Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Я. Арефьева, А. А. Багров, Голографическое описание конических дефектов, *ТМФ*, 2015, том 182, номер 1, 3–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8747>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:30:06

© 2015 г.

И. Я. Арефьева*, А. А. Багров†

ГОЛОГРАФИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОНИЧЕСКИХ ДЕФЕКТОВ

Рассмотрен движущийся конический дефект в пустом пространстве-времени AdS_3 и вычислены двухточечные корреляционные функции соответствующей двумерной граничной квантовой теории поля в рамках геодезического приближения. Показано, что присутствие дефекта приводит к линзированию геодезических, проявляющемуся в дуальной теории поля через возникновение конечного числа функционально схожих вкладов в функцию Грина, соответствующих намоткам геодезических в балке вокруг конической особенности. Продемонстрировано, что для квантованного дефицита угла $\gamma = \pi/2n$ такое линзирование индуцирует возбуждения типа доменной стенки в спектре граничной теории поля.

Ключевые слова: AdS/CFT-дуальность, конические дефекты, голографическая дуальность.

DOI: 10.4213/tmf8747

1. ВВЕДЕНИЕ

AdS/CFT-соответствие [1] в настоящее время рассматривается как наиболее мощный и универсальный инструмент анализа непертурбативных явлений в квантовой теории поля как в контексте физики высоких энергий [2], [3], так и в контексте физики конденсированных состояний [4]. Сила данной дуальности главным образом заключается в ее гибкости: по всей видимости, “словарь” AdS/CFT-соответствия применим к очень широким классам метрик с AdS-асимптотикой, а потому может быть использован для изучения свойств неконформных квантовых теорий поля при ненулевой температуре, ненулевом химическом потенциале, для модулированных потенциалом внешних решеток, содержащих явное инфракрасное обрезание и пр.

Среди прочих, одна из естественных и простых возможностей подвергнуть теорию поля неконформной деформации заключается в том, чтобы поместить топологический дефект в балк пространства AdS . В настоящей работе мы рассматриваем

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: arefeva@mi.ras.ru

†Instituut-Lorentz for Theoretical Physics, Leiden University, Leiden, The Netherlands.
E-mail: bagrov@lorentz.leidenuniv.nl

конический дефект в пространстве AdS_3 , порожденный движущейся массивной частицей (лоренц-преобразование метрики Дезера–’т Хоофта [5], [6]), и вычисляем двухточечные корреляционные функции в дуальной $(1+1)$ -мерной теории в рамках геодезического приближения. Анализ корреляционных функций в теориях с коническими дефектами – предмет многолетних исследований (см. недавнюю работу [7] и ссылки в ней). В настоящей статье мы имеем дело не с реальными дефектами в граничной теории поля, а с дефектами во вспомогательном голографическом пространстве-времени. Рассмотрение конических дефектов подобного типа инициировано работой [8]. В определенном смысле наш анализ дополняет анализ, проведенный в работе [9], где рассматривалась космическая струна в пространстве AdS_4 , ортогональная конформной границе пространства времени и “протыкающая” ее. Влияние космических мембран в пространстве AdS_5 на наблюдаемые в четырехмерной граничной теории поля проанализировано в статье [10] в контексте феноменологического сценария дополнительных измерений. Модели пространства dS с коническими дефектами связаны с космическими струнами в расширяющейся Вселенной.

Настоящая статья организована следующим образом. В разделе 2 мы определяем базовые объекты, необходимые для дальнейшего анализа. Для начала мы приводим алгебраическое представление пространства-времени AdS_3 , как пустого, так и содержащего массивные частицы. Также мы напомним основные идеи геодезического приближения в голографии, которое используем для вычисления двухточечной корреляционной функции в граничной теории. В разделе 3 мы применяем это приближение к анализу теории, дуальной коническому дефекту в балке (рассматривается как статический случай, так и случай дефекта, движущегося по круговой орбите). В разделе 4 мы рассматриваем импульсное представление полученных корреляционных функций. В разделе 5 мы кратко обсуждаем полученные результаты, а также указываем на возможную связь наших рассмотрений с вычислениями зацепленной энтропии в неконформных двумерных системах.

2. ОСНОВНЫЕ ОБЪЕКТЫ

2.1. Алгебраическое представление пространства AdS_3 . Наиболее удобным языком, позволяющим достичь желаемых результатов, является алгебраическое описание пространства-времени AdS_3 , которое основано на том факте, что это пространство локально изометрично накрывающей группового многообразия $SL(2, \mathbb{R})$. Используя эту изометрию, можно представить как точки, так и преобразования пространства, соответствующие размещению материальных источников в балке, в форме вещественных матриц размера 2×2 . Тем самым многие проблемы можно свести к решению простых матричных уравнений.

В нашей статье мы будем активно использовать технику, разработанную в статьях [11]–[13] и приспособленную к этому описанию.

Пространство-время AdS_3 может быть накрыто глобальной координатной картой (τ, χ, ϕ) , где $\chi \geq 0$, $\phi \simeq \phi + 2\pi$, $\tau \in (-\infty, \infty)$ (так называемые “бочечные” координаты [14]). Метрика пространства в этих координатах имеет вид

$$ds^2 = d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi d\phi^2 - \text{ch}^2 \chi d\tau^2. \quad (1)$$

Также мы будем использовать координату диска Пуанкаре r , связанную с ρ по формуле $r = \text{th}(\chi/2)$ и приводящую к метрике вида

$$ds^2 = -\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 d\tau^2 + \left(\frac{2}{1-r^2}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\phi^2), \quad r < 1. \quad (2)$$

В терминах бочечных координат или координаты r групповое многообразие $SL(2, \mathbb{R})$ может быть параметризовано как

$$\mathbf{x} = \text{ch } \chi \mathbf{\Omega}(\tau) + \text{sh } \chi \mathbf{\Gamma}(\phi) = \frac{1+r^2}{1-r^2} \mathbf{\Omega}(\tau) + \frac{2r}{1-r^2} \mathbf{\Gamma}(\phi),$$

где

$$\mathbf{\Omega}(\tau) = \cos \tau \mathbf{1} + \sin \tau \gamma_0, \quad \mathbf{\Gamma}(\phi) = \cos \phi \gamma_1 + \sin \phi \gamma_2. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{1}$ – единичная матрица, а гамма-матрицы образуют ортонормированный базис ассоциированной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ бесследовых матриц:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{\Omega}(\tau)$ и $\mathbf{\Gamma}(\phi)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}(\tau)\mathbf{\Omega}(\tau') &= \mathbf{\Omega}(\tau + \tau'), & \mathbf{\Omega}(\tau)\mathbf{\Gamma}(\phi') &= \mathbf{\Gamma}(\tau + \phi'), \\ \mathbf{\Gamma}(\phi)\mathbf{\Gamma}(\phi') &= \mathbf{\Omega}(\phi - \phi'), & \mathbf{\Gamma}(\phi)\mathbf{\Omega}(\tau') &= \mathbf{\Gamma}(\phi - \tau'). \end{aligned}$$

Таким образом, метрика (1) есть не что иное, как метрика Картана–Киллинга

$$ds^2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{x}^{-1} d\mathbf{x} \mathbf{x}^{-1} d\mathbf{x}),$$

2.2. Точечная частица в пространстве AdS_3 . Как было показано Дезером и 'т Хоофтом [6], [5], в трехмерной теории гравитации Эйнштейна воздействие массивной точечной частицы на пространство-время заключается в том, что, сохраняя метрику локально неизменной, она порождает коническую сингулярность, голономия $\mathbf{u}$ которой определяется массой частицы и ее кинетическими характеристиками [12]. При массах частицы ниже определенного порога этот эффект проявляется одинаковым образом как в плоском пространстве, так и в присутствии космологической постоянной.

Точнее, помещение стационарной точечной массивной частицы в $(2+1)$ -мерное пространство Минковского приводит к вырезанию клина из исходного пространства, причем дефицит угла пропорционален массе частицы. Грани клина при этом отождествляются, что приводит к появлению конической сингулярности в точке нахождения частицы, остальное пространство при этом остается плоским.

Если частица движется по определенной нетривиальной траектории, точки на гранях клина в пространстве-времени, исходящих из мировой линии частицы, должны отождествляться при одинаковых временах в системе покоя частицы. При этом в системе отсчета внешнего наблюдателя пространство-время подвергается изометрии (являющейся также преобразованием Лоренца), множество неподвижных точек которой есть мировая линия частицы.

