Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Быков, Геометрические аспекты голографической двойственности, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 3, 436–448

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8746>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:08:51

© 2014 г.

Д. В. Быков^{*†}

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Дан краткий обзор результатов, связанных с применением AdS/CFT-соответствия к суперсимметричным моделям с $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией. Эти модели, с одной стороны, наиболее близки к реалистичным теориям физики элементарных частиц, а с другой, поддаются количественному анализу при помощи AdS/CFT-соответствия. Кроме того, с ними связаны такие интересные геометрические объекты, как многообразия Сасаки и риччи-плоские конусы, которым уделено особое внимание.

Ключевые слова: AdS/CFT-соответствие, суперсимметрия, многообразие Сасаки, поверхность дель Пеццо.

DOI: 10.4213/tmf8746

Посвящается Андрею Алексеевичу Славнову в честь его юбилея

1. ADS/CFT-СООТВЕТСТВИЕ

Гипотеза об AdS/CFT-соответствии утверждает, что некоторые конформные теории поля (CFT) в определенном смысле двойственны моделям теории струн, описывающим струны в пространстве анти-де-Ситтера (AdS). Оригинальным примером является двойственность между максимально суперсимметричной теорией Янга–Миллса ($\mathcal{N} = 4$ СЯМ) и суперструной типа IIB в пространстве $AdS_5 \times S^5$ [1]. Рассмотрим теорию Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(N)$ и константой связи g_{YM} . С точки зрения геометрии пространства $AdS_5 \times S^5$ эти два параметра — N и g_{YM} — задают радиус сферы и поток самодуальной 5-формы через нее¹⁾:

$$R^2 \sim \sqrt{g_{YM}^2 N}, \quad \int_{S^5} F_5 \sim N.$$

¹⁾Заметим, что, так как форма F_5 самодуальна, она имеет ненулевые компоненты и вдоль пространства AdS .

^{*}Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: dmitri.v.bykov@gmail.com

[†]Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik, Albert-Einstein-Institut, Potsdam-Golm, Germany

Отметим, что соответствие между двумя теориями проявляется, в частности, в том, что глобальные симметрии теории поля отвечают (супер)-изометриям пространства $AdS_5 \times S^5$. Действительно, суперконформная группа $\mathcal{N} = 4$ теории – это группа $PSU(2, 2|4)$. Ее максимальная бозонная подгруппа есть $SU(2, 2) \times SU(4)$. Здесь первый сомножитель изоморфен $SO(2, 4)$ – конформной группе четырехмерного пространства Минковского, а второй представляет собой группу R -симметрии теории. С другой стороны, $SO(2, 4)$ и $SO(6)$ – группы изометрий соответственно пространства анти-де-Ситтера и пятимерной сферы.

Простейшая модификация данной базовой модели получается в результате факторизации сферы по дискретной подгруппе группы изометрий $SO(6)$:

$$AdS_5 \times S^5 \longrightarrow AdS_5 \times S^5/\Gamma, \quad \Gamma \subset SO(6).$$

Двойственная калибровочная теория при этом меняется: калибровочная группа теперь состоит из нескольких простых множителей, а мультиплеты материи находятся в бифундаментальных представлениях. При этом уменьшается и количество суперсимметрий – оно зависит от структуры группы Γ : если $\Gamma \subset SU(3) \subset SO(6)$, то остается одна суперсимметрия, $\mathcal{N} = 1$. Если же $\Gamma \subset SU(2) \subset SU(3) \subset SO(6)$, то возникает $\mathcal{N} = 2$ суперконформная теория поля. Дискретные подгруппы группы $SU(2)$ были классифицированы еще Клейном и известны как группы Клейна – это группы A_n , D_n , $E_{6,7,8}$. Гипермультиплеты в этой теории можно получить методом факторизации из набора полей теории с $\Gamma = 1$ (т.е. из $\mathcal{N} = 4$ СЯМ) [2]. Оказывается, что они описываются так называемым “колчаном” (quiver), соответствующим диаграмме Дынкина алгебры Ли типа A – D – E [3].

Заметим, что в случае, когда действие группы Γ на S^5 несвободно, фактор-многообразие содержит особенности. Именно так происходит, если $\Gamma \subset SU(2)$. Это означает, что должна существовать более общая гладкая метрика, включающая некоторые параметры “разрешения” особенностей и переходящая в негладкую в пределе, когда эти параметры обращаются в ноль.

2. МНОГООБРАЗИЯ САСАКИ И $\mathcal{N} = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЯ

Все упомянутые в предыдущем разделе многообразия вида $AdS_5 \times S^5/\Gamma$ являются частными случаями достаточно широкого класса решений типа ПВ в супергравитации вида $AdS_5 \times X^5$, в которых дилатон ϕ постоянен и единственная ненулевая форма – это 5-форма:

$$\phi = \text{const}, \quad F_5 \sim N((\text{vol})_{AdS_5} + (\text{vol})_{X^5}). \quad (1)$$

При этом условие Богомольного–Прасада–Зоммерфельда для данной конфигурации, т.е. требование сохранения хотя бы одной суперсимметрии, сводится к требованию обращения в ноль вариации гравитино (мы выписываем вариацию схематически, более подробно см., например, в работе [4]):

$$\delta\psi_\mu = (\nabla_\mu + F_5\gamma_\mu)\epsilon = 0. \quad (2)$$

Заметим, что для рассматриваемой конфигурации вариация дилатино автоматически обращается в ноль. Спинор ϵ , удовлетворяющий (2), называется спинором Киллинга. Требование существования спинора Киллинга влечет существенные

