Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Горбатенко, Принцип наименьшего действия в общей теории относительности, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 2, 305–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf875>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 02:16:43

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В рамках общей теории относительности модифицируется процедура получения уравнений Эйнштейна путем введения в римановом пространстве конгруэнции времениподобных кривых и использования связей между вариациями. Цель модификации – обеспечить выполнение принципа наименьшего действия по отношению к любой системе отсчета.

1. ВВЕДЕНИЕ

В обычной формулировке принципа наименьшего действия (ПНД) в общей теории относительности вторая вариация действия

$$I = - \int_{\Omega} d\Omega \sqrt{-g} R \quad (1)$$

не является, вообще говоря, знакоопределенной в окрестности экстремалей. При обсуждении этого вопроса в книге [1, с. 348] отмечается, что:

- 1) “... можно наложить на $g_{\alpha\beta}$ такие дополнительные условия, при соблюдении которых действие имеет минимум по отношению к варьированию $g_{\alpha\beta}$ ”, кроме того, необходимо “... потребовать выполнения этих условий при варьировании”;
- 2) “... все сказанное не влияет на вывод уравнений поля из принципа наименьшего действия.”

В качестве четырех дополнительных условий в [1] используются условия

$$\delta g_{0k} = 0, \quad \delta \det(g_{mn}) = 0. \quad (2)$$

В данной работе предложен более последовательный, чем в [1], учет в ПНД идей, содержащихся в приведенных выше двух утверждениях. Бóльшая последовательность означает следующее:

Во-первых, для обеспечения независимости факта минимальности действия на экстремали от выбора системы отсчета мы с самого начала вводим в теорию конгруэнцию

*Российский федеральный ядерный центр, Всероссийский НИИ экспериментальной физики, г. Саров, Нижегородская обл., Россия. E-mail: 0722@spd.vniief.ru

времениподобных кривых и ограничения на вариации (2) формулируем в ковариантной форме с помощью векторов 4-скорости $u^\alpha(x)$, касательных к кривым конгруэнции.

Во-вторых, используется хорошо известная процедура получения динамических уравнений при наличии связей, в которой связи вводятся в вариацию действия с помощью неопределенных множителей Лагранжа.

Несколько слов о смысле этих модификаций ПНД, детальное изложение которых является предметом данной работы. Первую модификацию мы вынуждены сделать по той причине, что в противном случае знак константы гравитационного взаимодействия в одной системе отсчета будет положительным, а в другой – отрицательным. Если же минимальность действия обеспечивается ковариантным образом (именно для этой цели вводится конгруэнция кривых), то знак константы гравитационного взаимодействия во всех системах отсчета один и тот же. Вторая модификация вопреки приведенному выше мнению [1] является операцией, далеко не безобидной с точки зрения влияния на динамические уравнения. Она приводит к тому, что либо в теории необходимо ограничиваться шестью “рабочими” степенями свободы, построенными из компонент метрики, либо в теории появляется ненулевой тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, построенный из множителей Лагранжа и 4-скорости.

2. ВАРИАЦИЯ ДЕЙСТВИЯ

Выражение для вариации действия находим по формуле

$$\delta I = - \int_{\Omega} d\Omega (\sqrt{-g} + \delta\sqrt{-g})(g^{\alpha\beta} + \delta g^{\alpha\beta})(R_{\alpha\beta} + \delta R_{\alpha\beta}) + \int_{\Omega} d\Omega \sqrt{-g} R. \quad (3)$$

