расходится, если $|ab| \geq 1$. Предложение доказано.

Полагая в (42) $a = b = 1$, мы видим также, что не существует ни одной алгебры со сходящимся произведением Вейля–Мойала, которая содержала бы все целые функции порядка не выше 2 и типа не выше $1/\hbar$. В этом можно убедиться и другим способом. Как отмечено в работе [31], функция $(1 - e^{(2i/\hbar)pq})/q$ является формальным правым обратным элементом для q относительно произведения Вейля–Мойала, а функция $(1 - e^{-(2i/\hbar)pq})/q$ – его левым обратным элементом. Если эти функции принадлежат одной алгебре, то в силу условия ассоциативности они должны совпадать, и мы приходим к противоречию. Тем не менее имеются алгебры со звездочным произведением, которые содержат почти все функции вида $e^{iQ(x)}$, – это хорошо известная алгебра [16], [18] мойаловских мультипликаторов для пространства Шварца S и аналогичные алгебры для инвариантных относительно преобразования Фурье пространств типа S (см. [19], [21]). В частности, все эти алгебры содержат функции $e^{(2i/\hbar)apq}$ с любым $a \neq \pm 1$. Произведение таких функций можно вычислить с помощью интегральной формулы (18), из которой при $ab \neq -1$ следует

$$\begin{aligned} e^{(2i/\hbar)apq} \star e^{(2i/\hbar)bpq} &= \\ &= \frac{1}{(\pi\hbar)^2} \iiint e^{(2i/\hbar)[a(p-p')(q-q') + b(p-p'')(q-q'') - (p'q'' - q'p'')] dp' dp'' dq' dq'' = \\ &= \frac{4}{\hbar^2} \iint e^{(2i/\hbar)[ap(q-q') + bp(q-q'')] } \delta\left(\frac{2}{\hbar}(a(q-q') + q'')\right) \times \\ &\quad \times \delta\left(\frac{2}{\hbar}(b(q-q'') - q')\right) dq' dq'' = \\ &= \frac{1}{|1 + ab|} e^{(2i/\hbar) \cdot (a+b)/(1+ab)pq}. \end{aligned} \quad (43)$$

При $b = -1/a \neq \pm 1$ мы получаем

$$\begin{aligned} e^{(2i/\hbar)apq} \star e^{-(2i/\hbar)(pq/a)} &= \frac{2}{\hbar|a|} \int e^{(2i/\hbar)[-pq'' - p(q-q'')/a]} \delta\left(\frac{2}{\hbar}\left(1 + \frac{1}{a}\right)q\right) dq'' = \\ &= \frac{\pi\hbar|a|}{|1 - a^2|} \delta(p)\delta(q). \end{aligned} \quad (44)$$

Легко проверить, что результат этого вычисления согласуется с определением [16] произведения двух мойаловских мультипликаторов μ_1, μ_2 по дуальности

$$(\mu_1 \star \mu_2, f) = (\mu_1, \mu_2 \star f) = (\mu_2, f \star \mu_1),$$

где f – произвольная функция из пространства Шварца S , а скобка означает спаривание элементов S и сопряженного пространства S' . Формулы (43) и (44) согласуются также с тем, что преобразование Вейля переводит функцию $f_a(p, q) = e^{(2i/\hbar)apq}$, где $a \neq \pm 1$, в ограниченный оператор (см. [25] или [21])

$$A_{f_a}: \psi(q) \rightarrow \frac{1}{|1-a|} \psi\left(\frac{1+a}{1-a}q\right).$$

Функциям $f_a(p, q) = e^{\pm(2i/\hbar)pq}$ не соответствуют никакие операторы с плотной областью определения в L^2 , но существует естественное расширение соответствия Вейля (изложенное ниже в разделе 6), при котором они отображаются в операторы из S в S' .

5. ВИКОВСКОЕ И АНТИВИКОВСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Как и в разделе 2, мы считаем, что в линейном симплектическом пространстве $(X \approx \mathbb{R}^{2n}, \omega)$ выбран симплектический базис. Пусть матрица S в (4) имеет вид $S = -(i/2)I_{2n}$. Тогда $\tilde{S} = S$ и $k \cdot \tilde{S}k = -(i/2)k^2$, где $k^2 = \sum_{j=1}^{2n} (k^j)^2$. Как и прежде, полагаем $k = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$. Соответствие (8) принимает вид

$$f \mapsto \int \tilde{f}(k) e^{\hbar k^2/4} T_{\hbar k} d\mu(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \tilde{f}(u, v) e^{\hbar(u^2+v^2)/4} e^{iv \cdot Q - u \cdot P} du dv. \quad (45)$$

Чтобы стал ясен смысл соответствия (45), надо перейти к комплексным координатам⁵⁾

$$z^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(q^j + ip_j), \quad \bar{z}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(q^j - ip_j), \quad (46)$$

в которых симплектическая форма ω записывается как

$$\omega(z, z') = \frac{1}{i}(z \cdot \bar{z}' - \bar{z} \cdot z').$$

Тогда вместо (7) мы имеем

$$\tilde{f}(w, \bar{w}) = \int f(z, \bar{z}) e^{z \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot w} d\mu(z), \quad (47)$$

где $w = (u + iv)/\sqrt{2}$ и $d\mu(z) = (2\pi i)^{-n} dz \wedge d\bar{z} = \pi^{-n} d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z)$. Вводя обычным образом операторы рождения и уничтожения

$$a_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^j - iP_j), \quad a^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^j + iP_j), \quad (48)$$

мы можем представить оператор (19) как

$$T_z = e^{(1/\hbar)(za^\dagger - \bar{z}a)} = e^{-(1/2\hbar)z \cdot \bar{z}} e^{(1/\hbar)za^\dagger} e^{-(1/\hbar)\bar{z}a}. \quad (49)$$

⁵⁾Мы считаем, что p и q имеют одинаковую физическую размерность, что достигается подходящей заменой переменных. Отметим еще, что z и w в (47) имеют взаимно обратные размерности.