ограничения на геометрию пространства X^5 . В частности, можно показать по аналогии с работой [5], что разрешимость уравнения (2) эквивалентна тому, что метрический конус над X^5 кэлеров и риччи-плоский. Иными словами, пусть $(\widetilde{ds^2})_{X^5}$ – метрика на X^5 . Метрика на конусе по определению есть $ds^2 = dr^2 + r^2(\widetilde{ds^2})_{X^5}$. Требование суперсимметрии заключается в том, что метрика ds^2 кэлерова и риччи-плоская (последнее следует также напрямую из того факта, что в силу уравнений супергравитации и вида 5-формы (1) $(\widetilde{ds^2})_{X^5}$ – эйнштейнова метрика положительной кривизны). В этом случае метрика на основании конуса $(\widetilde{ds^2})_{X^5}$ называется метрикой Сасаки–Эйнштейна.

Локально все метрики Сасаки–Эйнштейна устроены достаточно просто: их можно представить в виде

$$(ds^2)_{X^5} = (d\varphi - A)^2 + \sum_{i,j=1}^2 g_{i\bar{j}} dz_i d\bar{z}_j. \quad (3)$$

Здесь $g_{i\bar{j}}$ – метрика Кэлера–Эйнштейна на некоторой комплексной поверхности (смысл этой поверхности разъяснен ниже, см. п. 2.1.1) и A – кэлеров ток. Такое представление очевидно для сферы S^5 , если вспомнить, что она является тотальным пространством расслоения Хопфа с базой $\mathbb{CP}^2$. Важное отличие общего случая состоит в том, что $g_{i\bar{j}}$ – не обязательно гладкая метрика (хотя метрика на X^5 гладкая).

На многообразии Сасаки–Эйнштейна с метрикой (3) задано каноническое векторное поле $\partial/\partial\varphi$ с постоянной нормой – это так называемый вектор Роба. С точки зрения двойственной калибровочной теории данной $U(1)$ -изометрии пространства X^5 двойственна глобальная $U(1)$ -симметрия суперконформной теории – R -симметрия, действующая на суперзаряды [6]:

$$Q \rightarrow e^{i\alpha} Q, \quad \bar{Q} \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{Q}.$$

В отличие от произвольной теории с $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией суперконформная теория всегда обладает $U(1)$ - R -симметрией, так как генератор R -симметрии явным образом входит в супералгебру $SU(2, 2|1)$ (и тем самым R -преобразования задают ее внутренние автоморфизмы).

2.1. Многообразие Калаби–Яу и сингулярности. Описанная выше конструкция конуса над многообразием Сасаки–Эйнштейна X^5 позволяет взглянуть по-новому на конфигурацию типа $AdS_5 \times X^5$. Здесь уместно вспомнить интерпретацию теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ как эффективной теории поля, описывающей колебания стопки параллельных D3-бран, помещенных в плоское пространство $\mathbb{R}^{1,9}$. Ясно, что в этом случае ортогональное к бранам пространство – это пространство $\mathbb{R}^6$. Браны, будучи массивными объектами, меняют геометрию пространства, в которое они помещены. Считая, что браны расположены в начале координат этого пространства $\mathbb{R}^6$, можно ввести радиальную координату r и искать супергравитационное решение в виде

$$ds^2 = h^{-1/2}(r) \sum_{i=1}^4 dx_i^2 + h^{1/2}(r) (dr^2 + r^2(d\Omega)_{S^5}). \quad (4)$$

Так как браны заряжены относительно поля 5-формы F_5 , нужно также наложить условие $\int_{S^5} F_5 \sim N$. Решение имеет вид [7] (здесь l – линейный масштаб)

$$h(r) = 1 + \frac{l^4 N}{r^4}. \quad (5)$$

В пределе $r \rightarrow 0$ получаем метрику пространства $AdS_5 \times S^5$. Отсюда видно, что сфера S^5 возникает как геометрическое место точек, равноудаленных от точки $r = 0$ (в смысле естественной плоской метрики) в шестимерном пространстве, в которую помещены браны. Мы можем теперь рассмотреть ситуацию, когда “внутреннее” шестимерное пространство – не плоское, а произвольное (компактное) многообразие Калаби–Яу Y^6 . Помещая браны в несингулярную точку пространства Y^6 , мы снова будем иметь теорию $\mathcal{N} = 4$ СЯМ в качестве низкоэнергетического предела. Ситуация меняется, однако, если мы поместим браны в сингулярную точку пространства Калаби–Яу. В этом случае эффективная теория поля на бранах зависит от локальной геометрии пространства Y^6 вблизи сингулярности. Окрестность сингулярности можно описать с помощью некомпактной риччи-плоской метрики типа “конус”, т. е. метрики, имеющей вид $(ds^2)_{\text{sing}} = dr^2 + r^2 (ds^2)_{X^5}$. В данном случае точки, равноудаленные от сингулярности, составляют не S^5 , а многообразие Сасаки–Эйнштейна X^5 . Подстановка (4) остается справедливой и приводит в пределе $r \rightarrow 0$ к конфигурации $AdS_5 \times X^5$ [8].