Чтобы получить подобное пространство постоянной кривизны, содержащее точечную частицу, мы применим описанную ниже процедуру разрезания и склейки.

2.2.1. *Стационарная точечная частица в пространстве AdS_3 .* Рассмотрим стационарную точечную массу, расположенную в начале координат $\chi = 0$. В этом случае из каждого сечения при постоянном времени τ необходимо удалить клин, ограниченный пространственноподобными геодезическими, исходящими из начала координат, а сами геодезические отождествить. Угол 2γ между гранями клина пропорционален массе частицы.

Математическая формализация данной процедуры заключается в том, что передняя грань клина (1-face) параметризуется матрицами вида

$$\mathbf{x}_{1\text{-face}} = \text{ch } \chi \, \boldsymbol{\Omega}(\beta) + \text{sh } \chi \, \boldsymbol{\Gamma}(-\gamma), \quad (4)$$

зависящими от двух переменных χ и β , $\chi \geq 0$, $-\infty \leq \beta \leq \infty$. Величина 2γ фиксирована. Задняя грань клина (2-face) задается формулой

$$\mathbf{x}_{2\text{-face}} = \text{ch } \chi \, \boldsymbol{\Omega}(\beta) + \text{sh } \chi \, \boldsymbol{\Gamma}(\gamma). \quad (5)$$

Две этих грани связаны друг с другом преобразованием

$$\mathbf{x}_{2\text{-face}} = B^{-1} \mathbf{x}_{1\text{-face}} B, \quad (6)$$

где $B = \boldsymbol{\Omega}(-\gamma)$, а $\boldsymbol{\Omega}$ задана формулой (3). Очевидно, что линия $\chi = 0$ инвариантна относительно действия данного преобразования в том смысле, что матрица

$$\mathbf{x}_0(\beta) \equiv \boldsymbol{\Omega}(\beta) \quad (7)$$

удовлетворяет тождеству

$$B^{-1} \mathbf{x}_0 B = \mathbf{x}_0. \quad (8)$$

Можно сказать, что преобразование B , имеющее в качестве множества неподвижных точек мировую линию покоящейся частицы, является математическим представлением точечного источника в трехмерной гравитации.

Для наших будущих целей, связанных с построением голографического дуального описания машины времени Готта (этому вопросу будет посвящена следующая статья), полезно обсудить следующий нюанс. Заметим, что матричное представление граней клина (4), (5) не единственно. Не нарушая условий (6) и (8), можно положить

$$\mathbf{x}_{1\text{-face}} = \text{ch } \chi \, \boldsymbol{\Omega}(\beta) + \text{sh } \chi \, \boldsymbol{\Gamma}(\beta - \gamma), \quad (9)$$

$$\mathbf{x}_{2\text{-face}} = \text{ch } \chi \, \boldsymbol{\Omega}(\beta) + \text{sh } \chi \, \boldsymbol{\Gamma}(\beta + \gamma), \quad (10)$$

и тогда грани клина можно представить как вращающиеся прямые линии, замещающие в пространстве-времени спираль.

2.2.2. *Движущаяся коническая особенность.* В данном пункте мы обсуждаем пространство-время, порожденное массивной частицей, движущейся в пространстве AdS_3 определенным образом, а именно обращающейся вокруг центра пространства AdS_3 по круговой орбите¹⁾. Данное пространство-время является существенным ингредиентом AdS-модификации машины времени Готта [15], и его можно получить преобразованием буста массивной точечной частицы, расположенной в центре пространства AdS_3 . Чтобы найти соответствующие матрицы идентификации,

¹⁾Конечно, так как пространство AdS максимально симметрично, его центром можно считать любую точку.

необходимо найти такое преобразование матрицы (7), отвечающей покоящейся частице, которое переводит ее в матрицу, соответствующую частице, движущейся по спирали,

$$\mathbf{x}_{\text{spiral}}(\beta, \psi_0) = \text{ch } \psi_0 \mathbf{\Omega}(\beta) + \text{sh } \psi_0 \mathbf{\Gamma}(\beta), \quad (11)$$

где β – непрерывный параметр, а ψ_0 фиксировано. Спираль $\mathbf{x}_{\text{spiral}}$ задается преобразованием Лоренца $\mathbf{x}_{\text{spiral}} = \mathbf{x}_0 \mathbf{L}(\psi_0)$, где

$$\mathbf{L}(\psi_0) = \text{ch } \psi_0 \mathbf{\Omega}(0) + \text{sh } \psi_0 \mathbf{\Gamma}(0). \quad (12)$$

Действуя на первую грань (9) преобразованием Лоренца (12), мы получаем множество матриц, описывающих лидирующую грань (1-mov-face) движущегося клина:

$$\mathbf{x}_{1\text{-mov-face}} = \mathbf{x}_{1\text{-face}} \mathbf{L}(\psi_0). \quad (13)$$

Параметризуя лидирующую грань как

$$\mathbf{x}_{1\text{-mov-face}} = \text{ch } \chi^{(1)} \mathbf{\Omega}(t^{(1)}) + \text{sh } \chi^{(1)} \mathbf{\Gamma}(\phi^{(1)}),$$

мы получаем для $t^{(1)}$, $\phi^{(1)}$, $\chi^{(1)}$ формулы

$$\text{tg } t^{(1)} = \frac{\text{tg } \beta - \text{th } \chi \text{ th } \psi_0 (\sin \gamma - \text{tg } \beta \cos \gamma)}{1 + \text{th } \chi \text{ th } \psi_0 (\cos \gamma + \text{tg } \beta \sin \gamma)},$$

$$\text{tg } \phi^{(1)} = \frac{\text{th } \chi (-\sin \gamma + \text{tg } \beta \cos \gamma) + \text{th } \psi_0 \text{tg } \beta}{\text{th } \chi (\cos \gamma + \text{tg } \beta \sin \gamma) + \text{th } \psi_0},$$

$$\text{ch } \chi^{(1)} = \text{ch } \chi \text{ ch } \psi_0 \cos \beta \times$$

$$\times [(\text{tg } \beta + \text{th } \chi \text{ th } \psi_0 (\text{tg } \beta \cos \gamma - \sin \gamma))^2 + (1 + \text{th } \chi \text{ th } \psi_0 (\cos \gamma + \text{tg } \beta \sin \gamma))^2]^{1/2}.$$

Запаздывающая грань (2-mov-face) задается уравнением

$$\mathbf{x}_{2\text{-mov-face}} = \mathbf{x}_{2\text{-face}} \mathbf{L}(\psi_0),$$

и мы имеем

$$\mathbf{x}_{2\text{-mov-face}} = \mathbf{\Omega}(\gamma) \mathbf{x}_{1\text{-mov-face}} \mathbf{\Omega}_{\mathbf{L}}(-\gamma, \psi_0).$$

Здесь мы использовали соотношение (13) и ввели обозначение

$$\mathbf{\Omega}_{\mathbf{L}}(-\gamma, \psi_0) \equiv \mathbf{L}^{-1}(\psi_0) \mathbf{\Omega}(-\gamma) \mathbf{L}(\psi_0).$$

Таким образом, формула идентификации имеет простой вид

$$\mathbf{y}' = \mathbf{\Omega}(\gamma) \mathbf{y} \mathbf{\Omega}_{\mathbf{L}}(-\gamma, \psi_0). \quad (14)$$

Нетрудно убедиться, что спираль (11) инвариантна относительно действия изометрии (14),

$$\mathbf{x}'_{\text{spiral}} = \mathbf{\Omega}(\gamma) \mathbf{x}_{\text{spiral}}(\psi_0) \mathbf{\Omega}_{\mathbf{L}}(-\gamma, \psi_0) = \mathbf{x}_{\text{spiral}}.$$

На границе пространства AdS_3 имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \phi_{1,2} &= \frac{\sin \beta \operatorname{th} \psi_0 + \sin(\beta \mp \gamma)}{\cos \beta \operatorname{th} \psi_0 + \cos(\beta \mp \gamma)}, \\ \operatorname{tg} t_{1,2} &= \frac{\sin \beta + \operatorname{th} \psi_0 \sin(\beta \mp \gamma)}{\cos \beta + \operatorname{th} \psi_0 \cos(\beta \mp \gamma)}. \end{aligned}$$

Здесь ϕ_1 соответствует знаку минус в $\beta \mp \gamma$, а ϕ_2 – знаку плюс. Компоненты вектора смещения (ϕ_0, τ_0) имеют вид

$$\phi_0 = \phi_1 - \phi_2, \quad \tau_0 = \tau_1 - \tau_2$$

и могут быть записаны как

$$\tau_0 = -2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{th} \psi_0 \sin \gamma}{1 + \operatorname{th} \psi_0 \cos \gamma}, \quad \phi_0 = -2 \operatorname{arctg} \frac{\sin \gamma}{\operatorname{th} \psi_0 + \cos \gamma}, \quad (15)$$

что с точностью до знака соответствует результату из работы [15].