Квадратичная форма $k \cdot \tilde{S}k$ в комплексных координатах записывается как $-i w \cdot \bar{w}$, и соответствие (45) принимает вид

$$f \longmapsto \int \tilde{f}(w, \bar{w}) e^{(\hbar/2)w \cdot \bar{w}} T_{\hbar w} d\mu(w) = \int \tilde{f}(w, \bar{w}) e^{wa^\dagger} e^{-\bar{w}a} d\mu(w). \quad (50)$$

Таким образом, в этом случае мы имеем виновское квантование, т. е. нормальное упорядочение операторов рождения и уничтожения, при котором моном $\bar{z}^\alpha z^\beta$ переходит в оператор $(a^\dagger)^\alpha a^\beta$. Подставляя $\theta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -iI_n & -I_n \\ I_n & -iI_n \end{pmatrix}$ в (3), мы получаем виновское звездочное произведение

$$(f \star_W g)(z, \bar{z}) = f(z, \bar{z}) e^{\hbar \overrightarrow{\partial_z} \cdot \overrightarrow{\partial_{\bar{z}}}} g(z, \bar{z}), \quad (51)$$

где в соответствии с (46)

$$\overrightarrow{\partial_{z_j}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\overrightarrow{\partial_{q_j}} - i \overrightarrow{\partial_{p_j}}), \quad \overrightarrow{\partial_{\bar{z}_j}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\overrightarrow{\partial_{q_j}} + i \overrightarrow{\partial_{p_j}}).$$

Выведем теперь интегральную формулу для этого звездочного произведения, предполагая, что $f, g \in \mathscr{W}^2$. В данном случае $\tilde{\vartheta} = \vartheta$ и деформированная свертка $\tilde{f} \circledast_W \tilde{g}$ записывается как

$$(\tilde{f} \circledast_W \tilde{g})(w, \bar{w}) = \int \tilde{f}(w - w', \bar{w} - \bar{w}') \tilde{g}(w', \bar{w}') e^{-\hbar(\bar{w} - \bar{w}') \cdot w'} d\mu(w'). \quad (52)$$

Совершив симплектическое преобразование Фурье, мы получаем

$$\begin{aligned} (f \star_W g)(z, \bar{z}) &= \int \tilde{f}(w, \bar{w}) \tilde{g}(w', \bar{w}') e^{-\hbar \bar{w} \cdot w' + (w + w') \cdot \bar{z} - (\bar{w} + \bar{w}') \cdot z} d\mu(w) d\mu(w') = \\ &= \int f(z + \hbar w', \bar{z}) \tilde{g}(w', \bar{w}') e^{w' \cdot \bar{z} - \bar{w}' \cdot z} d\mu(w'). \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь и далее существенно, что функции $f(z, \bar{z})$ и $g(z, \bar{z})$ голоморфны и определены при любых $z \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{z} \in \mathbb{C}^n$, рассматриваемых как независимые переменные. Теперь воспользуемся известным (см., например, [25], [36]) тождеством

$$f(z) = \frac{1}{\hbar^n} \int f(z') e^{(1/\hbar)(z - z') \cdot \bar{z}'} d\mu(z'), \quad (54)$$

которое легко проверяется для $f(z) = z^\alpha$ и в силу леммы 3 справедливо для любой функции $f \in \mathcal{E}^2$. Применяя (54) к функции $f(z + \hbar w', \bar{z})$, рассматриваемой как функция от w' при фиксированном z , мы получаем

$$\begin{aligned} (f \star_W g)(z, \bar{z}) &= \frac{1}{\hbar^n} \iint f(z + z', \bar{z}) e^{(1/\hbar)(\hbar w' - z') \cdot \bar{z}'} \tilde{g}(w', \bar{w}') e^{w' \cdot \bar{z} - \bar{w}' \cdot z} d\mu(w') d\mu(z') = \\ &= \frac{1}{\hbar^n} \int f(z + z', \bar{z}) g(z, \bar{z} + \bar{z}') e^{-(1/\hbar)z' \cdot \bar{z}'} d\mu(z') = \\ &= \frac{1}{\hbar^n} \int f(z', \bar{z}) g(z, \bar{z}') e^{-(1/\hbar)(z - z') \cdot (\bar{z} - \bar{z}')} d\mu(z'), \end{aligned} \quad (55)$$

что воспроизводит известный закон композиции для виковских символов в интегральной форме. Хотя при выводе предполагалось, что $f, g \in \mathscr{W}^2$, последний интеграл хорошо определен для любых функций из $\mathcal{E}^2$, в частности для полиномов. Подчеркнем, что закон композиции (55) выражается не через функции на вещественном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, а через их аналитические продолжения в $\mathbb{C}^{2n}$. Формула (15) в случае виковских символов принимает вид

$$f_{\text{Wick}} = e^{(\hbar/4)\Delta} f_{\text{Weyl}}, \quad \Delta = \sum_{j=1}^{2n} \partial_{x^j}^2 = \Delta_q + \Delta_p, \quad (56)$$

и для функций из $\mathscr{W}^2$ равносильна соотношению

$$f_{\text{Wick}}(x) = \frac{1}{(\pi\hbar)^n} \int f_{\text{Weyl}}(x') e^{-(1/\hbar)(x-x')^2} dx'. \quad (57)$$

В координатах (46) лапласиан записывается как $\Delta = 2 \partial_z \cdot \partial_{\bar{z}}$, и (57) принимает вид

$$f_{\text{Wick}}(z, \bar{z}) = \left(\frac{2}{\hbar}\right)^n \int f_{\text{Weyl}}(z', \bar{z}') e^{-(2/\hbar)(z-z') \cdot (\bar{z}-\bar{z}')} d\mu(z'). \quad (58)$$

Формулы (56)–(58) хорошо определены и равносильны для функций из пространства $\mathcal{E}^2$, поскольку оператор $e^{(\hbar/4)\Delta}$, как и оператор (30), является его автоморфизмом (см. теорему 1 в [33]) и $\mathscr{W}^2$ плотно в нем согласно следствию 1.