2.1.1. Конусы. Из предыдущего раздела следует, что пространства X^5 тесно связаны с сингулярностями пространства Калаби–Яу Y^6 комплексной размерности 3. Некоторые такие сингулярности можно представить как сингулярности комплексных конусов над комплексными поверхностями, которые мы в дальнейшем будем обозначать как $\mathcal{M}$. Поясним, что это означает, на примере так называемого “конифолда”. Рассмотрим невырожденную квадрику в $\mathbb{CP}^3$, например

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0. \quad (6)$$

Известно, что такое алгебраическое многообразие изоморфно $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. Оно неособо как гиперповерхность в $\mathbb{CP}^3$. Чтобы перейти к конусу, “забудем” про то, что X_0, X_1, X_2, X_3 – проективные координаты, т. е. будем считать их обычными аффинными переменными. Иными словами, будем рассматривать уравнение (6) в $\mathbb{C}^4$. При этом, очевидно, возникает особенность в начале координат $X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = 0$. Это особое многообразие будем называть комплексным конусом над $\mathcal{M} = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. Такое определение очевидным образом распространяется на комплексные конусы над другими комплексными поверхностями.

Единственный оставшийся вопрос, в каком случае аффинные многообразия типа (6) являются риччи-плоскими (или, точнее, в каком случае они останутся риччи-плоскими после разрешения сингулярности в нуле). Оказывается, данное требование выполняется тогда и только тогда, когда комплексная поверхность $\mathcal{M}$ обладает обильным антиканоническим пучком. На языке дифференциальной геометрии это означает, что $\mathcal{M}$ – поверхность положительной кривизны, а точнее, что интеграл формы Риччи по любому гомологически нетривиальному 2-циклу C положителен:

$$\int_C \frac{i}{2\pi} R_{m\bar{n}} dz_m \wedge d\bar{z}_n > 0.$$

Из алгебраической геометрии известно, что компактные неособые поверхности положительной кривизны – это $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, $\mathbb{CP}^2$, а также раздутия пространства $\mathbb{CP}^2$ в не более чем восьми точках. Будем обозначать поверхности, возникающие в результате таких раздутий, как $dP_1, \dots, dP_8$ – это так называемые поверхности дель Педро (двумерные многообразия Фано).

Выберем одну из этих поверхностей $\mathcal{M}$. Как построить отвечающую ей метрику Сасаки–Эйнштейна на X^5 ? В случае, когда $\mathcal{M}$ допускает метрику Кэлера–Эйнштейна (с кэлеровым потенциалом K), ответ дается формулой (3). Эту формулу можно также переписать по-другому, если вспомнить про соответствие между метриками Кэлера–Эйнштейна на $\mathcal{M}$ и риччи-плоскими метриками на Y^6 . Кэлеров потенциал $\mathcal{K}$, задающий (риччи-плоскую) метрику на комплексном конусе над $\mathcal{M}$, можно искать в виде

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(|u|^2 e^K). \quad (7)$$

Такая подстановка известна как подстановка Калаби [9].

2.1.2. $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_3$ -сингулярность. Рассмотрим ситуацию, когда применима подстановка Калаби, а именно сингулярность типа $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_3$, где $\mathbb{Z}_3$ действует на $\mathbb{C}^3$ умножением на корень из единицы:

$$(z_1, z_2, z_3) \rightarrow e^{2\pi i/3}(z_1, z_2, z_3). \quad (8)$$

Минимальный набор инвариантных координат – это всевозможные кубические комбинации исходных переменных z_1, z_2, z_3 . Эти комбинации, очевидно, уже не независимы, а удовлетворяют некоторым уравнениям. Если бы переменные z_1, z_2, z_3 были проективными, то эти кубические комбинации задавали бы линейную систему $|\mathcal{O}(3)|$ сечений антиканонического расслоения $\mathcal{O}(3)$ над $\mathbb{CP}^2$. Так как переменные z_1, z_2, z_3 на самом деле аффинные, получившееся многообразие – тотальное пространство канонического расслоения $\mathcal{O}(-3)$ над $\mathbb{CP}^2$ или, во введенной ранее терминологии, конус над $\mathcal{M} = \mathbb{CP}^2$.

Кэлеров потенциал пространства $\mathbb{CP}^2$ записывается в неоднородных координатах как

$$K = \ln(1 + |w_1|^2 + |w_2|^2),$$

поэтому в данном случае подстановка Калаби (7) простой заменой переменных сводится к $\mathcal{K} = \mathcal{K}(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)$. Уравнение риччи-плоскости – обыкновенное дифференциальное уравнение на $\mathcal{K}$, которое можно решить в явном виде (более подробно см., например, работу [10]). На бесконечности, т. е. когда $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \rightarrow \infty$, метрика становится асимптотически евклидовой, однако условие отсутствия конического дефекта в начале координат приводит к необходимости факторизации (8). Таким образом, на бесконечности метрика асимптотически приближается к метрике на $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_3$, а в нуле сингулярность разрешается путем “раздутия” $\mathbb{CP}^2$. Записывая метрику на $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_3$ в конической форме, видим, что отвечающее данной сингулярности многообразие Сасаки–Эйнштейна – это (гладкое) линзовое пространство $S^5/\mathbb{Z}_3$.