2.3. Геодезическое приближение в AdS/CFT -соответствии. Чтобы прояснить голографическую интерпретацию структуры, описанной выше, сделаем шаг в сторону и обсудим другую тему – геодезическое приближение в голографии. Одним из базовых элементов словаря AdS/CFT -соответствия является соответствие между конформными размерностями операторов в граничной теории поля и массами дуальных полей в балке. Говоря конкретнее, если мы рассмотрим бозонное или фермионное поле массы $m_{b,f}$ в балке пространства AdS , а радиус пространства AdS положим равным L , то будут иметь место следующие соотношения для бозонов и фермионов соответственно:

$$\Delta_b = \frac{d}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{d^2 + 4m_b^2 L^2} \quad \text{и} \quad \Delta_f = \frac{1}{2} + m_f L;$$

здесь d – размерность границы пространства AdS . В нашем случае $d = 2$.

Если масса поля в балке очень велика, $mL \gg 1$, естественно ожидать, что соответствующие возбуждения в балке будут распространяться вдоль классических траекторий, вероятность значительных отклонений от которых будет невелика. Таким образом, применимо квазиклассическое приближение геометрической оптики, и можно предположить, что вся существенная информация о двухточечных корреляционных функциях закодирована в длинах классических геодезических, соединяющих точки на границе.

Геодезическое приближение является очень простым и эффективным инструментом анализа граничной теории [8]. Для начала рассмотрим случай пустого пространства AdS_3 . Будем работать в глобальных координатах (1). Конформная граница расположена при $\chi \rightarrow \infty$ или $r \rightarrow 1$ в обозначениях (2).

Для одновременных геодезических (для $d\tau = 0$) имеем $dL^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\phi^2$. Поскольку метрика пространства-времени расходится вблизи границы, формально длины интересующих нас геодезических бесконечны, а потому должны быть перенормированы (длину перенормированной геодезической мы обозначаем как L_{ren}). Наиболее простой способ совершить перенормировку – произвести ультрафиолетовое обрезание, рассмотрев геодезическую между точками с (χ, ϕ) -координата-

ми $(\chi_m, -\phi_m)$ и (χ_m, ϕ_m) . Легко видеть, что длина такой геодезической равна (ср. с работой [16])

$$L = \ln \frac{4 \sin^2 \phi_m}{\delta^2},$$

где $\delta \approx 2e^{-\chi_m}$ – параметр регуляризации. Естественный ответ для перенормированной длины в таком случае имеет вид

$$L_{\text{ren}} = \ln(4 \sin^2 \phi_m).$$

Из условия инвариантности относительно поворотов по ϕ следует, что

$$L_{\text{ren}}((0, \phi_1); (0, \phi_2)) = \ln \left(4 \sin^2 \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right).$$

Таким образом, для двухточечной корреляционной функции окончательно получаем

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(0, \phi_1) \mathcal{O}_\Delta(0, \phi_2) \rangle = e^{-\Delta L_{\text{ren}}} = \left(\frac{1}{4 \sin^2((\phi_1 - \phi_2)/2)} \right)^\Delta.$$

Видно, что она сингулярна при $\phi_1 - \phi_2 = 2\pi n$. Обобщая данное выражение на случай произвольной метрики и неодновременных геодезических, для двухточечной корреляционной функции операторов конформного веса $\Delta \gg 1$ получаем

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(t_1, x_1) \mathcal{O}_\Delta(t_2, x_2) \rangle = e^{-\Delta L_{\text{ren}}(t_1, x_1; t_2, x_2)}. \quad (16)$$

Если две точки разделены времениподобным интервалом, $(t_1 - t_2)^2 > (\phi_1 - \phi_2)^2$, возникают определенные тонкости с применением данного рецепта. В этом случае не существует вещественных геодезических, соединяющих подобные точки. Однако можно получить ответ для корреляционной функции, введя понятие комплексифицированных геодезических подобно тому, как это было сделано для диска Пуанкаре [17] (см. детали в приложении). Голографическое соответствие (16) остается неизменным, и перенормированный двухточечный коррелятор в пространстве AdS_3 принимает вид

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(\tau_1, \phi_1) \mathcal{O}_\Delta(\tau_2, \phi_2) \rangle = e^{-\Delta L_{\text{ren}}} = \left(\frac{1}{\cos(\tau_1 - \tau_2) - \cos(\phi_1 - \phi_2)} \right)^\Delta. \quad (17)$$

3. ФУНКЦИЯ ГРИНА В КООРДИНАТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

3.1. Стационарная коническая особенность. Рассуждая в терминах геодезического приближения, очень легко понять, как наличие конического дефекта изменяет свойства граничной теории поля. Ранее в пустом пространстве AdS_3 для любой пары точек на границе существовала единственная (вещественная или комплексная) геодезическая, соединяющая их. Помещение в балк конической особенности приводит к линзированию геодезических в том смысле, что пара граничных точек теперь может быть соединена несколькими геодезическими, закручивающимися вокруг конической особенности.

Тождество (16) при этом принимает вид

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(t_1, x_1) \mathcal{O}_\Delta(t_2, x_2) \rangle = \sum_{i=1}^n e^{-\Delta L_{\text{ren}}^i(t_1, x_1; t_2, x_2)}$$

Рис. 1. Дефицит угла $2\gamma < \pi$. При $|\phi_A - \phi_B| < \pi - 2\gamma$ существует только одна геодезическая AB , соединяющая отождествленные точки A и A^* на границе вырезанного клина с точкой B (изображена сплошной линией AB ; штриховая линия A^*B не является физически реальной). Для точки B_1 , лежащей между C и C^* , т. е. такой, что $|\phi_A - \phi_B| > \pi - 2\gamma$, существуют две физически различные геодезические AB_1 и A^*B_1 , которые соединяют точку B_1 с A и A^* .

(здесь индекс i нумерует все возможные геодезические, соединяющие данные точки). Если учесть, что вклад неминимальных геодезических подавлен при больших Δ , имеем

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(t_1, x_1) \mathcal{O}_\Delta(t_2, x_2) \rangle \simeq \max_{i=1, \dots, n} e^{-\Delta L_{\text{ren}}^i(t_1, x_1; t_2, x_2)}.$$

Мы будем проводить вычисления корреляционных функций с использованием первой формулы, поскольку она позволяет сгладить нефизические сингулярности, которые возникают, когда две геодезических l_1 и l_2 , соединяющие пару точек (t_1, x_1) и (t_2, x_2) , имеют одинаковую длину. Кроме того, несмотря на малость вклада неминимальных геодезических, в определенных ситуациях именно они приводят к физически нетривиальным эффектам (это будет особенно очевидно в случае двух вращающихся конических особенностей, который мы рассмотрим в отдельной статье).

Как было сказано выше, деформированное пространство, возникающее, когда в балк пространства AdS_3 помещается массивный источник, можно представить как конус – пространство с вырезанным клином и отождествленными гранями. Данный способ визуализации следует принимать с осторожностью: скорее следует утверждать, что пространство-время сжимается определенным образом, превращаясь в конус, поскольку никакие физические точки при этой процедуре на самом деле не удаляются.

Локально метрическая структура пространства-времени остается неизменной, что позволяет представить геодезические на конусе через их соответствие геодезическим в пустом пространстве AdS_3 . Проще всего понять геодезическую структуру такого конуса, взглянув на рис. 1, 2. Пока что для простоты будем говорить о геодезических, лежащих в сечении при постоянном времени.

Для начала обсудим случай, когда дефицит угла $2\gamma < \pi$. Точки A и A^* , принадлежащие отождествленным сторонам клина, являются физически эквивалентными.