В качестве основной величины, через которую будем выражать все другие вариации, примем $\delta g_{\alpha\beta}$. Выражения для вариаций величин, входящих в (3), имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) = \delta_1(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) + \delta_2(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) + \dots, \\ \delta_1(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) = \sqrt{-g} \left\{ -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \right\} \delta g_{\mu\nu}, \\ \delta_2(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) = \sqrt{-g} \left\{ g^{\alpha\mu} g^{\nu\tau} g^{\rho\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g^{\tau\rho} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\mu\tau} g^{\nu\rho} + \frac{1}{8} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g^{\tau\rho} \right\} (\delta g_{\mu\nu})(\delta g_{\tau\rho}); \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\delta R_{\alpha\beta} = [\delta\Gamma^\kappa_{\alpha\beta}]_{;\kappa} - [\delta\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma}]_{;\beta} + (\delta\Gamma^\kappa_{\alpha\beta})(\delta\Gamma^\sigma_{\kappa\sigma}) - (\delta\Gamma^\kappa_{\alpha\sigma})(\delta\Gamma^\sigma_{\beta\kappa}); \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \delta_1\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \delta_2\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \dots, \\ \delta_1\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \{ (\delta g_{\kappa\beta})_{;\alpha} + (\delta g_{\alpha\kappa})_{;\beta} - (\delta g_{\alpha\beta})_{;\kappa} \}, \\ \delta_2\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_1 g^{\lambda\kappa}) \{ (\delta g_{\kappa\beta})_{;\alpha} + (\delta g_{\alpha\kappa})_{;\beta} - (\delta g_{\alpha\beta})_{;\kappa} \}. \end{array} \right. \quad (6)$$

После подстановки (4)–(6) в (3) выражение для δI может быть представлено в виде суммы четырех членов:

$$\delta I = \delta_1 I + \delta_2 I + \delta_3 I + \delta_4 I, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 I = - \int_{S(\Omega)} dS_\kappa \left\{ \delta \Gamma^\kappa_{\alpha\beta} [\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} + \delta(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta})] - \right. \\ \left. - [\sqrt{-g} g^{\kappa\alpha} + \delta(\sqrt{-g} g^{\kappa\alpha})] \delta \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\delta_2 I = - \int_{\Omega} d\Omega \delta(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta}, \quad (9)$$

$$\delta_3 I = \int_{\Omega} d\Omega \left\{ (\delta(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}))_{;\kappa} \delta \Gamma^\kappa_{\alpha\beta} - (\delta(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}))_{;\beta} \delta \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} \right\}, \quad (10)$$

$$\delta_4 I = - \int_{\Omega} d\Omega \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \left\{ (\delta \Gamma^\kappa_{\alpha\beta}) (\delta \Gamma^\sigma_{\kappa\sigma}) - (\delta \Gamma^\kappa_{\alpha\sigma}) (\delta \Gamma^\sigma_{\beta\kappa}) \right\}. \quad (11)$$

Слагаемое $\delta_1 I$ является интегралом по гиперповерхности, охватывающей 4-объем интегрирования. Остальные три слагаемых – интегралы по 4-объему.

3. СВЯЗИ. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Запишем вариацию $\delta_1 I$ в соотношении (7) следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_1 I = - \int_{S(\Omega)} dS_\kappa \sqrt{-g} [g^{\alpha\beta} (\delta_1 \Gamma^\kappa_{\alpha\beta}) - g^{\kappa\lambda} (\delta_1 \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma})] - \\ - \int_{\Omega} d\Omega \sqrt{-g} (\delta_1 g^{\alpha\beta}) \left\{ R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

В окрестности экстремали величина $\delta_1 I$ равна нулю относительно любых вариаций $\delta g_{\alpha\beta}$ внутри 4-объема Ω при условии обращения $\delta g_{\alpha\beta}$ в нуль на границе $S(\Omega)$. Вместе с $\delta g_{\alpha\beta}$ на границе обращаются в нуль и все производные от $\delta g_{\alpha\beta}$ по пространственным направлениям (но не по времени).

Запишем поверхностный интеграл из (12) в виде

$$\int_{S(\Omega)} dS_\kappa \sqrt{-g} Y^\kappa, \quad Y^\kappa \equiv g^{\alpha\beta} (\delta_1 \Gamma^\kappa_{\alpha\beta}) - g^{\kappa\lambda} (\delta_1 \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma}) \quad (13)$$

и сделаем два важных предположения. Во-первых, предположим, что вариационный принцип может быть сформулирован для риманова пространства только при дополнительном оснащении этого пространства конгруэнцией времениподобных мировых линий с полем единичных касательных векторов $u^\alpha(x)$. Во-вторых, мы предполагаем, что вариационный принцип должен формулироваться для фиксированной в процессе варьирования системы отсчета, связанной с введенной конгруэнцией времениподобных мировых