2.1.3. Конифолд. Помимо факторов сферы, наиболее изученное многообразие Сасаки–Эйнштейна связано с конифолдом, определяемым алгебраическим уравнением (6). На конифолде (6) существует риччи-плоская метрика, полученная в работе [11] и позднее обобщенная в [12]. Эту метрику можно построить при помощи

подстановки вида

$$\mathcal{K} = a \ln(1 + |u|^2) + K((1 + |u|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2)).$$

Условие равенства нулю тензора Риччи может быть разрешено явно. На “бесконечности” метрика представима в виде конуса над многообразием Сасаки–Эйнштейна, которое в данном случае называется

$$T^{11} := \frac{SU(2) \times SU(2)}{U(1)}$$

(группа $U(1)$ вложена диагонально). Двойственная $\mathcal{N} = 1$ теория поля предложена в работе [13]. Это калибровочная теория с калибровочной группой $SU(N) \times SU(N)$ и двумя наборами киральных полей $A_i, B_j, i, j = 1, 2$, образующих дублеты относительно двух групп $SU(2)$ глобальной симметрии. Киральные поля A_i и B_j находятся в бифундаментальных представлениях $(N, \bar{N})$ и $(\bar{N}, N)$, а суперпотенциал задается формулой

$$W = \epsilon^{ij} \epsilon^{mn} \text{tr}(A_i B_m A_j B_n). \quad (9)$$

2.1.4. Поверхности дель Пеццо. Заметим, однако, что не все поверхности положительной кривизны допускают метрики Кэлера–Эйнштейна. Более точно, метрики Кэлера–Эйнштейна не существуют на поверхностях дель Пеццо $\mathbf{dP}_1$ и $\mathbf{dP}_2$ (см., например, монографию [14]). Эти поверхности торические, т. е. допускают в качестве группы изометрий как минимум $U(1)^2$. Данное обстоятельство позволяет строить анзацы для кэлеровых потенциалов, задающих метрики на конусах над этими поверхностями, в виде $K = K(|u_1|^2, |u_2|^2, |u_3|^2)$. Условие риччи-плоскости сводится к уравнению Монжа–Ампера, которое можно проанализировать в определенных случаях. Например, так обстоит дело для поверхности $\mathbf{dP}_1$ – в этом случае уравнение можно решить точно на “бесконечности” и найти соответствующую метрику Сасаки–Эйнштейна в явном виде. Данная метрика отвечает многообразию $Y^{2,1}$ – частному случаю многообразий $Y^{p,q}$, впервые изученных в работе [15]. Поверхности дель Пеццо $\mathbf{dP}_{4,5,6,7,8}$ не торические, но допускают метрики Кэлера–Эйнштейна [16], которые, однако, в явном виде неизвестны.

Таким образом, геометрия конусов над поверхностями дель Пеццо изучена недостаточно. Тем не менее для всех случаев существуют гипотезы о том, каковы должны быть двойственные этим супергравитационным решениям теории поля. Данные модели были построены в статье [17] (для торических поверхностей дель Пеццо), а также в статье [18] (для еще более общих торических многообразий Сасаки $L^{p,q,r}$, полученных в [19]). Что касается неторических поверхностей дель Пеццо, двойственные им $\mathcal{N} = 1$ теории поля были предложены в работе [20]. Теория поля для конуса над $\mathbf{dP}_8$ изучалась также в [21] в связи с тем, что после определенного нарушения симметрии она приводит к набору полей, аналогичному составу полей суперсимметричной Стандартной модели.

2.2. R-симметрия и α -максимизация. Важная проверка AdS/CFT-соответствия для случая торических поверхностей дель Пеццо (т. е. $\mathbf{dP}_1, \mathbf{dP}_2, \mathbf{dP}_3$) заключается в следующем. Как уже говорилось, группа изометрии метрик на конусах над такими поверхностями включает в себя как минимум $U(1)^3$. С точки зрения ассоциированного многообразия Сасаки–Эйнштейна один из этих $U(1)$ -множителей

отвечает векторному полю Рибо, а с точки зрения теории поля – R -симметрии. Остальные два $U(1)$ -множителя (которые происходят из $U(1) \times U(1)$ -изометрий самих поверхностей дель Педро) суть дополнительные глобальные (flavor) симметрии теории. В таких теориях оказывается непростой задачей “отделить” эти глобальные симметрии от R -симметрии, т. е. определить, например, заряды элементарных полей. Как правило, недостаточно условия, что суперпотенциал должен иметь определенный R -заряд (а также других физических соображений).