Рис. 2. Угол раскрытия конуса не равен $2\pi/n$, $n \in \mathbb{N}$. Изображен случай $2\pi - 2\gamma = 2\pi/3 + \alpha$, где $\alpha < 2\pi/3$ (здесь $n = 3$). Геодезические AB и A^*B лежат в физическом секторе AOA^* . Геодезическая BA_1 выходит из физического сектора; ее часть KA_1 , которая лежит вне физического сектора, изображена штриховой линией. Часть A_1K при повороте диска на угол $2\pi - 2\gamma$ переходит в часть геодезической A^*K^* , и длина геодезической A_1B есть сумма длин частей KB и A^*K^* . Линию BA_1 можно представить как результат намотки на коническую особенность. Эта намотка состоит из KB и A^*K^* . Геодезическая A_2B , выходящая из физического сектора, может быть представлена как намотка, состоящая из K_1^*B и $A'K_1$.

Произвольная точка B на границе, удовлетворяющая условию $|\phi_A - \phi_B| < \pi - 2\gamma$, может быть соединена с каждой из них не более чем одной геодезической (соединение двумя геодезическими возможно, если $\pi - 2\gamma < |\phi_A - \phi_B| < \pi$), см. рис. 1.

Полное число геодезических в данном случае равно 1 или 2, и соответствующая корреляционная функция с точностью до нормировки задается формулой

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}_\Delta(A) \mathcal{O}_\Delta(B) \rangle &= e^{-\Delta L_{\text{ren}}(B;A)} \theta(\pi - (\phi_B - \phi_A)) + e^{-\Delta L_{\text{ren}}(B;A^*)} \theta(\pi - (\phi_B - \phi_A^*)) = \\ &= \frac{\theta(\pi - (\phi_B - \phi_A))}{(\cos(\phi_A - \phi_B))^\Delta} + \frac{\theta(\pi - (\phi_B - \phi_A^*))}{(\cos(\phi_A^* - \phi_B))^\Delta}.\end{aligned}$$

Если $\pi < 2\gamma < 2\pi$ (см. рис. 2), то пара физически различных точек A и B может быть соединена конечным числом геодезических (теперь как минимум двумя). Это легко увидеть, если покрыть диск Пуанкаре координатным атласом, карты которого являются развертками конуса (т. е. секторами круга с углом раскрытия $\pi - 2\gamma$). В таком представлении точка A имеет множественное число образов на диске Пуанкаре, кроме A^* (точки A_1, A_2 на рис. 2), и каждая геодезическая на диске, соединяющая B с одним из этих образов, может быть спроецирована на физическое коническое пространство и поэтому может рассматриваться как геодезическая на конусе, соединяющая B и A или A^* , но при этом оборачивающаяся вокруг конической особенности.

Если дефицит угла таков, что $2\pi - 2\gamma = 2\pi/n + \alpha$, где $0 < \alpha < 2\pi/n$, то максимальное число геодезических может быть равно $w_{\max} = n$ (см. рис. 2), и функция

Рис. 3. Угол раскрытия конуса является целой частью числа 2π , т. е. дефицит угла 2γ удовлетворяет соотношению $2\pi - 2\gamma = 2\pi/n$ для $n = 2, 3, 4, 5$.

Грина граничной теории принимает вид

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(A) \mathcal{O}_\Delta(B) \rangle \sim \sum_{l=0}^{\dots} \frac{\theta(\pi - |\phi_B - \phi_A - 2l(\pi - \gamma)|)}{|\cos(\phi_B - \phi_A - 2l(\pi - \gamma))|^\Delta} + \sum_{l=0}^{\dots} \frac{\theta(\pi - |-\phi_B + \phi_A^* + 2l(\pi - \gamma)|)}{|\cos(\phi_A^* + 2l((\pi - \gamma) - \phi_B))|^\Delta},$$

где верхний предел суммы $\dots$ означает, что мы должны суммировать члены до тех пор, пока функция Хевисайда не станет равной нулю.

Если дефицит угла таков, что $2\pi - 2\gamma = 2\pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, то n слагаемых вносят вклад в корреляционную функцию (см. рис. 3), и функция Грина принимает вид

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(A) \mathcal{O}_\Delta(B) \rangle \sim \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{|\cos(\phi_B - \phi_A - 2l(\pi - \gamma))|^\Delta}.$$

Чтобы обобщить эти рассуждения на случай произвольных геодезических (а не только лежащих в сечении постоянного времени), мы должны использовать алгебраическое представление, описанное в п. 2.1.

Рис. 4. Вклады в одновременные корреляционные функции вида $-\ln \frac{1-\cos(\phi-\phi^*)}{2}$, $0 < \phi < 2\pi$, обусловленные различными геодезическими (при различных значениях ϕ^*). На рис. “в”, “д” и “ж” изображены функции, заданные как максимум функций на соседних рисунках “б”, “г” и “е” соответственно (на меньшем интервале значений ϕ).

Очевидно, основной вклад в корреляционную функцию вносят геодезические, не наматывающиеся вокруг конической особенности. В качестве примера на рис. 4 изображены корреляционные функции для операторов нулевого конформного веса²⁾. На рис. 4а изображен график корреляционной функции $-\ln[(1 - \cos \phi)/2]$,

²⁾Разумеется, формально геодезическое приближение применимо только при $\Delta \gg 1$, и значение $\Delta = 0$ лежит далеко за пределами области его применимости. Тем не менее мы все равно можем надеяться, что геодезическое приближение позволяет получать качественно верные результаты.

Рис. 5. Вклад кратчайшей геодезической в одновременный коррелятор при конформном весе $\Delta = 1$ изображен жирной линией; приближение двух геодезических изображено тонкой линией (а). Та же картина при $\Delta = 3$ (б).

$0 < \phi < 2\pi$. На рис. 4б приведены в сравнении вклад в корреляционную функцию, равный $-\ln[(1 - \cos \phi)/2]$ (жирная линия), и вклад $-\ln[(1 - \cos(\phi - 1.9\pi))/2]$, т. е. соответствующий малому дефициту угла (тонкая линия), при $0 < \phi < \pi$. На рис. 4в изображена функция Грина, заданная в каждой точке как максимум из двух вкладов на рис. 4б, при $0 < \phi < \pi$. На рис. 4г жирная линия представляет вклад в корреляционную функцию $-\ln[(1 - \cos \phi)/2]$, тонкая линия – вклад $-\ln[(1 - \cos(\phi - \pi))/2]$, $0 < \phi < 2\pi$. На рис. 4д изображена функция Грина, заданная в каждой точке как максимум из двух вкладов на рис. 4г, при $0 < \phi < \pi$. На рис. 4е жирная, тонкая, штриховая и штрихпунктирная линии суть вклады в корреляционную функцию $-\ln(1 - \cos \phi)/2$, $-\ln[(1 - \cos(\phi - 0.4\pi))/2]$, $-\ln[(1 - \cos(\phi - 2 \cdot 0.4\pi))/2]$ и $-\ln[(1 - \cos(\phi - 3 \cdot 0.4\pi))/2]$ при $0 < \phi < 2\pi$. На рис. 4ж представлена функция Грина, заданная в каждой точке как максимум из четырех вкладов на рис. 4е, при $0 < \phi < 0.4\pi$.

3.2. Сравнение приближений одной и двух геодезических. Как было отмечено выше, приближение одной геодезической хорошо работает при больших конформных весах Δ . Однако учет лишь кратчайшей геодезической приводит к изломам корреляционной функции в точках “смены геодезической” (см. рис. 5). Данные сингулярности можно устранить, если принять во внимание вклад нелидирующей геодезической и сложить его с лидирующим вкладом.

Подобная картина имеет место и для неодновременных геодезических. Рассмотрим евклидову версию неодновременных корреляционных функций операторов конформного веса $\Delta = 0$. Результаты расчета изображены на рис. 6. Корреляционные функции в пространстве движущейся частицы содержат больше сингулярностей.

Рис. 6. Корреляторы $-\ln[(\text{ch } t - \cos \phi)/2]$ (показаны жирными линиями) и $-\ln[(\text{ch } t - \cos(\phi - \pi))/2]$ (тонкие линии) при различных значениях t (а). Корреляционные функции, определенные как максимум двух соответствующих корреляционных функций (изображенных одностипными жирными и тонкими линиями) на рис. “а” при $0 < \phi < \pi/2$ (б).