Пусть теперь $S = (i/2)I$. Тогда соответствие (8) превращается в отображение

$$f \longmapsto \int \tilde{f}(w, \bar{w}) e^{-(\hbar/2)w \cdot \bar{w}} T_{\hbar w} d\mu(w) = \int \tilde{f}(w, \bar{w}) e^{-\bar{w}a} e^{wa^\dagger} d\mu(w), \quad (59)$$

что определяет антивиковское квантование и антинормальное упорядочение, при котором моном $\bar{z}^\alpha z^\beta$ переходит в $a^\beta (a^\dagger)^\alpha$. Соответствующее звездочное произведение имеет вид

$$(f \star_{\text{AW}} g)(z, \bar{z}) = f(z, \bar{z}) e^{-\hbar \overleftarrow{\partial}_{\bar{z}} \cdot \overrightarrow{\partial}_z} g(z, \bar{z}). \quad (60)$$

Ясно, что связь антивиковских символов с вейлевскими выражается формулой

$$f_{\text{Weyl}} = e^{(\hbar/4)\Delta} f_{\text{AW}}, \quad (61)$$

или, что для функций из $\mathcal{E}^2$ то же самое,

$$f_{\text{Weyl}}(z, \bar{z}) = \left(\frac{2}{\hbar}\right)^n \int f_{\text{AW}}(z', \bar{z}') e^{-(2/\hbar)(z-z') \cdot (\bar{z}-\bar{z}')} d\mu(z'). \quad (62)$$

Наиболее часто виковское и антивиковское соответствия рассматривают, используя представление канонических коммутационных соотношений в пространстве Фока–Баргмана $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, состоящем из целых аналитических функций от переменной $\bar{z}$ и снабженном скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{\hbar^n} \int \overline{\varphi(\bar{z})} \psi(\bar{z}) e^{-(1/\hbar)z \cdot \bar{z}} d\mu(z). \quad (63)$$

Переход от представления группы трансляций (19) в L^2 к представлению в $\mathcal{F}^2$ осуществляется преобразованием Баргмана

$$\psi(q) \longrightarrow (\mathcal{B}\psi)(\bar{z}) \stackrel{\text{def}}{=} (\pi\hbar)^{-n/4} e^{(1/2\hbar)\bar{z}^2} \int e^{-(1/2\hbar)(\sqrt{2}\bar{z}-q)^2} \psi(q) dq, \quad (64)$$

которое является унитарным изоморфизмом из L^2 в $\mathcal{F}^2$ (см. [25], [36]). При реализации в пространстве $\mathcal{F}^2$ оператором рождения $\mathcal{B}a^\dagger \mathcal{B}^{-1}$ служит оператор умножения на $\bar{z}$ и оператором уничтожения является $\hbar \partial_{\bar{z}}$. При этом виновское соответствие (50) принимает вид

$$f \longmapsto \int \tilde{f}(w, \bar{w}) e^{w\bar{z}} e^{-\hbar\bar{w}\partial_{\bar{z}}} d\mu(w), \quad (65)$$

а антивиновское соответствие (59) записывается как

$$f \longmapsto \int \tilde{f}(w, \bar{w}) e^{-\hbar\bar{w}\partial_{\bar{z}}} e^{w\bar{z}} d\mu(w). \quad (66)$$

Отметим, что формула (54), а точнее, аналогичная формула для переменной $\bar{z}$, означает, что функция $e^{(1/\hbar)z\bar{z}'}$ играет роль дельта-функции в пространстве Фока–Баргмана при интегрировании по мере $\hbar^{-n} e^{-(1/\hbar)|z'|^2} d\mu(z')$.

Рассмотрим еще квантование, задаваемое матрицей $S = -(i/2)sI$, $s \in \mathbb{R}$, которое соответствует так называемому s -упорядочению операторов, введенному в работе [23]. Нормальное, симметричное (вейлевское) и антинормальное упорядочения отвечают значениям параметра $s = +1, 0, -1$ соответственно. В этом случае

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\partial}_j \theta^{jk} \overrightarrow{\partial}_k &= \frac{1}{2} [-is \overleftarrow{\partial}_p \cdot \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \cdot \overrightarrow{\partial}_q + \overleftarrow{\partial}_q \cdot \overrightarrow{\partial}_p - is \overleftarrow{\partial}_q \cdot \overrightarrow{\partial}_q] = \\ &= -\frac{i}{2} [(s+1) \overleftarrow{\partial}_{\bar{z}} \cdot \overrightarrow{\partial}_{\bar{z}} + (s-1) \overleftarrow{\partial}_{\bar{z}} \cdot \overrightarrow{\partial}_z], \end{aligned} \quad (67)$$

и звездочное произведение записывается как

$$(f \star_s g)(z, \bar{z}) = f(z, \bar{z}) e^{(\hbar/2)[(s+1)\overleftarrow{\partial}_{\bar{z}} \cdot \overrightarrow{\partial}_{\bar{z}} + (s-1)\overleftarrow{\partial}_{\bar{z}} \cdot \overrightarrow{\partial}_z]} g(z, \bar{z}). \quad (68)$$