Систематический метод определения R -зарядов полей теории, основанный на некоторых соотношениях между треугольными аномалиями в $\mathcal{N} = 1$ суперконформных теориях, был предложен в работе [22]. Он состоит в следующем. Известно, что в произвольной $d = 4$ конформной теории поля аномалия Вейля (т. е. аномалия следа тензора энергии-импульса) может быть представлена в виде

$$\langle T^\mu_\mu \rangle_g = aE_4 + cW^2,$$

где E_4 – эйлерова плотность, а W^2 – квадрат тензора Вейля. Здесь предполагается, что в левой части вычисляется след тензора энергии-импульса теории, помещенной в пространство с фиксированной метрикой g . Дифференцируя по метрике и полагая ее затем плоской, можно переформулировать данное равенство: коррелятор элементов тензора-энергии импульса со вставкой оператора T^μ_μ отличен от нуля. Величины a и c – центральные заряды – представляют собой характеристические величины конформной теории поля и могут быть выражены через R -заряды элементарных полей. В частности, a можно вычислить по формуле

$$a = \frac{3}{32}(3 \operatorname{tr} R^3 - \operatorname{tr} R),$$

где tr означает сумму по всем полям теории. Предписание из работы [22] для нахождения правильных R -зарядов состоит в следующем: нужно приписать всем полям произвольные допустимые R -заряды (такие, чтобы суперпотенциал имел правильную размерность), а затем найти локальный максимум функции a по всем введенным параметрам, т. е. по всем дополнительным $U(1)$ -факторам, с которыми может смешиваться R -заряд. В результате получим набор квадратных уравнений, решение которых даст правильные R -заряды всех полей.

Знать R -заряды полей оказывается тем более важным, что их можно вычислить также альтернативным путем – с помощью AdS/CFT-соответствия. В работах [6], [23] утверждается, что R -заряды полей суть объемы особых трехмерных подмногообразий в заданном многообразии Сасаки–Эйнштейна X^5 . В статье [24] показано, что методы торической геометрии позволяют свести вычисление объемов таких подмногообразий к задаче о нахождении экстремума некоторой функции, что, таким образом, является геометрическим аналогом максимизации функции a .

3. НЕКОНФОРМНЫЕ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕОРИИ

Важный вопрос состоит в том, возможно ли распространить AdS/CFT-соответствие на случай неконформных теорий поля. Для определенных суперсимметричных теорий ответ оказывается положительным. Наиболее изучены следующие две качественно различные ситуации: когда конформная симметрия нарушена путем

конденсации скалярных полей (т. е. вследствие эффекта Хиггса), а также когда исходная конформная модель, двойственная пространству $AdS_5 \times X^5$, модифицируется явным образом с нарушением конформности. Рассмотрим оба случая.

3.1. Разрешение сингулярностей и нарушение симметрии. Вернемся сначала к случаю пространства $AdS_5 \times S^5$ и $\mathcal{N} = 4$ СЯМ. Данная теория поля описывает низкоэнергетические флуктуации набора из N совпадающих D3-бран в десятимерном пространстве. Шесть скалярных полей ϕ_i , $i = 1, \dots, 6$, отвечают шести направлениям нормальных флуктуаций бран. Минимум потенциальной энергии теории достигается при $[\phi_i, \phi_j] = 0$. Диагонализуем эти $(N \times N)$ -матрицы и предположим, что собственные значения распадаются на два набора из M и $N - M$ попарно совпадающих собственных значений. С точки зрения теории поля исходная $SU(N)$ -симметрия нарушена до $S(U(M) \times U(N - M))$. С геометрической точки зрения это означает, что мы отодвинули стопку из M бран от второй стопки из $N - M$ бран. Данная конфигурация может быть явным образом описана в рамках супергравитации. Действительно, будем снова искать решение для метрики в виде (4), но не будем требовать, чтобы функция h зависела только от радиальной переменной:

$$ds^2 = h^{-1/2}(\vec{r}) \sum_{i=1}^4 dx_i^2 + h^{1/2}(\vec{r})(dr^2 + r^2(d\Omega)_{S^5}), \quad (10)$$

где $\vec{r}$ – координаты на $\mathbb{R}^6$. Тогда из уравнений движения следует, что

$$\Delta_{\mathbb{R}^6} h = \text{источники} = \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (11)$$

где “источники” обозначают сумму по положениям D3-бран, которые являются точечными объектами с точки зрения трансверсального пространства $\mathbb{R}^6$.

Решение можно получить элементарной модификацией (5) (ниже L – некоторый линейный масштаб):

$$h = 1 + \sum_i \frac{L^4}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^4}.$$

Оказывается, подстановка типа (10) применима в гораздо более общей ситуации, когда браны помещены в произвольные точки трансверсального риччи-плоского многообразия Y^6 . В дальнейшем в качестве такого Y^6 мы будем рассматривать окрестности конических сингулярностей многообразий Калаби–Яу. Пусть $(ds^2)_{Y^6}$ – метрика на Y^6 , тогда вместо (10) запишем

$$ds^2 = h^{-1/2}(\vec{r}) \sum_{i=1}^4 dx_i^2 + h^{1/2}(\vec{r})(ds^2)_{Y^6}, \quad (12)$$

где $\vec{r}$ – координаты на Y^6 . Уравнения движения вновь приводят к уравнению типа (11), где в качестве лапласиана нужно взять лапласиан на Y^6 , а в правой части по-прежнему стоит сумма по источникам, т. е. по положениям D3-бран на Y^6 . В случае, когда Y^6 – конус над многообразием Сасаки–Эйнштейна X^5 , смещения бран можно интерпретировать как ненулевые вакуумные значения полей в двойственной

(исходно конформной) теории поля [25]. Важное наблюдение в работе [25], однако, заключалось еще и в том, что не любое нарушение симметрии в двойственной калибровочной теории можно интерпретировать как смещение бран.