3.3. Движущаяся коническая особенность. В данном пункте мы рассмотрим корреляционные функции теории на границе пространства AdS_3 , содержащего одну массивную точечную частицу, движущуюся по спирали:

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(A) \mathcal{O}_\Delta(B) \rangle_{\text{MP}} \equiv G_\Delta(\tau, \phi | \tau_0, \phi_0),$$

где $A = (0, 0)$, $B = (\tau, \phi)$, а вектор идентификации (τ_0, ϕ_0) обусловлен движением частицы.

В приближении одной геодезической функция $G_\Delta(\tau, \phi | \tau_0, \phi_0)$ задается как

$$G_\Delta(\tau, \phi | \tau_0, \phi_0) = \frac{\theta(-|\cos \tau - \cos \phi| + |\cos(\tau - \tau_0) - \cos(\phi - \phi_0)|)}{(\cos \tau - \cos \phi)^\Delta} + \frac{\theta(|\cos \tau - \cos \phi| - |\cos(\tau - \tau_0) - \cos(\phi - \phi_0)|)}{(\cos(\tau - \tau_0) - \cos(\phi - \phi_0))^\Delta}. \quad (18)$$

Для движущейся частицы компоненты вектора идентификации (τ_0, ϕ_0) определяются кинематикой частицы. Положение соответствующего данному вектору образа точки показано на рис. 7.

Чтобы проанализировать свойства функции (18), рассмотрим обратный пропагатор поля конформного веса $\Delta = 1$ при различных векторах идентификации:

$$F(\tau, \phi) = f_1(\tau, \phi)\theta(-|\cos \tau - \cos \phi| + |\cos(\tau - \tau_0) - \cos(\phi - \phi_0)|) + f_2(\tau, \phi)\theta(|\cos \tau - \cos \phi| - |\cos(\tau - \tau_0) - \cos(\phi - \phi_0)|). \quad (19)$$

$$f_1(\tau, \phi) = \cos \tau - \cos \phi, \quad f_2(\tau, \phi) = f(\tau - \tau_0, \phi - \phi_0).$$

Функция $F(\tau, \phi)$ имеет нули (полюсы функции $G_\Delta(\tau, \phi | \tau_0, \phi_0)$), разрывы и изломы. Нули расположены в точках, где хотя бы одна из функций $f_1(\tau, \phi)$ или $f_2(\tau, \phi)$ равна нулю. Нули функции $f(\tau, \phi)$ соответствуют положениям образующих исходного

Рис. 7. На рис. “а” представлено схематичное трехмерное изображение пространства AdS_3 , содержащего движущуюся по спирали массивную частицу (ее траектория показана жирной штриховой линией). Дефицит угла меньше π . Стрелка из A в A^* показывает отождествление точки A и ее образа A^* . На рис. “б” изображено сечение при постоянном координатном времени τ конического пространства AdS_3 . Жирные линии обозначают отождествленные грани клина. Точки A и A^* принадлежат разным сечениям постоянного времени.

Рис. 8. Функции $f_1(\tau, \phi)$ (штриховая линия), $f_2(\tau, \phi)$ (пунктирная линия) и $F(\tau, \phi)$ (сплошная линия), заданные в (19), при $\phi_0 = \pi/2$ и различных значениях τ_0 .

Рис. 9. На рис. “а” показана причинная структура пространства-времени, содержащего движущийся конический дефект (слева), и соответствующие полюсы пропагатора в физическом пространстве (справа). На рис. “б” показано движение скачков (сплошные линии) и разрывов (штриховые линии) производной функции Грина (слева), а также появление и исчезновение во времени скачков и разрывов производной (справа).

светового конуса в граничной теории поля; нули функции $f_2(\tau, \phi)$ сдвинуты в точку (τ_0, ϕ_0) вследствие эффекта линзирования. Также имеют место разрывы при $|\cos \tau - \cos \phi| = |\cos(\tau - \tau_0) - \cos(\phi - \phi_0)|$, $\cos \tau - \cos \phi \neq \cos(\tau - \tau_0) - \cos(\phi - \phi_0)$

и изломы при

$$\cos \tau - \cos \phi = \cos(\tau - \tau_0) - \cos(\phi - \phi_0), \quad \cos \tau - \cos \phi \neq 0.$$

Для приближений кратчайшей геодезической и для приближения двух геодезических соответственно имеем

$$\begin{aligned} G_{\Delta}^{(1)}(\tau, \phi) &= \frac{\theta(-|\cos \tau - \cos \phi| + |\cos(\tau - \tau_0) - \cos(\phi - \phi_0)|)}{(\cos \tau - \cos \phi)^{\Delta}} + \\ &+ \frac{\theta(|\cos \tau - \cos \phi| - |\cos(\tau - \tau_0) - \cos(\phi - \phi_0)|)}{(\cos(\tau - \tau_0) - \cos(\phi - \phi_0))^{\Delta}}, \\ G_{\Delta}^{(2)}(\tau, \phi) &= \frac{1}{(\cos \tau - \cos \phi)} + \frac{1}{(\cos(\tau - \tau_0) - \cos(\phi - \phi_0))^{\Delta}}. \end{aligned}$$

По сравнению с $G_{\Delta}^{(2)}(\tau, \phi)$ функция $G_{\Delta}^{(1)}(\tau, \phi)$ имеет разрывы (см. рис 8).

Рассмотрим случай, когда вектор идентификации имеет две независимые компоненты (τ_0, ϕ_0) . Движение изломов и разрывов показано на рис. 9.

На рис. 9а изображены причинная структура пространства-времени, содержащего движущийся конический дефект (слева), и соответствующие полюсы пропагатора в физическом пространстве (справа). Дефицит угла меньше π . Линии AB и $A'B'$ отождествлены, стрелкой OO' показан вектор отождествления. Прямоугольник с вершинами $(-2\pi, -\pi)$, $(-2\pi, \pi)$, $(2\pi, \pi)$, $(2\pi, -\pi)$ отвечает границе исходного цилиндра. Параллелограмм $ABCD$ ограничивает площадь, остающуюся после процедуры разрезания и склейки. Квадраты $OBFE$ и $OAGH$ показывают причинную структуру световых конусов в исходной недеформированной теории поля (они обозначают полюсы функции Грина с $\tau_0 = 0$, $\phi_0 = 0$). Сдвинутый квадрат с вершинами в точках D и O' демонстрирует дополнительные полюсы функции Грина, проявляющиеся вследствие эффекта гравитационного линзирования. На правом рисунке количество жирных “косточек на счетах” равно количеству основных полюсов пропагатора в физическом пространстве, а бледные “косточки” отвечают дополнительным полюсам, возникшим из-за линзирования.

На левом из двух рис. 9б волнистые сплошные и штриховые линии показывают движение соответственно скачков и разрывов производной функции Грина, а на правом схематически изображено появление и исчезновение во времени разрывов (сплошные линии) и скачков производной (штриховые линии).

4. ФУНКЦИЯ ГРИНА В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

4.1. Квантованные стационарные конические дефекты. Чтобы рассмотреть импульсное представление корреляционных функций (18), удобно сначала совершить поворот Вика $\tau \rightarrow \tau_E = i\tau$,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\Delta(\tau_E, \phi | \tau_{0E}, \phi_0) = & \frac{\theta(-|\operatorname{ch} \tau_E - \cos \phi| + |\operatorname{ch}(\tau_E - \tau_{0E}) - \cos(\phi - \phi_0)|)}{(\operatorname{ch} \tau_E - \cos \phi)^\Delta} + \\ & + \frac{\theta(|\operatorname{ch} \tau_E - \cos \phi| - |\operatorname{ch}(\tau_E - \tau_{0E}) - \cos(\phi - \phi_0)|)}{(\operatorname{ch}(\tau_E - \tau_{0E}) - \cos(\phi - \phi_0))^\Delta}, \end{aligned} \quad (20)$$

и лишь затем выполнить преобразование Фурье. Отметим, что евклидов коррелятор при $\Delta = 0$ связан с функцией Грина оператора Лапласа на цилиндре

$$\mathcal{G}_0(\tau_E, \phi) = \ln(2(\operatorname{ch} \tau_E - \cos \phi)). \quad (21)$$

Данную корреляционную функцию можно получить из выражения для корреляционной функции операторов веса $\Delta = 0$ на плоскости

$$\langle \Phi_0(z_1, \bar{z}_1) \Phi_0(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \ln(|z_1 - z_2|^2)$$

через конформное отображение $w = \ln z$ двумерной плоскости на цилиндр:

$$\langle \Phi_0(w_1, \bar{w}_1) \Phi_0(w_2, \bar{w}_2) \rangle = -\ln \left(4 \operatorname{sh} \frac{w_1 - w_2}{2} \operatorname{sh} \frac{\bar{w}_1 - \bar{w}_2}{2} \right).$$

Вводя обозначения

$$w = w_1 - w_2 = \tau_E + i\phi, \quad \bar{w} = \bar{w}_1 - \bar{w}_2 = \tau_E - i\phi,$$

получаем формулу (21).