линий. Условиями, фиксирующими во всем 4-объему Ω систему отсчета, будем считать следующие:

$$P^{\mu\nu}(\delta P_{\mu\nu}) = 0, \quad u^\alpha(\delta g_{\alpha\beta})P^{\beta\lambda} = 0. \quad (14)$$

Здесь $P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta$ — метрика пространства, ортогонального к u^α . Условия (14) являются ковариантным случаем условий (2). Ковариантность обеспечивается тем, что, во-первых, условия формулируются в терминах не компонент метрики (как в [1]), а их вариаций, являющихся полноценными тензорами; во-вторых, для выделения вариаций, подчиняющихся связям, используется не какая-то случайная система (как в [1]), а система отсчета, связанная с векторным полем $u^\alpha(x)$.

Как только в теории возникают связи для класса допустимых вариаций, сразу появляется необходимость в модификации процедуры получения динамических уравнений [2]. Мы должны либо производить варьирование только по тем компонентам метрики, которые не ограничиваются связями, либо пользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа. Применительно к “рабочим” степеням свободы метрики оба метода естественно приводят к одним и тем же уравнениям. Однако метод неопределенных множителей дает более полную информацию о системе. Он позволяет получить уравнения не только для “рабочих” степеней свободы метрики, но и для полей, соответствующих “реакциям опоры”, обеспечивающим выполнение ПНД. По этой причине в данной работе используется метод неопределенных множителей Лагранжа (для альтернативного способа получения уравнений мы приведем лишь вид получающихся уравнений). В соответствии с этим методом связи (14) с помощью множителей Лагранжа φ, Φ_λ вводим в объемный интеграл:

$$\begin{aligned} \delta_1 I = & - \int_{S(\Omega)} dS_\kappa \sqrt{-g} Y^\kappa - \int_\Omega d\Omega \sqrt{-g} (\delta_1 g^{\alpha\beta}) \times \\ & \times \left\{ R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R - \varphi P_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} [u_\alpha \Phi_\beta + u_\beta \Phi_\alpha] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

При написании (15) учтено, что по способу своего введения вектор Φ_λ ортогонален вектору u^α , т.е. $u^\nu \Phi_\nu = 0$. Отсюда следует, что из четырех компонент вектора Φ_λ независимы только три.

Представим вариацию $\delta g_{\alpha\beta}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta g_{\alpha\beta} = & u_\alpha u_\beta u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu} + \left[P_\alpha^\mu P_\beta^\nu - \frac{1}{3} P_{\alpha\beta} P^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} + \\ & + [u_\alpha P_\beta^\mu u^\nu + u_\beta P_\alpha^\mu u^\nu] \delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{3} P_{\alpha\beta} P^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (16)$$

В верхней строчке соотношения (16) стоят 6 независимых вариаций, а в нижней — 4 вариации, равные нулю в силу связей (14). При независимых вариациях выражение в фигурных скобках в (15) должно быть равно нулю в силу динамических уравнений. При

нулевых вариациях множители Лагранжа подбираются так, чтобы выражение в фигурных скобках в (15) также было равно нулю. В результате из (15) следуют динамические полевые уравнения в форме уравнений Эйнштейна с ненулевой правой частью

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R &= T_{\alpha\beta}, \\ T_{\alpha\beta} &= [g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta]\varphi + \frac{1}{2}[u_\alpha \Phi_\beta + u_\beta \Phi_\alpha]. \end{aligned} \quad (17)$$

Обращение в нуль объемного интеграла в выражении (15) еще не означает автоматического обращения в нуль величины $\delta_1 I$. Однако нетрудно заметить, что в Y^κ входят производные по времени только от тех вариаций, которые тождественно равны нулю в силу связей (14). Поэтому при нашем способе варьирования поверхностный интеграл, содержащийся в $\delta_1 I$, равен нулю.