Например, в $\mathcal{N} = 1$ теории с суперпотенциалом (9) можно рассмотреть классические вакуумные конфигурации, в которых отличны от нуля только поля A (или только поля B). В более инвариантных терминах можно утверждать, что отличное от нуля вакуумное значение приобретает “барионный” оператор $\det A$, в то время как “мезонные” операторы $\text{tr}(AB)^k$ остаются равными нулю. Утверждение из работы [25] состоит в том, что ненулевые вакуумные средние барионных операторов следует интерпретировать как разрешение сингулярности двойственного геометрического конуса. В случае конифолда благодаря существованию большой группы изометрий метрика на “разрешенном” пространстве (т.е. без сингулярности в вершине) может быть выписана явно [11]. В этом пространстве в “точке” $r = 0$ – вершине конуса – вклеена сфера S^2 , поэтому данная точка и не является сингулярной.

Используя подстановку (12) для метрики с учетом D3-бран и предполагая, что функция h вновь зависит только от радиуса, авторы статьи [12] нашли решение $h(r)$ уравнения Лапласа, однако это решение оказалось сингулярным при $r = 0$. Данная проблема была разрешена в работе [26], где было показано, что наличие сингулярности есть следствие подстановки, когда функция h предполагается зависящей только от радиуса. Физически это означает, что D3-браны “размазаны” по вклеенной при $r = 0$ сфере. Если же предположить, что браны расположены лишь в одной точке $\vec{r}_0$ вклеенной сферы, то существует гладкое решение соответствующего уравнения Лапласа [26]. Более того, несмотря на то что при $r \rightarrow \infty$ это решение асимптотически стремится к $AdS_5 \times T^{11}$, в окрестности бран, т.е. при $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0$, решение переходит в $AdS_5 \times S^5$. Такая интерполяция может быть интерпретирована как нарушение симметрии в исходной конформной теории при помощи барионного конденсата, приводящее в инфракрасном пределе (т.е. после исключения массивных полей) к $\mathcal{N} = 4$ СЯМ.

Конус над поверхностью дель Пеццо ранга 1. Интересно обобщить данное рассмотрение на случай, когда сингулярность Калаби-Яу – это не (6), а конус над поверхностью дель Пеццо. Изучим простейший случай поверхности дель Пеццо ранга 1 (раздутие $\mathbb{CP}^2$ в одной точке). Прежде чем искать функцию Грина h , которая описывает гравитационное действие D3-бран, расположенных на конусе, необходимо сначала найти риччи-плоскую метрику $(ds^2)_{Y^6}$ на самом конусе. Можно показать, что она должна иметь группу изометрий $U(1) \times U(1) \times SU(2)$, т.е. в этом случае можно искать кэлеров потенциал в виде [27]

$$K = K(|u|^2, |z_1|^2 + |z_2|^2) := K(e^t, e^s).$$

Оказывается удобным осуществить преобразование Лежандра по (s, t) , вводя двойственные переменные

$$\mu = \frac{\partial K}{\partial s}, \quad \nu = \frac{\partial K}{\partial t}$$

и потенциал $G = \mu s + \nu t - K$. Тогда уравнение риччи-плоскости примет вид

$$e^{G_\mu + G_\nu} (G_{\mu\mu} G_{\nu\nu} - G_{\mu\nu}^2) = \mu. \quad (13)$$

Переменные (μ, ν) имеют смысл отображений момента для действия группы $U(1)^2$, а функция G определена на соответствующем многограннике момента.

При $(\mu, \nu) \rightarrow \infty$ метрика должна иметь вид конуса $ds^2 = dr^2 + r^2(\widetilde{ds}^2)_{X^5}$ над некоторым многообразием Сасаки-Эйнштейна X^5 . В переменных (μ, ν) это означает, что G имеет асимптотический вид

$$G_0 = 3\nu(\ln \nu - 1) + \nu P_0(\xi) \quad \text{при} \quad \mu, \nu \rightarrow \infty, \quad \xi = \frac{\mu}{\nu}. \quad (14)$$

Подставляя эту асимптотику в уравнение (13), можно найти $P_0(\xi)$ как решение обыкновенного дифференциального уравнения. Отметим, что таким образом можно получить метрики на всех пространствах $Y^{p,q}$ [15]. Формально выражение (14) задает точное решение уравнения (13), однако это решение сингулярно в вершине конуса $r = 0$ (т. е. при конечных μ, ν). Чтобы разрешить эту сингулярность, нужно искать поправки к G_0 по $1/\nu$.

Общее решение будем искать в виде

$$G = 3\nu(\ln \nu - 1) + \nu P_0(\xi) + \ln \nu + \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{-k} P_{k+1}(\xi).$$

В порядке ν^{-M} получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для $P_M(\xi)$:

$$\frac{d}{d\xi} \left(Q(\xi) \frac{dP_M}{d\xi} \right) - ((M-2)^2 - 1) \xi P_M = \text{правая часть}, \quad (15)$$

где $Q(\xi) = \xi^3 - 3\xi^2/2 + d$, а правая часть зависит от предыдущих порядков разложения, т. е. от $P_0, \dots, P_{M-1}$. Уравнение (15) есть частный случай уравнения Гойна – фуксова уравнения с четырьмя особыми точками на сфере Римана. В работе [27] показано, что физическим интервалом является $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, где ξ_1, ξ_2 – два наибольших корня полинома $Q(\xi)$. Из условия регулярности метрики вблизи $\xi = \xi_1, \xi_2$ следует, что функция $P_M(\xi)$ должна быть вещественно-аналитической в этих точках, т. е. разложима в ряд Тейлора. Так как $\xi = \xi_1, \xi_2$ суть особые точки уравнения (15), решение, регулярное вблизи обеих точек, как правило, не существует: точнее, оно может существовать лишь при определенных значениях спектрального параметра, который в (15) равен нулю.