Заметим, что в силу соотношения³⁾

$$\sum_{\substack{-\infty \leq n \leq \infty, \\ n \neq 0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip\tau_E + iq\phi}}{p^2 + n^2} dp = \pi\tau_E - \pi \ln \left(4 \operatorname{sh} \frac{\tau_E - i\phi}{2} \operatorname{sh} \frac{\tau_E + i\phi}{2} \right), \quad \tau_E > 0,$$

мы имеем стандартное импульсное представление с непрерывной 0-компонентой p и дискретной 1-компонентой r импульса:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-itp - i\phi r} \langle \Phi_0(t, \phi) \Phi_0(0, 0) \rangle = \\ = - \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-itp - i\phi r} \ln(1 - e^{-|t| + i\phi})(1 - e^{-|t| - i\phi}) = \frac{1}{p^2 + r^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Ниже мы найдем аналог представления (22) для коррелятора в теории поля, дуальной пространству-времени AdS_3 с массивной статической частицей в центре диска Пуанкаре. Имеем

$$\mathcal{G}_{1-c} \left(p, \frac{2\pi}{L_0} r \right) = \int_0^{L_0} \frac{d\phi}{L_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-itp - i\phi(2\pi/L_0)r} \langle \Phi_0(t, \phi) \Phi_0(0, 0) \rangle_{1-c},$$

где $L_0 = 2\pi - 2\gamma$ и

$$\langle \Phi_0(t, \phi) \Phi_0(0, 0) \rangle_{1-c} = \langle \Phi_0(t, \phi) \Phi_0(0, 0) \rangle \theta \left(\frac{L_0}{2} - \phi \right) + \langle \Phi_0(0, L_0) \Phi_0(t, \phi) \rangle \theta \left(\phi - \frac{L_0}{2} \right).$$

Здесь $\langle \Phi_0(t, \phi) \Phi_0(0, 0) \rangle$ дается равенством (20). Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{1-c} \left(p, \frac{2\pi}{L_0} r \right) = - \int_0^{L_0/2} \frac{d\phi}{2L_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-itp - i\phi(2\pi/L_0)r} \ln(1 - e^{-|t| + i\phi \cdot 2\pi/L})(1 - e^{-|t| - i\phi}) - \\ - \int_{L_0/2}^{L_0} \frac{d\phi}{2L_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-itp - i\phi(2\pi/L_0)r} \ln(1 - e^{-|t| + i(L_0 - \phi)})(1 - e^{-|t| - i(L_0 - \phi)}). \end{aligned} \quad (23)$$

Чтобы вычислить этот интеграл, выполним интегрирование по частям и представим $\mathcal{G}_{1-c}$ в виде суммы:

$$\mathcal{G}_{1-c} \left(p, \frac{2\pi}{L_0} r \right) = B_1 + M_1 + N_1 + B_2 + M_2 + N_2,$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^{L_0/2} d\phi \frac{e^{-i\phi(2\pi/L_0)r}}{2r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-itp} \frac{e^{-(2\pi/L_0)|t| + i}}{1 - e^{-|t| + i\phi}}, \\ M_2 &= - \int_{L_0/2}^{L_0} d\phi \frac{e^{-i\phi(2\pi/L_0)r}}{2r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-itp} \frac{e^{-iL_0} e^{-|t| - i\phi}}{1 - e^{-iL_0} e^{-|t| - i\phi}}, \end{aligned}$$

³⁾Здесь мы вычитаем вклад нулевой гармоники $n = 0$, чтобы избежать проблем с инфракрасными расходимостями.

слагаемые N_1 и N_2 соответствуют вкладам второго множителя в правой части (23), а B_1 и B_2 – граничные члены,

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{e^{-i\pi r}}{2ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-itp} \ln((1 - e^{-|t|+i\pi L_0/L})(1 - e^{-|t|-i\pi L_0/L})) - \\ &\quad - \frac{1}{2ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-itp} \ln((1 - e^{-|t|})(1 - e^{-|t|})), \\ B_2 &= \frac{e^{-2i\pi r}}{2ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-itp} \ln((1 - e^{-iL_0} e^{-|t|-2i\pi L_0/L})(1 - e^{iL_0} e^{-|t|+2i\pi L_0/L})) - \\ &\quad - \frac{e^{-i\pi r}}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-itp} \ln((1 - e^{-iL_0} e^{-|t|-i\pi L_0/L})(1 - e^{iL_0} e^{-|t|+i\pi L_0/L})). \end{aligned}$$

Раскрывая знаменатели в выражениях для M_i , получаем

$$M_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{L_0/2} d\phi \frac{e^{-i\phi(2\pi/L_0)r}}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-itp} e^{-(2\pi k|t|/L + i\phi k)}.$$

Интегрируя по t и ϕ , мы получаем явное представление для M_1 в виде ряда. Подобные выражения имеют место для M_2 и N_i . В результате имеем

$$M_1 + M_2 + N_1 + N_2 = \frac{1}{2\pi r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k F(k, r, L_0)}{p^2 + k^2},$$

где

$$\begin{aligned} F(k, r, L_0) &= i \frac{e^{-i(\pi r - kL_0/2)} + e^{-i(2\pi r - 2kL_0)} - e^{-i(\pi r - 3kL_0/2)} - 1}{2\pi r/L_0 - k} - \\ &\quad - i \frac{e^{-i(\pi r + kL_0/2)} + e^{-i(2\pi r + 2kL_0)} - e^{-i(\pi r + 3kL_0/2)} - 1}{2\pi r/L_0 + k}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $L_0 = \pi$. Для целого r имеем

$$\begin{aligned} \text{Im } F(k, r, \pi) &= \frac{2 \sin(k\pi/2) [\sin(k\pi/2) + \sin(3k\pi/2)]}{k^2 - 4r^2}, \\ \text{Re } F(k, r, 2\pi, \pi) &= \frac{4r \sin(k\pi/2) [\cos(k\pi/2) + \cos(3k\pi/2) - \cos(\pi k) \cos(\pi r)]}{k^2 - 4r^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\text{Im } F(k, r, \pi) = 0$ при любых целых k , тогда как $\text{Re } F(k, r, \pi) = 0$ только при четных k . Также мы можем убедиться, что при $L_0 = \pi$ справедливо тождество $B_1 + B_2 = 0$.

В конечном счете для корреляторов получаем следующее выражение:

$$\mathcal{G}_{1-c}(p, r, \pi) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n}{p^2 + (2n+1)^2} \frac{(-1)^r}{(2n+1)^2 - 4r^2}.$$

После поворота Вика имеем

$$G_{1-c}(E, r, \pi) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - E^2} \frac{(-1)^{r+n}}{(2n+1)^2 - 4r^2}. \quad (24)$$

Рис. 10. Зависимость вещественной и мнимой частей корреляционной функции в импульсном представлении (сплошная и штриховая линии соответственно) от дискретной 1-компоненты импульса r (а). Зависимость вещественной части коррелятора от дефицита угла γ при $r = 2$ (б). Зависимость вещественной части корреляторов в импульсном представлении от непрерывной 0-компоненты p при $r = 2$ и $\gamma = \pi/2$ (в). Зависимость мнимой части коррелятора в импульсном представлении от p при $r = 2.5$ (г).

Легко видеть, что данные функции имеют полюсы при целых значениях энергии E , вычеты в этих полюсах вещественны, но могут быть как положительными, так и отрицательными. Замечателен тот факт, что 0- и 1-компоненты импульса абсолютно независимы друг от друга, и понятие о дисперсионном соотношении в такой теории не определено. По-видимому, результат (24) можно интерпретировать как сумму вкладов от однородно “размазанных” возбуждений типа доменной стенки, живущих на половине цилиндра (как мы помним, физическое пространство теории в представлении через разрезание и склейку задается половиной цилиндра).

Было бы интересно понять, являются ли данные возбуждения реальными физическими объектами или просто артефактами приближения одной геодезической, исчезающими при учете высших поправок.