При выводе интегральной формы этого звездочного произведения снова исходим из формулы для деформированной свертки, которая в данном случае имеет следующий вид:

$$(\tilde{f} \oplus_s \tilde{g})(w, \bar{w}) = \int \tilde{f}(w-w', \bar{w}-\bar{w}') \tilde{g}(w', \bar{w}') e^{-(\hbar/2)[(s+1)(\bar{w}-\bar{w}') \cdot w' + (s-1)(w-w') \cdot \bar{w}']} d\mu(w').$$

Произведя симплектическое преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} (f \star_s g)(z, \bar{z}) &= \iint \tilde{f}(w, \bar{w}) \tilde{g}(w', \bar{w}') \times \\ &\quad \times e^{-(\hbar/2)[(s+1)\bar{w} \cdot w' + (s-1)w \cdot \bar{w}'] + (w+w') \cdot \bar{z} - (\bar{w}+\bar{w}') \cdot z} d\mu(w) d\mu(w') = \\ &= \int f\left(z + \frac{\hbar}{2}(s+1)w', \bar{z} - \frac{\hbar}{2}(s-1)\bar{w}'\right) \tilde{g}(w', \bar{w}') e^{w' \cdot \bar{z} - \bar{w}' \cdot z} d\mu(w') = \\ &= \iint f\left(z + \frac{\hbar}{2}(s+1)w', \bar{z} - \frac{\hbar}{2}(s-1)\bar{w}'\right) \times \\ &\quad \times g(z', \bar{z}') e^{w' \cdot (\bar{z}-\bar{z}') - \bar{w}' \cdot (z-z')} d\mu(z') d\mu(w'). \end{aligned} \quad (69)$$

При $s = 0$ последний интеграл совпадает с правой частью (18) и не является абсолютно сходящимся в случае полиномов. Однако изложенный вывод показывает, что для любых функций $f, g \in \mathcal{E}^2$ его можно понимать как повторный интеграл, где сначала производится интегрирование по z' . Это возвращает к предыдущему интегралу в (69), где $\tilde{g}$, в свою очередь, можно понимать как обобщенную функцию из $(\mathcal{E}^2)'$. Применяя, как и выше, воспроизводящую формулу, но только по обоим переменным голоморфной функции f , мы получаем еще одно представление

$$(f \star_s g)(z, \bar{z}) = \frac{1}{\hbar^{2n}} \iint f(z + z', \bar{z} + \bar{z}'') g\left(z + \frac{1}{2}(s-1)z'', \bar{z} + \frac{1}{2}(s+1)\bar{z}'\right) \times \\ \times e^{-(1/\hbar)(z' \cdot \bar{z}' + z'' \cdot \bar{z}'')} d\mu(z') d\mu(z''), \quad (70)$$

где интеграл абсолютно сходится для любых $f, g \in \mathcal{E}^2$. Отметим, что звездочное произведение $f \star_s g$ эквивариантно относительно унитарных преобразований, сохраняющих эрмитово скалярное произведение $z \cdot \bar{z}'$.

6. РАСШИРЕНИЕ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УМЕРЕННОГО РОСТА

Снова рассмотрим представление (19) группы трансляций в гильбертовом пространстве L^2 , скалярное произведение в котором обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$, считая его линейным по второму аргументу. Расширение [24], [25] соответствия Вейля (6) на распределения умеренного роста основано на том факте, что матричный элемент $\langle \varphi, T_{\hbar k} \psi \rangle$, рассматриваемый как функция $k = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$, наследует свойства гладкости и убывания функций φ, ψ , если обе они принадлежат пространству Шварца $S(\mathbb{R}^n)$. В подробной записи он имеет вид

$$\langle \varphi, T_{\hbar k} \psi \rangle = \langle \varphi, e^{i(v \cdot P - u \cdot Q)} \psi \rangle = e^{-(i\hbar/2)u \cdot v} \int \varphi^*(q) e^{iv \cdot q} \psi(q - \hbar u) dq. \quad (71)$$

Функция $\varphi^* \otimes \psi$, очевидно, принадлежит $S(\mathbb{R}^{2n})$, линейные преобразования координат и частичное преобразование Фурье являются автоморфизмами этого пространства, а функция $e^{-(i\hbar/2)u \cdot v}$ является его мультипликатором относительно поточечного умножения. Значит, $\langle \varphi, T_{\hbar k} \psi \rangle \in S(\mathbb{R}^{2n})$. Поэтому для любого распределения $F \in S'(\mathbb{R}^{2n})$ и любых $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ корректно определено выражение

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int \tilde{F}(k) \langle \varphi, T_{\hbar s} \psi \rangle dk, \quad (72)$$

если его понимать как значение распределения $\tilde{F}$ на функции $(2\pi)^{-n} \langle \varphi, T_{\hbar k} \psi \rangle$. В том случае, когда F – регулярное распределение, порожаемое функцией $f \in S$, выражение (72) есть в точности матричный элемент $\langle \varphi, A(f) \psi \rangle$ оператора $A(f)$, сопоставляемого этой функции посредством (6). При фиксированном $F \in S'(\mathbb{R}^{2n})$ зависимость выражения (72) от φ^* и ψ линейна и непрерывна. Тем самым каждое распределение F порождает непрерывный оператор $\mathbf{A}_F$ из $S(\mathbb{R}^n)$ в $S'(\mathbb{R}^n)$, который переводит функцию ψ в распределение $\mathbf{A}_F \psi$ такое, что

$$(\mathbf{A}_F \psi)(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \tilde{F}(k) \langle \varphi^*, T_{\hbar k} \psi \rangle dk. \quad (73)$$

Обозначим множество непрерывных линейных операторов из S в S' через $\mathcal{L}(S, S')$. Из теоремы Шварца о ядре для пространства S следует, что расширенное соответствие Вейля

$$S'(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \mathcal{L}(S(\mathbb{R}^n), S'(\mathbb{R}^n)): F \longrightarrow \mathbf{A}_F \quad (74)$$