Следует заметить, что если однородное уравнение

$$\frac{d}{d\xi} \left(Q(\xi) \frac{dP_M}{d\xi} \right) - ((M-2)^2 - 1) \xi P_M = 0 \quad (16)$$

имеет регулярное решение при каком-либо $M = 1, 2, \dots$, то это решение можно взять с произвольным коэффициентом, который в свою очередь следует интерпретировать как новый параметр метрики на конусе. Оказывается, однако, что в интересующем нас случае регулярные решения уравнения (16) существуют лишь при $M = 3, 4$ [27]. Таким образом, риччи-плоская метрика на конусе над $\mathbf{dP}_1$ может иметь не более двух параметров. Более того, существует дополнительное топологическое соотношение между этими параметрами [28], и тем самым остается лишь один независимый потенциальный параметр метрики. Известна одна точная метрика на конусе над $\mathbf{dP}_1$ [28], [29], в которой, однако, этот параметр фиксирован, т. е. эта метрика

не является наиболее общей. В чем геометрический смысл этого параметра? Наша гипотеза состоит в том, что он отвечает размеру раздутой сферы $\mathbb{CP}^1$ в поверхности дель Педро ранга 1. С точки зрения двойственной калибровочной теории, построенной в статье [17], этот параметр должен отвечать вакуумному среднему значению одного или нескольких киральных полей (для данной модели некоторые возможные типы нарушения симметрии изучались в работе [30]). Было бы очень интересно более детально понять этот механизм нарушения симметрии.

3.2. Решения с дробными бранами. Вернемся снова к случаю конифолда (6). Коническая риччи-плоская метрика на алгебраическом многообразии (6), $ds^2 = dr^2 + r^2(\widetilde{ds}^2)_{T^{11}}$, сингулярна при $r = 0$. Как обсуждалось выше (см. п. 3.1), особенность в вершине конуса можно устранить путем раздутия сферы $\mathbb{CP}^1$. Однако это не единственный способ устранения сингулярности. Дело в том, что основание конуса T^{11} топологически представляет собой произведение $S^2 \times S^3$ и, вместо того чтобы раздувать S^2 при $r = 0$, можно раздуть S^3 . С геометрической точки зрения такая модификация отвечает “деформации” конифолда, а именно замене уравнения (6) на неособое уравнение

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = \epsilon^2 \neq 0.$$

На таком “деформированном” многообразии также существует риччи-плоская неособая метрика [11]. Кроме того, в работе [31] построена соответствующая метрика с ненулевым полем F_5 , описывающая D3-браны, расположенные в этом пространстве. Эта метрика имеет особенность при $r = 0$. Существуют также более общие супергравитационные решения, связанные с деформированным конифолдом. Одно из таких решений описывает не только D3-браны, но и D5-браны, намотанные на сферу S^2 в T^{11} (их также называют “дробными” D3-бранами) [32]. Данное решение не имеет особенностей в отличие от полученного до этого аналогичного решения на неразрешенном (сингулярном) конифолде [33]. Двойственная калибровочная теория обладает калибровочной группой $SU(N + M) \times SU(N)$ (здесь M – число дробных бран). Изменение калибровочной группы по сравнению со случаем, когда дробные браны отсутствуют, приводит к явному нарушению конформной симметрии.

4. ВЗГЛЯД В БУДУЩЕЕ

С момента своего появления в 1997 г. и по сей день AdS/CFT-соответствие остается, пожалуй, основным направлением исследований в теоретической физике элементарных частиц. Главное количественное подтверждение того, что гипотеза Малдасены верна, связано с изучением интегрируемости $\mathcal{N} = 4$ теории поля [34] и двойственной $AdS_5 \times S^5$ сигма-модели (см., например, обзор [35]). В настоящей статье мы описали некоторые из результатов исследования AdS/CFT-соответствия в неинтегрируемых случаях с меньшим количеством суперсимметрий, в основном $\mathcal{N} = 1$ теориях. Как было показано, в этом случае большую роль играет изучение геометрии 5-многообразий Сасаки-Эйнштейна и связанных с ними комплексных поверхностей положительной кривизны. Мы убеждены, что понимание геометрических и физических аспектов этих моделей в будущем поможет пролить свет на более

тонкие аспекты AdS/CFT-соответствия и, возможно, на саму физическую причину существования такого соответствия. Важно отметить, что до сих пор объяснения AdS/CFT-соответствия из “первых принципов” квантовой теории поля и/или классической гравитации не существует. Выяснение физической сущности замечательной AdS/CFT-гипотезы остается одной из главных задач физики элементарных частиц.