4.2. Евклидова версия корреляторов при нетривиальном векторе идентификации (τ_0, ϕ_0) . Прежде чем анализировать корреляционные функции, соответствующие движущейся частице, рассмотрим евклидову версию корреляторов при

Рис. 11. Зависимости вещественной (сплошная линия) и мнимой (штриховая линия) частей пропагатора от переменных r , γ и p в приближении кратчайшей геодезической, изображенные на рис. 10 (тонкие линии на всех рисунках), в сравнении с теми же зависимостями в приближении двух геодезических (жирные линии).

произвольном векторе идентификации (см. рис. 10). На рис. 10а показана зависимость вещественной (сплошная линия) и мнимой (штриховая линия) частей корреляционной функции в импульсном представлении от дискретной 1-компоненты импульса r . Можно видеть, что мнимая часть в целых точках равна нулю. На рис. 10б приведена зависимость вещественной части коррелятора от дефицита угла γ при целом значении $r = 2$. На рис. 10в представлена зависимость вещественной части коррелятора от непрерывной 2-компоненты импульса p при целом значении $r = 2$ и фиксированном дефиците угла $\gamma = \pi/2$. На рис. 10г приведена зависимость мнимой части коррелятора от p при нецелом $r = 2.5$.

Аналогичные зависимости в приближении двух геодезических с сравнением с зависимостями, приведенными на рис. 10, представлены на рис. 11. Тонкие линии отвечают приближению кратчайшей геодезической, жирные – приближению двух геодезических. Видно (см. рис. 11а), что мнимые части коррелятора в целых точках равны нулю.

4.3. Движущийся квантованный конический дефект. В данном пункте мы рассматриваем движущуюся частицу с дефицитом угла $2\gamma = \pi$ при различных $\psi_0 \geq 0$. Соответствующий вектор идентификации имеет координаты (см. рис. 12а)

$$\tau_0 = -2 \operatorname{arctg} \operatorname{th} \psi_0, \quad \phi_0 = -2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\operatorname{th} \psi_0}.$$

Рис. 12. Вектор идентификации (15) при $2\gamma = \pi$ и разных значениях ψ_0 : случай $0 < \psi_0 < 0.1$ изображается штриховой линией, случай $0.1 < \psi_0 < 1$ – сплошной линией и случай $1 < \psi_0 < 10$ – пунктирной линией (а). Зависимость размера “жизненного пространства” от ψ_0 (б). Мнимая часть коррелятора (25) при разных значениях ψ_0 : при $\psi_0 = 0.05$ – штриховая линия, при $\psi_0 = 0.5$ – сплошная линия и при $\psi_0 = 1.5$ – пунктирная линия (в).

Здесь мы анализируем импульсное представление коррелятора в случае одной движущейся частицы:

$$\mathcal{G}_{1\text{-spiral}}(p, \frac{2\pi}{L_0}r) = \int_0^{L_0} \frac{d\phi}{L_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-itp - i\phi(2\pi/L_0)r} \langle \Phi_0(\tau, \phi) \Phi_0(0, 0) \rangle_{1\text{-spiral}}, \quad (25)$$

где $L_0 = |\phi_0 - \tau_0|$. Мы используем приближение двух геодезических. Корреляционные функции в этом случае определяются как

$$\langle \Phi_0(\tau, \phi) \Phi_0(0, 0) \rangle_{1\text{-spiral}} = \langle \Phi_0(\tau, \phi) \Phi_0(0, 0) \rangle + \langle \Phi_0(\tau_0, \phi_0) \Phi_0(\tau, \phi) \rangle.$$

Результат расчета показан на рис. 12.

4.4. Зацепленная энтропия. Наш результат также можно применить к изучению голографической зацепленной энтропии [18]. Известно, что в двумерной конформной теории поля корреляционные функции операторов нулевого конформного веса с точностью до нормировки совпадают с зацепленной энтропией, что позволяет рассматривать их как меру последней. Замечательное свойство зацепленной энтропии заключается в ее универсальном поведении [19]. Эволюция зацепленной энтропии в двумерной квантовой системе после квенча была проанализирована в работе [20]. В общем случае вычисление зацепленной энтропии в квантовой теории поля является очень сложной проблемой, поскольку связано с вычислением следов матрицы плотности. В статье [21] была предложена формула для зацепленной энтропии в произвольной голографической теории поля. Эту формулу можно обобщить на случай неконформных теорий поля, симметрия в которых нарушена за счет дефектов. В этом случае зацепленная энтропия

$$A(m_{[\phi, \psi]}) \sim \min\{\ln(2(1 - \cos(\phi - \psi))), \ln(2(1 - \cos(\phi^* - \psi)))\}.$$

Здесь, как и в работе [21], зацепленная энтропия отрезка $[\phi, \psi]$ (дуги $[\phi, \psi]$) определяется минимальной поверхностью, опирающейся на отрезок $[\phi, \psi]$. Взаимная

Рис. 13. Локально минимальные поверхности для граничных областей.

информация двух отрезков $[\phi_1, \psi_1]$ и $[\phi_2, \psi_2]$ здесь должна определяться как минимальная из четырех величин:

$$S_{[\phi_1, \psi_1] \cup [\phi_2, \psi_2]} = s \min\{A(m_{\text{dis}}), A(m_{\text{con}}), A(m_{\text{dis}}^*), A(m_{\text{con}}^*)\},$$

где s – отрицательная константа и (см. рис. 13)

$$\begin{aligned} A(m_{\text{dis}}) &= A(m_{[\phi_1, \psi_1]}) + A(m_{[\phi_2, \psi_2]}) = \\ &= 2\ell_{\text{AdS}} \ln \frac{2(1 - \cos(\phi_1 - \psi_1))}{2} + \ln \frac{1 - \cos(\phi_2 - \psi_2)}{2}, \\ A(m_{\text{con}}) &= A(m_{[\psi_1, \phi_2]}) + A(m_{[\phi_1, \psi_2]}) = \\ &= \ln \frac{1 - \cos(\psi_1 - \phi_2)}{2} + \ln \frac{1 - \cos(\phi_1 - \psi_2)}{2}, \\ A(m_{\text{dis}}^*) &= A(m_{[\phi_1^*, \psi_1]}) + A(m_{[\phi_2, \psi_2]}) = \\ &= \ln \frac{1 - \cos(\psi_1 - \phi_1^*)}{2} + \ln \frac{1 - \cos(\psi_2 - \phi_2)}{2}, \\ A(m_{\text{con}}^*) &= \ln \frac{1 - \cos(\psi_2 - \phi_1^*)}{2} + \ln \frac{1 - \cos(\phi_2 - \psi_1)}{2}. \end{aligned}$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели движущийся конический дефект в пустом пространстве-времени AdS_3 и вычислили двухточечную корреляционную функцию соответствующей двумерной граничной квантовой теории поля в приближении кратчайшей геодезической. Показано, что присутствие дефекта приводит к гравитационному линзированию геодезических, что в свою очередь влечет за собой появление конечного числа похожих слагаемых в функции Грина дуальной теории, соответствующих намоткам геодезических вокруг конической особенности. Показано, что при особых значениях дефицита угла $\gamma = \pi(2n - 1)/2n$ линзирование порождает возмущения типа доменных стенок в спектре дуальной теории. Было бы интересно выяснить, не является ли данный эффект артефактом приближения кратчайшей геодезической и не пропадает ли он при учете высших намоток.

В проанализированной нами модели эволюция зацепленной энтропии изучалась по аналогии с предыдущими рассмотрениями [22], [17]. Было бы интересно проанализировать эту модель на предмет фазовых переходов, подобных рассмотренным в работе [21].

Другая голографическая модель, связанная с рассмотрением топологических дефектов, изучалась в статье [23].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Комплексификация геодезических в глобальных координатах и корреляционные функции для времениподобных точек

Для двух точек на границе, разделенных времениподобным интервалом, нет геодезической в балке, соединяющей их. В работе [17] было предложено использовать комплексификацию невозвращающихся пространственноподобных геодезических для нахождения корреляционных функций, соответствующих подобным точкам. В координатах Пуанкаре (t, x, z) эти геодезические имеют вид

$$\begin{aligned} z(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{E^2 - J^2} \operatorname{sh}(\lambda - \lambda_0)}, \\ x(\lambda) &= x_0 - \frac{J}{E^2 - J^2} \operatorname{cth}(\lambda - \lambda_0), \\ t(\lambda) &= t_0 - \frac{E}{E^2 - J^2} \operatorname{cth}(\lambda - \lambda_0). \end{aligned}$$

Здесь мы предполагаем, что $E^2 > J^2$. В дальнейшем мы будем считать, что $\lambda_0 = 0$.