Векторное поле $u^\alpha(x)$, фигурирующее в тензоре $T_{\alpha\beta}$, имеет чисто кинематический характер. Это следует, например, из того обстоятельства, что уравнения (17) могут быть записаны в синхронной по вектору $u^\alpha(x)$ системе координат. В этой системе по определению вектор имеет компоненты $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$. С другой стороны, присутствие в теории конгруэнции времениподобных мировых линий гарантирует принципиальную возможность исследования уравнений (17) в конечной пространственно-временной 4-мерной области (более подробно о монадном формализме, основанном на конгруэнции времениподобных мировых линий, см., например, в [3]).

В заключение приведем также модифицированные уравнения Эйнштейна, которые получаются при альтернативном способе учета ограничений (14). При альтернативном способе множители Лагранжа вообще не появляются в схеме, а искомыми функциями являются функции

$$u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta}, \quad \left[P_\alpha^\mu P_\beta^\nu - \frac{1}{3}P_{\alpha\beta} P^{\mu\nu} \right] g_{\mu\nu}.$$

Для этих функций модифицированные уравнения записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} u^\alpha u^\beta \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \right) &= 0, \\ \left[P_\alpha^\mu P_\beta^\nu - \frac{1}{3}P_{\alpha\beta} P^{\mu\nu} \right] \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

4. ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ ДЕЙСТВИЯ

Во втором порядке по $\delta g_{\alpha\beta}$ в слагаемом $\delta_1 I$ все члены содержат произведение производной от вариации на саму вариацию. Поскольку на границе 4-объема вариации должны обращаться в нуль, то отсюда следует, что слагаемое $\delta_1 I$, представляющее собой поверхностный интеграл, не дает вклада во вторую вариацию действия.

Для выяснения вопроса, имеем ли мы дело с минимумом, максимумом или просто с экстремумом действия, необходимо проводить анализ тех членов в слагаемых $\delta_2 I$, $\delta_3 I$, $\delta_4 I$, которые содержат производные от вариаций по времени. Таких членов заведомо

нет в слагаемом $\delta_2 I$. Поэтому мы его в дальнейшем детально рассматривать не будем. В слагаемых $\delta_3 I$ и $\delta_4 I$ такие члены имеются. Приведем их в явной форме:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} I \equiv \delta_3 I + \delta_4 I \Rightarrow \frac{1}{4} \int_{\Omega} d\Omega \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \Big\{ & -(\delta g_{\alpha\beta})_{;\kappa} (\delta g_{\mu\nu})_{;\lambda} + \\ & + 2(\delta g_{\alpha\beta})_{;\kappa} (\delta g_{\lambda\mu})_{;\nu} + (\delta g_{\alpha\mu})_{;\kappa} (\delta g_{\beta\nu})_{;\lambda} - 2(\delta g_{\alpha\mu})_{;\kappa} (\delta g_{\beta\lambda})_{;\nu} \Big\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Знак $\Rightarrow$ в (19) означает, что в выражении для $\tilde{\delta} I$ мы опустили все члены, в которых нет производных от вариации метрики.

Запишем теперь (19) в синхронной системе координат, в которой ось времени совпадает с направлением вектора $u^\alpha(x)$. Подынтегральное выражение в $\tilde{\delta} I$ принимает тогда вид

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} I \Rightarrow \frac{1}{4} \Big\{ & 2(\delta g_{00})_{|k} (\delta g_{0k})_{|0} - 2(\delta g_{00})_{|0} (\delta g_{0k})_{|k} + 2(\delta g_{0l})_{|0} (\delta g_{kk})_{|l} - \\ & - 2(\delta g_{00})_{|l} (\delta g_{kk})_{|l} - 2(\delta g_{0l})_{|k} (\delta g_{0k})_{|l} + 2(\delta g_{0k})_{|l} (\delta g_{0k})_{|l} + \\ & + 2(\delta g_{0l})_{|l} (\delta g_{kk})_{|0} - (\delta g_{ll})_{|0} (\delta g_{kk})_{|0} - 4(\delta g_{0l})_{|k} (\delta g_{lk})_{|0} + \\ & + (\delta g_{kl})_{|0} (\delta g_{kl})_{|0} + 2(\delta g_{kl})_{|l} (\delta g_{00})_{|k} - 2(\delta g_{ml})_{|l} (\delta g_{kk})_{|m} + \\ & + (\delta g_{ll})_{|m} (\delta g_{kk})_{|m} + 2(\delta g_{mk})_{|l} (\delta g_{ml})_{|k} - (\delta g_{kl})_{|m} (\delta g_{kl})_{|m} \Big\}. \end{aligned} \quad (20)$$

В (20) по дважды повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до 3.