является биекцией, т.е. для любого оператора из $\mathcal{L}(S(\mathbb{R}^n), S'(\mathbb{R}^n))$ найдется соответствующий ему вейлевский символ в пространстве распределений $S'(\mathbb{R}^{2n})$. Если $\text{im } \mathbf{A}_F \subset L^2(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$, то $\mathbf{A}_F$ можно отождествить с оператором в $L^2(\mathbb{R}^n)$ с областью определения $S(\mathbb{R}^n)$, причем этот оператор непрерывен из $S(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ по теореме о замкнутом графике. Такое обобщение понятия вейлевского символа оказалось очень плодотворным, и оно легко распространяется [25] на qp - и pq -символы (иными словами, на соответствие Кона–Ниренберга) и вообще на любое звездочное произведение (3) с вещественной матрицей θ , поскольку тогда $e^{(i\hbar/2)k \cdot \tilde{S}k}$ в (8) является поточечным мультипликатором для пространства Шварца. В случае виковских и антивиковских символов ситуация несколько усложняется тем, что умножение на $e^{\pm \hbar k^2/4}$ не является автоморфизмом этого пространства.

Для нормального и антинормального упорядочений, как и для любого s -упорядочения, $\tilde{S} = S$ и умножение симплектического преобразования Фурье $\tilde{f}(k)$ на $e^{\pm \hbar k^2/4}$ равносильно умножению обычного преобразования Фурье $\hat{f}(\xi)$ на $e^{\pm \hbar \xi^2/4}$. Рассмотрим сначала случай виковских символов. Легко видеть, что операция умножения на $e^{\hbar \xi^2/4}$ преобразует $S(\mathbb{R}^{2n})$ в пространство гладких функций, производные которых удовлетворяют неравенствам

$$|\partial^\alpha g(\xi)| \leq C_{\alpha, N} (1 + |\xi|)^{-N} e^{\hbar \xi^2/4}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (75)$$

Обозначим это пространство через $M_{2, \hbar/4}$ и снабдим его нормами

$$\|g\|_N = \max_{|\alpha| \leq N} \sup_{\xi} |\partial^\alpha g(k)| (1 + |\xi|)^N e^{-\hbar \xi^2/4}.$$

Элементы пространства $M_{2, \hbar/4}$ являются мультипликаторами для $\mathscr{W}_2$, и сопряженное ему пространство $M'_{2, \hbar/4}$ естественным образом вложено в $\mathscr{W}'_2$, поскольку $\mathscr{W}_2$ непрерывно и плотно вложено в $M_{2, \hbar/4}$. Принадлежащие $M'_{2, \hbar/4}$ обобщенные функции получаются из распределений в S' умножением на $e^{-\hbar \xi^2/4}$, которое при преобразовании Фурье переходит в операцию свертки с функцией

$$\mathcal{G}_\hbar(x) = \frac{1}{(\pi \hbar)^n} e^{-x^2/\hbar}. \quad (76)$$

Таким образом, вейлевские символы из S' и соответствующие им виковские символы связаны прежней формулой (57). Если $F \in S'$, то $F * \mathcal{G}_\hbar$ аналитически продолжается до целой функции в $\mathbb{C}^{2n}$. Используя представление $F = \partial^\kappa f$, где f – полиномиально ограниченная непрерывная функция и $\kappa \in \mathbb{Z}_+^{2n}$ (см. теорему V.10 в [37]), мы можем оценить $(F * \mathcal{G}_\hbar)(x + iy)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |(F * \mathcal{G}_\hbar)(x + iy)| &\leq \frac{1}{(\pi \hbar)^n} \int |f(x')| \partial^\kappa e^{-(x-x'+iy)^2/\hbar} dx' \leq \\ &\leq C_\kappa (1 + |y|)^{|\kappa|} e^{y^2/\hbar} \int (1 + |x'|)^N (1 + |x - x'|)^{|\kappa|} e^{-(x-x')^2/\hbar} dx' \leq \\ &\leq C_{\kappa, N} (1 + |x|)^N (1 + |y|)^{|\kappa|} e^{y^2/\hbar}. \end{aligned}$$

Переходя от переменных $x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ к переменным $z = (q + ip)/\sqrt{2}$, $\bar{z}' = (q - ip)/\sqrt{2}$, где p и q теперь считаются комплексными, мы получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если вейлевским символом оператора в $L^2(\mathbb{R}^n)$ служит распределение умеренного роста, то его виковский символ является ограничением на множество $\{z = z'\}$ целой аналитической функции $F(z, \bar{z}')$, удовлетворяющей условию

$$|F(z, \bar{z}')| \leq C(1 + |z|)^N (1 + |\bar{z}'|)^{N'} e^{(|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} \bar{z}'|^2 + |\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} \bar{z}'|^2)/2\hbar}, \quad (77)$$

где C , N и N' – зависящие от оператора константы.

Простейшим примером служит оператор отражения $\psi(q) \rightarrow \psi(-q)$. Его вейлевским символом является $(\pi\hbar)^n \delta(q) \delta(p)$, а виковским символом является $e^{-(2/\hbar)z \cdot \bar{z}}$.

Охарактеризуем теперь множество антивиковских символов, соответствующее вейлевским символам в S' . Операция $g(\xi) \rightarrow g(\xi) \cdot e^{-\hbar\xi^2/4}$ отображает пространство S на подпространство функций, производные которых удовлетворяют неравенствам

$$|\partial^\alpha g(\xi)| \leq C_{\alpha,N} (1 + |\xi|)^{-N} e^{-\hbar\xi^2/4}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (78)$$

Обозначим его через $W_{2,\hbar/4}$ и снабдим системой норм, соответствующих неравенствам (78). Тогда умножение на $e^{-\hbar\xi^2/4}$ непрерывно из S в $W_{2,\hbar/4}$. В силу теоремы 3 эта операция является топологическим изоморфизмом алгебры $(S, \circledast)$ со скрученной сверткой на алгебру $(W_{2,\hbar/4}, \circledast_W)$, где деформированная свертка $\circledast_W$ соответствует виковскому звездочному произведению.