Благодарности. Мне приятно воспользоваться этой возможностью и поздравить Андрея Алексеевича с юбилеем, пожелать ему быть здоровым, оптимистичным и получать удовольствие от жизни. Я хочу также поблагодарить его за ту поддержку, которую всегда от него ощущаю. Надеюсь, что ему будет интересно прочитать о развитии теории калибровочных полей, связывающем ее с красивыми геометрическими конструкциями. Моя работа поддержана частично РФФИ (гранты № 14-01-00695_а, 13-01-12405 офи_м2), а также Программой поддержки молодых ученых – кандидатов наук (грант МК-2510.2014.1).

Список литературы

- [1] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**:2 (1998), 231–252, arXiv: hep-th/9711200.
- [2] M. R. Douglas, G. W. Moore, *D-branes, quivers, and ALE instantons*, arXiv: hep-th/9603167.
- [3] S. Kachru, E. Silverstein, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:22 (1998), 4855–4858, arXiv: hep-th/9802183.
- [4] J. M. Figueroa-O’Farrill, E. Hackett-Jones, G. Moutsopoulos, *Class. Quant. Grav.*, **24**:13 (2007), 3291–3308, arXiv: hep-th/0703192.
- [5] C. Bär, *Commun. Math. Phys.*, **154**:3 (1993), 509–521.
- [6] D. Berenstein, C. P. Herzog, I. R. Klebanov, *JHEP*, **06** (2002), 047, 23 pp., arXiv: hep-th/0202150.
- [7] G. T. Horowitz, A. Strominger, *Nucl. Phys. B*, **360**:1 (1991), 197–209.
- [8] D. R. Morrison, M. R. Plesser, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **3**:1 (1999), 1–81, arXiv: hep-th/9810201.
- [9] E. Calabi, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **12**:2 (1979), 269–294.
- [10] D. Bykov, *The Kähler metric of a blow-up*, arXiv: 1307.2816.
- [11] P. Candelas, X. C. de la Ossa, *Nucl. Phys. B*, **342**:1 (1990), 246–268.
- [12] L. A. Pando Zayas, A. A. Tseytlin, *Phys. Rev. D*, **63**:8 (2001), 086006, 11 pp., arXiv: hep-th/0101043.
- [13] I. R. Klebanov, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **536**:1–2 (1998), 199–218, arXiv: hep-th/9807080.
- [14] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), **10**, Springer, Blin, 2002.
- [15] J. P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks, D. Waldram, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **8**:4 (2004), 711–734, arXiv: hep-th/0403002.
- [16] G. Tian, S.-T. Yau, *Commun. Math. Phys.*, **112**:1 (1987), 175–203.
- [17] B. Feng, A. Hanany, Y.-H. He, *Nucl. Phys. B*, **595**:1–2 (2001), 165–200, arXiv: hep-th/0003085.
- [18] S. Franco, A. Hanany, D. Martelli, J. Sparks, D. Vegh, B. Wecht, *JHEP*, **01** (2006), 128, 40 pp., arXiv: hep-th/0505211.
- [19] M. Cvetič, H. Lu, D. N. Page, C. N. Pope, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:7 (2005), 071101, 4 pp., arXiv: hep-th/0504225.
- [20] M. Wijnholt, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7**:6 (2004), 1117–1153, arXiv: hep-th/0212021.
- [21] H. Verlinde, M. Wijnholt, *JHEP*, **01** (2007), 106, 31 pp., arXiv: hep-th/0508089.

- [22] K. A. Intriligator, B. Wecht, *Nucl. Phys. B*, **667**:1 (2003), 183–200, arXiv: hep-th/0304128.
- [23] E. Witten, *JHEP*, **07** (1998), 006, 39 pp., arXiv: hep-th/9805112.
- [24] D. Martelli, J. Sparks, S.-T. Yau, *Commun. Math. Phys.*, **268**:1 (2006), 39–65, arXiv: hep-th/0503183.
- [25] I. R. Klebanov, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **556**:1–2 (1999), 89–114, arXiv: hep-th/9905104.
- [26] I. R. Klebanov, A. Murugan, *JHEP*, **03** (2007), 042, 25 pp., arXiv: hep-th/0701064.
- [27] D. Bykov, *Comments on the del Pezzo cone*, arXiv: 1405.2319.
- [28] D. Martelli, J. Sparks, *J. Geom. Phys.*, **59**:8 (2009), 1175–1195, arXiv: 0707.1674.
- [29] V. Apostolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon, *J. Differ. Geom.*, **73**:3 (2006), 359–412.
- [30] D. Martelli, J. Sparks, *JHEP*, **04** (2008), 067, 44 pp., arXiv: 0709.2894.
- [31] L. A. Pando Zayas, A. A. Tseytlin, *JHEP*, **11** (2000), 028, 20 pp., arXiv: hep-th/0010088.
- [32] I. R. Klebanov, M. J. Strassler, *JHEP*, **08** (2000), 052, 35 pp., arXiv: hep-th/0007191.
- [33] I. R. Klebanov, A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **578**:1–2 (2000), 123–138, arXiv: hep-th/0002159.
- [34] J. A. Minahan, K. Zarembo, *JHEP*, **03** (2003), 013, 29 pp., arXiv: hep-th/0212208.
- [35] G. Arutyunov, S. Frolov, *J. Phys. A*, **42**:25 (2009), 254003, 121 pp., arXiv: 0901.4937.

Поступила в редакцию 24.06.2014