После отбрасывания в (20) членов, обращающихся в нуль в силу связей (14), оказывается, что остаются только члены с квадратами пространственных производных и квадратами временных производных. Последние и определяют знак $\tilde{\delta} I$, поскольку достаточно быстрым изменением малых вариаций во времени величину $\tilde{\delta} I$ можно сделать сколь угодно большой. Оставляя только определяющие члены, получаем, что

$$\tilde{\delta} I \Rightarrow \frac{1}{4} (\delta g_{mn})_{|0} (\delta g_{mn})_{|0} > 0. \quad (21)$$

Это означает, что вариационный принцип в той форме, в которой мы его используем, обеспечивает не экстремальность, а минимальность действия. Естественно, этот результат имеет ковариантный характер, поскольку величина (19) является скаляром, а синхронная система понадобилась лишь для нахождения характера зависимости этой скалярной функции от вариаций метрики.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения (17) с отличным от нуля тензором $T_{\alpha\beta}$ в правой части представляют собой модифицированные уравнения Эйнштейна. С первого взгляда ничего особенного с уравнениями не произошло, потому что тензор $T_{\alpha\beta}$ аналогичен феноменологическому тензору энергии-импульса $T_{\alpha\beta}^{\text{matter}}$, включение которого в правую часть уравнений

является обычным отправным пунктом большинства исследований по общей теории относительности. Однако, если рассматривать тензор (17) как тензор энергии-импульса какой-то материи, то эта материя будет обладать очень специфическим свойством. Она имеет давление, но в системе отсчета, сопутствующей вектору $u^\alpha(x)$, у нее нет плотности энергии. Обычная материя с таким уравнением состояния не существует. Возможная трактовка величины φ состоит в том, чтобы рассматривать ее как давление поляризационного типа, поскольку величина φ возникает в пустом пространстве под действием одной лишь гравитации. Заметим, что давление такого же происхождения (обусловленное “истинной поляризацией вакуума”) рассматривалось в [4] в связи с попыткой построения так называемой “инфляционной” модели “ранней” Вселенной. Наличие поляризационного давления φ и плотности потока энергии Φ_α , по-видимому, может иметь принципиальное значение в областях вблизи сингулярностей.

Уравнения, получаемые от варьирования компонент метрики, содержащихся в ее бесследовой пространственной части, дают динамические уравнения для этих пяти компонент. Уравнение от $(u^\alpha u^\beta \delta g_{\alpha\beta})$ -варьирования является уравнением для компоненты $u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta}$. Это уравнение, по-существу, есть связь для данных Коши. Как и в обычном варианте, связь вводится в 4-объем, если она выполнена на начальной поверхности. Таким образом, в нашем подходе из четырех связей для данных Коши ($G_\alpha^0 = 0$) остается только одна ($G_0^0 = 0$). Остальные три превращаются в условия для определения пространственных компонент вектора плотности потока энергии. Следовая часть пространственной части уравнений является уравнением для вычисления давления. Величины φ и Φ_α описывают реакцию материи, обеспечивающей постоянство системы отсчета в процессе варьирования.

Представляет интерес сравнить развитую нами схему с релятивистской теорией гравитации [5].

Автор благодарит Ю. А. Романова за критические замечания по поводу появления привилегированной системы отсчета, связанной с полем $u^\alpha(x)$. Работа выполнена при частичной поддержке Международного научно-технического центра (проект #208).

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Изд. 7-е. М.: Наука, 1988.
- [2] Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967.
- [3] Ю. С. Владимиров. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоатомиздат, 1982.
- [4] Я. Б. Зельдович. УФН. 1981. Т. 133. Вып. 3. С. 479.
- [5] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 7.X.1997 г.,
после доработки 8.I.1998 г.