ЛЕММА 6. Преобразование Лапласа

$$g \rightarrow f(x + iy) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x+iy) \cdot \xi} g(\xi) d\xi$$

является изоморфизмом пространства $W_{2,\hbar/4}(\mathbb{R}^{2n})$ на пространство $W^{2,1/\hbar}(\mathbb{C}^{2n})$ целых функций со свойством

$$\|f\|_N \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|\alpha| \leq N} \sup_{x,y} |(x + iy)^\alpha f(x + iy) e^{-y^2/\hbar}| < \infty, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (79)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аргументация та же, что при выводе леммы 1. Если $g \in W_{2,\hbar/4}$ и $|\alpha| \leq N$, то

$$\begin{aligned} |(x + iy)^\alpha f(x + iy)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-y \cdot \xi} |\partial^\alpha g(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \|g\|_N \int e^{-y \cdot \xi - (\hbar/4)\xi^2} d\xi \leq C \|g\|_N e^{y^2/\hbar}. \end{aligned}$$

Следовательно, условие (79) выполнено. Обратно, пусть целая функция f удовлетворяет условию (79) и пусть

$$g(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Тогда при любых y и $|\alpha| \leq N$ мы имеем

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha g(\xi)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{y \cdot \xi} |(x + iy)^\alpha f(x + iy)| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{y \cdot \xi} \frac{(1 + |x + iy|)^{2N+2n+1}}{(1 + |x|)^{2n+1}(1 + |y|)^N} |f(x + iy)| dx. \end{aligned}$$

Используя неравенство $(1 + |z|)^N \leq C_N \max_{|\alpha| \leq N} |z^\alpha|$, мы получаем

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha g(\xi)| &\leq C'_N \|f\|_{2N+2n+1} \inf_y (1 + |y|)^{-N} e^{y \cdot \xi + y^2/\hbar} \leq \\ &\leq C'_N \|f\|_{2N+2n+1} \left(1 + \frac{\hbar}{2} |\xi|\right)^{-N} e^{-(\hbar/4)\xi^2}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство.

Лемма 6 позволяет утверждать, что пространство $W^{2,1/\hbar}$ является алгеброй относительно произведения Вика.

Снабдим сопряженное ему пространство $(W^{2,1/\hbar})'$ сильной топологией и рассмотрим отображение

$$(W^{2,1/\hbar})' \longrightarrow S': F \longrightarrow F * \mathcal{G}_\hbar, \quad (80)$$

где $\mathcal{G}_\hbar$ определено посредством (76), а свертку теперь следует понимать как операцию, сопряженную к непрерывному отображению

$$f \rightarrow \int f(x + x') \mathcal{G}_\hbar(x') dx'$$

из S в $W^{2,1/\hbar}$. Из простейших свойств сопряженных отображений (см. раздел IV.7.4 в [35]) следует, что отображение (80) также непрерывно. Теперь можно сформулировать следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. *Антивиковское соответствие (59) может быть единственным образом расширено до непрерывного отображения из пространства обобщенных функций $(W^{2,1/\hbar})'$ в пространство операторов $\mathcal{L}(S(\mathbb{R}^n), S'(\mathbb{R}^n))$, снабженное топологией ограниченной сходимости, и это отображение является суперпозицией отображения (80) с расширенным соответствием Вейля (74).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $\mathscr{W}^2$ канонически вложено в $(W^{2,1/\hbar})'$ и сужение на него отображения (80) согласно теореме 3 является топологическим изоморфизмом алгебры $(\mathscr{W}^2, \star_{\text{AW}})$ на алгебру $(\mathscr{W}^2, \star)$. Непрерывность отображения (80) установлена как частный случай теоремой 2 в [21]. Остается заметить, что $\mathscr{W}^2$ плотно в $(W^{2,1/\hbar})'$. Действительно, поскольку отображение $f \rightarrow f * \mathcal{G}_\hbar$ является гомеоморфизмом $\mathscr{W}^2$, это равносильно утверждению, что $\mathscr{W}^2$ плотно в S' , что заведомо верно, поскольку S рефлексивно и инвариантно относительно преобразования Фурье и в противном случае по теореме Хана–Банаха существовала бы ненулевая функция $\varphi \in S$ такая, что $\int \varphi(\xi) g(\xi) d\xi = 0$ при всех $g \in \mathscr{W}_2$. Но это невозможно, поскольку $\mathscr{W}_2$ содержит все гладкие функции с компактным носителем. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если антивиковский символ какого-либо оператора является распределением умеренного роста, то вейлевский символ этого оператора является ограничением на $\mathbb{R}^{2n}$ целой функции, удовлетворяющей оценке (77).