Для выполнения комплексификации авторы работы [17] предложили добавить малую мнимую часть к аффинному параметру: $\lambda \rightarrow \lambda + i\beta$, в результате имеем

$$\begin{aligned} z(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{E^2 - J^2}} \frac{\operatorname{sh} \lambda \cos \beta - i \operatorname{ch} \lambda \sin \beta}{\operatorname{sh}^2 \lambda \cos^2 \beta + \operatorname{ch}^2 \lambda \sin^2 \beta}, \\ x(\lambda) &= \frac{J}{E^2 - J^2} \frac{\operatorname{sh} 2\lambda - i \sin 2\beta}{\operatorname{ch} 2\lambda - \cos 2\beta}, \\ t(\lambda) &= \frac{E}{E^2 - J^2} \frac{\operatorname{sh} 2\lambda - i \sin 2\beta}{\operatorname{ch} 2\lambda - \cos 2\beta}. \end{aligned}$$

Выясним, как комплексификация выглядит в глобальных координатах

$$\operatorname{ctg} \tau = \operatorname{sh} \mu \operatorname{th} \lambda, \quad (\text{П.1})$$

$$\operatorname{sh} \chi = \pm \operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \lambda, \quad (\text{П.2})$$

здесь $\operatorname{sh} \mu \equiv (E - 1/E)/2$. Для определенности возьмем знак плюс в (П.2). Применив процедуру комплексификацию к (П.1) и (П.2), получаем

$$\operatorname{ctg} \tau_c = \operatorname{sh} \mu \operatorname{th}(\lambda + i\beta) = \operatorname{sh} \mu \frac{\operatorname{sh} 2\lambda + i \sin 2\beta}{\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\beta}, \quad (\text{П.3})$$

$$\operatorname{sh} \chi_c = \operatorname{ch} \mu \operatorname{sh}(\lambda + i\beta) = \operatorname{ch} \mu (\operatorname{sh} \lambda \cos \beta + i \operatorname{ch} \lambda \sin \beta). \quad (\text{П.4})$$

Эти формулы показывают, что комплексификация в глобальных координатах соответствует комплексификации параметра s в представлении геодезических, приведенной в статье [11]:

$$s \rightarrow s + i \frac{\beta}{\sqrt{\xi^2 - 1}}.$$

На комплексифицированных геодезических выполняется соотношение

$$\operatorname{ch}^2 \lambda = \frac{|\operatorname{sh} \chi_c|^2}{\operatorname{ch}^2 \mu} + \cos^2 \beta, \quad \text{где} \quad |\operatorname{sh} \chi_c|^2 = \operatorname{ch}^2 \mu (\operatorname{ch}^2 \lambda - \cos^2 \beta),$$

а длина геодезической дается формулой

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \operatorname{arcch} 2\sqrt{\frac{|\operatorname{sh}\chi_c|^2}{\operatorname{ch}^2\mu} + \cos^2\beta} = \\ &= 2\ln\left(\sqrt{\frac{|\operatorname{sh}\chi_c|^2}{\operatorname{ch}^2\mu} + \cos^2\beta} + \sqrt{\frac{|\operatorname{sh}\chi_c|^2}{\operatorname{ch}^2\mu} - \sin^2\beta}\right).\end{aligned}$$

Выделяя расходящуюся часть, мы получаем

$$L_{\text{ren}} = \lim_{|\operatorname{sh}\chi_c| \rightarrow \infty} (\Delta\lambda - 2\ln|\operatorname{sh}\chi_c|^2) = \ln \frac{4}{\operatorname{ch}^2\mu}, \quad |\operatorname{sh}\chi_c|^2 = \frac{1}{\delta^2}.$$

Из формулы (П.4) видим, что $\operatorname{ctg}\tau_{\max} = \operatorname{sh}\mu$, и, принимая это соотношение во внимание, мы можем написать

$$L_{\text{ren}} = \ln 4 \sin^2 \tau_{\max} = \ln 2(\cos 2\tau_{\max} - 1).$$

Поэтому коррелятор имеет вид

$$G_{\Delta}(-\tau_{\max}, 0; \tau_{\max}, 0) = [2(\cos 2\tau_{\max} - 1)]^{-\Delta},$$

что находится в соответствии с (17).

Благодарности. Для нас большая честь посвятить эту статью 75-летию юбилю академика А. А. Славнова. И. Арефьева благодарна Дмитрию Агееву за помощь в численных расчетах. А. Багров хотел бы выразить свою благодарность Симону Дедео и Петеру Сатерскогу за полезные обсуждения. Вклад И. Арефьевой поддержан РФФИ (грант № 14-11-00687, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН).

Список литературы

- [1] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, *Phys. Rept.*, **323**:3–4 (2000), 183–386, arXiv: hep-th/9905111.
- [2] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal, U. A. Wiedemann, *Gauge/string duality, hot QCD and heavy ion collisions*, arXiv: 1101.0618.
- [3] И. Я. Арефьева, *УФН*, **184**:6 (2014), 569–598.
- [4] W. Witzczak-Krempa, E. Sorensen, S. Sachdev, *Nature Phys.*, **10**:5 (2014), 361–366, arXiv: 1309.2941.
- [5] G. 't Hooft, *Class. Quantum Grav.*, **13**:5 (1996), 1023–1039, arXiv: gr-qc/9601014.
- [6] S. Deser, R. Jackiw, G. 't Hooft, *Ann. Phys.*, **152**:1 (1984), 220–235.
- [7] M. Smolkin, S. N. Solodukhin, *Correlation functions on conical defects*, arXiv: 1406.2512.
- [8] V. Balasubramanian, S. F. Ross, *Phys. Rev. D*, **61**:4 (2000), 044007, 12 pp., arXiv: hep-th/9906226.
- [9] C. A. B. Bayona, C. N. Ferreira, V. J. V. Otoy, *Class. Quantum Grav.*, **28**:1 (2011), 015011, arXiv: 1003.5396.
- [10] I. Ya. Aref'eva, *Colliding hadrons as cosmic membranes and possible signatures of lost momentum*, arXiv: 1007.4777.
- [11] H.-J. Matschull, M. Welling, *Class. Quantum Grav.*, **15** (1998), 2981–3030, arXiv: gr-qc/9708054.
- [12] H.-J. Matschull, *Class. Quantum Grav.*, **16**:3 (1999), 1069–1095, arXiv: gr-qc/9809087.

- [13] S. Holst, H.-J. Matschull, *Class. Quantum Grav.*, **16**:10 (1999), 3095–3131, arXiv: gr-qc/9905030.
- [14] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, **1**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.
- [15] S. DeDeo, J. R. Gott, *Phys. Rev. D*, **66**:8 (2002), 084020, 6 pp., arXiv: gr-qc/0212118; Erratum, **67**:6 (2003), 069902, 1 pp.
- [16] I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, *Phys. Lett. B*, **433**:1–2 (1998), 49–55, arXiv: hep-th/9804182.
- [17] V. Balasubramanian, A. Bernamonti, B. Craps, V. Keränen, E. Keski-Vakkuri, B. Müller, L. Thorlacius, J. Vanhoof, *JHEP*, **04** (2013), 069, 50 pp., arXiv: 1212.6066.
- [18] S. Ryu, T. Takayanagi, *JHEP*, **08** (2006), 045, 48 pp., arXiv: hep-th/0605073.
- [19] P. Calabrese, J. L. Cardy, *J. Stat. Mech.*, **06** (2004), 002, 27 pp., arXiv: hep-th/0405152.
- [20] P. Calabrese, J. L. Cardy, *J. Stat. Mech.*, **04** (2005), 010, 24 pp., arXiv: cond-mat/0503393.
- [21] M. Headrick, *Phys. Rev. D*, **82**:12 (2010), 126010, 21 pp., arXiv: 1006.0047.
- [22] J. Abajo-Arrastia, J. Aparicio, E. López, *JHEP*, **11** (2010), 149, 27 pp., arXiv: 1006.4090.
- [23] V. Balasubramanian, P. Hayden, A. Maloney, D. Marolf, S. F. Ross, *Multiboundary wormholes and holographic entanglement*, arXiv: 1406.2663.

Поступила в редакцию 24.06.2014