Следовательно, далеко не все ограниченные операторы имеют антивиковские символы в классе распределений Шварца. Однако их можно трактовать как высоко-сингулярные обобщенные функции из $(\mathscr{W}^2)'$. Например, антивиковским символом оператора отражения следует считать обобщенную функцию

$$(\pi\hbar)^n e^{-(\hbar/4)(\Delta_q + \Delta_p)} \delta(q) \delta(p).$$

Как отмечено в [38], антивиковским символом оператора ортогонального проектирования на когерентное состояние, называемое в [38], [36] пуассоновским вектором, естественно считать дельта-функцию Дирака. Чтобы доказать это, воспользуемся представлением Фока–Баргмана, где формулы более компактны и нормированное когерентное состояние имеет вид

$$\Phi_\zeta(\bar{z}) = e^{(1/\hbar)\zeta \cdot \bar{z} - (1/2\hbar)\zeta \cdot \bar{\zeta}}.$$

Обозначим соответствующий ортогональный проектор через P_ζ . Используя определение (63) скалярного произведения и воспроизводящее тождество, аналогичное формуле (54), но по переменной $\bar{z}$, мы получаем

$$\begin{aligned} (P_\zeta \psi)(\bar{z}) &= \Phi_\zeta(\bar{z}) \langle \Phi_\zeta, \psi \rangle = \\ &= e^{\zeta \cdot \bar{z} / \hbar - \zeta \cdot \bar{\zeta} / \hbar} \frac{1}{\hbar^n} \int e^{(1/\hbar)z' \cdot (\bar{\zeta} - \bar{z}')} \psi(\bar{z}') d\mu(z') = e^{(1/\hbar)\zeta \cdot (\bar{z} - \bar{\zeta})} \psi(\bar{\zeta}). \end{aligned} \quad (81)$$

Отметим, что при $\zeta = 0$ проекцией является постоянная функция, равная $\psi(0)$. Симплектическое преобразование Фурье распределения $\pi^n \delta(z - \zeta) \delta(\bar{z} - \bar{\zeta})$ имеет вид

$$\pi^n \int \delta(z - \zeta) \delta(\bar{z} - \bar{\zeta}) e^{z \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot w} d\mu(z) = e^{\zeta \cdot \bar{w} - \bar{\zeta} \cdot w}.$$

Следовательно, оператор, сопоставляемый этому распределению по формуле антивиковского соответствия (66), действует на функцию $\psi \in \mathscr{F}^2$ следующим образом:

$$\psi(\bar{z}) \longmapsto \int e^{\zeta \cdot \bar{w} - \bar{\zeta} \cdot w} e^{-\hbar \bar{w} \cdot \partial_{\bar{z}}} e^{w \cdot \bar{z}} \psi(\bar{z}) d\mu(w) = \int e^{\zeta \cdot \bar{w} - \bar{\zeta} \cdot w} e^{w \cdot (\bar{z} - \hbar \bar{w})} \psi(\bar{z} - \hbar \bar{w}) d\mu(w).$$

Делая замену переменной интегрирования и снова используя воспроизводящую формулу, мы можем записать последний интеграл как

$$\hbar^{-2n} \int e^{(1/\hbar)\zeta \cdot \bar{z}'} \psi(\bar{z} - \bar{z}') e^{(1/\hbar)(\bar{z} - \bar{\zeta} - \bar{z}') \cdot z'} d\mu(z') = \hbar^{-n} e^{(1/\hbar)\zeta \cdot (\bar{z} - \bar{\zeta})} \psi(\bar{\zeta}) \quad (82)$$

и, сравнивая (82) и (81), заключаем, что антивиковским символом оператора P_ζ служит распределение $(\pi\hbar)^n \delta(z - \zeta) \delta(\bar{z} - \bar{\zeta})$. Согласно формулам (62) и (58) его вейлевским символом является $2^n e^{-(2/\hbar)(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta})}$, а виковским символом является $e^{-(1/\hbar)(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta})}$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Один из выводов нашего рассмотрения состоит в том, что антивиковские символы, которые, как правило, не являются распределениями умеренного роста даже для ограниченных операторов, всегда можно интерпретировать как обобщенные функции, определенные на пространстве $\mathscr{W}^2 = \mathcal{S}^{1/2}$, а точнее, на $W^{2,1/\hbar}$. Это верно и для символов, соответствующих s -упорядочению при $s < 0$. Отметим, что аналогичное пространство, обозначаемое $G^{1/2,\sigma^2}$, рассматривалось в работе [39] при использовании так называемого сглаженного преобразования Вигнера для крупномасштабного описания динамики на фазовом пространстве. Ясно, что неполиномиальные функции из $\mathcal{E}^2$ не охватываются расширением соответствия Вейля [25] на распределения умеренного роста. Однако их охватывает дальнейшее расширение этого соответствия, рассмотренное в [21] и использующее вместо пространства Шварца S минимальное инвариантное относительно преобразования Фурье пространство $S_{1/2}^{1/2} = W_2^2$. Как и S , это пространство имеет структуру топологической алгебры относительно звездочного произведения Вейля–Мойала и относительно скрученной свертки. В работе [21] показано, что зависимость этих двух операций от параметра некоммутативности непрерывна по топологии пространства непрерывных билинейных отображений из $S_{1/2}^{1/2} \times S_{1/2}^{1/2}$ в $S_{1/2}^{1/2}$, т. е. они действительно являются деформацией обычного произведения и обычной свертки соответственно. Показано также, что $\mathcal{E}^2$ содержится в алгебре мойаловских мультипликаторов для $(S_{1/2}^{1/2}, \star)$. Расширенное преобразование Вейля переводит эту алгебру мультипликаторов в алгебру операторов в L^2 с областью определения $S_{1/2}^{1/2}$, непрерывно отображающих $S_{1/2}^{1/2}$ в себя. Поскольку $\mathcal{E}^2$ инвариантно относительно действия оператора $e^{\pm(\hbar/4)\Delta}$, в эту же операторную алгебру оно отображается и при виковском, и при антивиковском соответствии. В статье [33] рассмотрено также представление алгебры $(\mathcal{E}^2, \star_W)$ в пространстве Фока–Баргмана и точно охарактеризована область определения соответствующих, вообще говоря, неограниченных операторов. Отметим, наконец, что для $S_{1/2}^{1/2}$ справедливы аналоги предложения 2 и теоремы 5, но их доказательство и дальнейшее расширение исчисления виковских и антивиковских символов выходит за рамки данной статьи.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 12-01-00865_а).

Список литературы

- [1] G. Dito, D. Sternheimer, “Deformation quantization: genesis, developments and metamorphoses”, *Deformation Quantization* (Strasbourg, France, May 31–June 2, 2001), IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, **1**, ed. G. Halbout, De Gruyter, Berlin, 2002, 9–54, arXiv: math/0201168.
- [2] S. T. Ali, M. Engliš, *Rev. Math. Phys.*, **17**:4 (2005), 391–490, arXiv: math-ph/0405065.
- [3] I. Todorov, *Bulg. J. Phys.*, **39**:2 (2012), 107–149, arXiv: 1206.3116.
- [4] C. K. Zachos, D. B. Fairlie, T. L. Curtright (eds.), *Quantum Mechanics in Phase Space*, World Scientific Series in 20th Century Physics, **34**, World Sci., Singapore, 2005.
- [5] R. J. Szabo, *Phys. Rep.*, **378**:4 (2003), 207–299, arXiv: hep-th/0109162.
- [6] L. Álvarez-Gaumé, M. A. Vázquez-Mozo, *Nucl. Phys. B*, **668**:1–2 (2003), 293–321, arXiv: hep-th/0305093.
- [7] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
- [8] S. Galluccio, F. Lizzi, P. Vitale, *Phys. Rev. D*, **78**:8 (2008), 085007, 14 pp., arXiv: 0810.2095.

- [9] A. P. Balachandran, A. Ibort, G. Marmo, M. Martone, *Phys. Rev. D*, **81**:8 (2010), 085017, 8 pp., arXiv:0910.4779.
- [10] P. Basu, B. Chakraborty, F. G. Scholtz, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:28 (2011), 285204, 11 pp., arXiv:1101.2495.
- [11] M. A. Soloviev, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:48 (2007), 14593–14604, arXiv:0708.1151.
- [12] М. А. Соловьев, *ТМФ*, **163**:3 (2010), 413–429, arXiv:1012.3536.
- [13] M. A. Soloviev, *Phys. Rev. D*, **89**:10 (2014), 105020, 11 pp., arXiv:1312.5656.
- [14] H. Grosse, G. Lechner, *JHEP*, **11** (2007), 012, 26 pp., arXiv:0706.3992.
- [15] H. Grosse, G. Lechner, *JHEP*, **09** (2008), 131, 29 pp., arXiv:0808.3459.
- [16] J. M. Gracia-Bondia, J. C. Várilly, *J. Math. Phys.*, **29**:4 (1988), 869–879.
- [17] J. M. Gracia-Bondia, F. Lizzi, G. Marmo, P. Vitale, *JHEP*, **04** (2002), 026, 36 pp., arXiv:hep-th/0112092.
- [18] V. Gayral, J. M. Gracia-Bondia, B. Iochum, T. Schücker, J. C. Várilly, *Commun. Math. Phys.*, **246**:3 (2004), 569–623, arXiv:hep-th/0307241.
- [19] M. A. Soloviev, *J. Math. Phys.*, **52**:6 (2011), 063502, 18 pp., arXiv:1012.0669.
- [20] М. А. Соловьев, *ТМФ*, **172**:1 (2012), 9–27, arXiv:1208.1838.
- [21] М. А. Соловьев, *ТМФ*, **173**:1 (2012), 38–59.
- [22] A. B. Hammou, M. Lagraa, M. M. Sheikh-Jabbari, *Phys. Rev. D*, **66**:2 (2002), 025025, 11 pp., arXiv:hep-th/0110291.
- [23] K. K. Cahill, R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **177**:5 (1969), 1857–1881.
- [24] J. M. Maillard, *J. Geom. Phys.*, **3**:2 (1986), 231–261.
- [25] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Annals of Mathematics Studies, **122**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1989.
- [26] G. S. Agarwal, E. Wolf, *Phys. Rev. D*, **2**:10 (1970), 2161–2186.
- [27] M. Blaszkak, Z. Domański, *Ann. Phys.*, **327**:2 (2012), 167–211, arXiv:1009.0150.
- [28] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*, т. 2: *Пространства основных и обобщенных функций*, Физматлит, М., 1958.
- [29] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*, т. 3: *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Физматлит, М., 1958.
- [30] Л. Хёрмандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, М., 1968.
- [31] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, “Deformation quantization of Fréchet–Poisson algebras: Convergence of the Moyal product”, *Quantization, Deformations, and Symmetries*, v. 2 (Dijon, France, September 5–8, 1999), Mathematical Physics Studies, **22**, eds. G. Dito, D. Sternheimer, Kluwer, Dordrecht, 2000, 233–245.
- [32] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, “Non-formal deformation quantization of Fréchet–Poisson algebras: the Heisenberg and Lie algebra case”, *Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory*, Contemporary Mathematics, **434**, eds. S. Paycha, B. Uribe, AMS, Providence, RI, 2007, 99–124.
- [33] M. A. Soloviev, *J. Math. Phys.*, **54**:7 (2013), 073517, 16 pp., arXiv:1312.6571.
- [34] S. Beiser, H. Römer, S. Waldmann, *Commun. Math. Phys.*, **272**:1 (2007), 25–52, arXiv:math.QA/0506605.
- [35] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971.
- [36] Ф. А. Березин, М. А. Шубин, *Уравнение Шредингера*, Изд-во МГУ, М., 1983.
- [37] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 1: *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.
- [38] Ф. А. Березин, *Матем. сб.*, **86(128)**:4(12) (1971), 578–610.
- [39] A. G. Athanassoulis, N. J. Mauser, T. Paul, *J. Math. Pures Appl.* (9), **91**:3 (2009), 296–338, arXiv:0804.0259.